This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

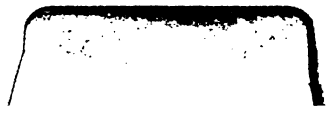
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 025 497 681

5 1 7 . 5
A 6 7 3



# Archiv

der

# Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

---

Herausgegeben

von

***Johann August Grunert,***

Professor zu Greifswald.

**Dreiundvierzigster Theil.**

Mit zehn lithographirten Tafeln.

**Greifswald.**

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

**1865.**

1624:0

STAMFORD LIBRARY

# Inhaltsverzeichniss des dreiundvierzigsten Theils.


| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| | **Arithmetik.** | | |
| X. | Wenn $x$ in's Unendliche wächst, so nähert sich die Grösse $x-\sqrt{x^2-1}$ der Null, und kann der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur $x$ gross genug annimmt. Von dem Herausgeber . . . . . | I. | 116 |
| | Fehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln . . . . . | I. | 120 |
| XII. | Die harmonischen Reihen. Von Herrn Dr. Josef Knar, Professor der Mathematik zu Graz. (Fortsetzung und Schluss von Thl. XLI. Hft. 3. Nr. XXVII.) . . . . . | II. | 134 |
| XVIII. | Fehler in einigen Logarithmentafeln. Aus einem Briefe des Herrn Professor Houël in Bordeaux an den Herausgeber . . . . . | II. | 243 |
| | Fehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln . . . . . | II. | 244 |
| XXII. | Ueber die Näherungswerthe der periodischen Kettenbrüche und ihre Anwendung auf Darstellung der Quadratwurzeln. Von Herrn Dr. L. Oettinger, Grossherz. Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B. . . . . | III. | 301 |
| XXX. | Ueber cubische Reste. (Für Studirende.). Von Herrn Dr. G. F. Meyer . . . . . | IV. | 413 |
| XXXIII. | Die Entwickelung der trigonometrischen Funktionen in unendliche Faktorenfolgen. Von Herrn Professor Dr. Dienger an der polytechnischen Schule in Carlsruhe . . . . . | IV. | 474 |
| XXXIV. | Note über die Integration einer gewissen Gattung linearer Differentialgleichungen. Von Herrn Simon Spitzer, ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute in Wien . . . . . | IV. | 478 |

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| XXXV. | Note sur les logarithmes des sinus et tangentes des petits angles. (Extrait du Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles, No. 52.). Par M. F. Burnier . . . . . | IV. | 487 |


## Geometrie.


| | | | |
|---|---|---|---|
| I. | Ein neuer Beweis des vom Herrn Oberlehrer Harnischmacher mitgetheilten Lehrsatzes über einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks (Archiv, Bd. XLII. S. 90.). Von Herrn W. Mink, Oberlehrer in Crefeld . . . . . | I. | 1 |
| II. | Lösung der Thl. XLII. S. 80 ff. behandelten geometrischen Aufgabe durch Zurückführung auf eine Dreiecks-Construction. Von Herrn Carl Schmidt in Spremberg . . . . . | I. | 7 |
| III. | Ueber die Linien, welche die Tangenten einer Curve unter constantem Winkel schneiden. Von Herrn Doctor Otto Böklen zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg . . . . . | I. | 14 |
| IV. | Ueber die Winkelsumme in Dreiecken, gebildet aus Linien des Systems (*a*) oder aus geodätischen Linien. Von Herrn Doctor O. Böklen in Sulz a. N. im Königreich Würtemberg | I. | 18 |
| V. | Ueber die Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts Normalen an denselben zu ziehen. Von dem Herausgeber . . . . . | I. | 26 |
| VI. | Der Kegelschnitt der neun Punkte. Von dem Herausgeber. . . . . | I. | 54 |
| VII. | Ueber die Gleichgewichtslage, in der sich die Mittelpunkte der einbeschriebenen Kreise eines Dreiecks zum Mittelpunkt des umschriebenen Kreises desselben befinden. Von Herrn Ed. Jac. Noeggerath, Director der Königl. Provinzial-Gewerbeschule zu Brieg a. O. . . . . | I. | 89 |
| IX. | Die Gleichung zwischen den Seiten des Fünf-, Sechs- und Zehnecks. Von Herrn Director Dr. Heinen an der Realschule zu Düsseldorf | I. | 100 |

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| X. | Ueber den Satz von Beltrami: Wenn man durch die drei Spitzen eines Dreiecks drei beliebige parallele Gerade zieht, welche mit den, die Winkel des Dreiecks halbirenden Geraden (nach entgegengesetzten Seiten hin) dieselben Winkel einschliessen, wie die entsprechenden Parallelen: so schneiden sich diese drei letzteren Geraden jederzeit in einem Punkte, welcher auf der Peripherie des dem Dreiecke umschriebenen Kreises liegt. Von dem Herausgeber . . . . . | I. | 102 |
| X. | Ueber eine stereometrische Aufgabe. Von dem Herausgeber . . . . . | I. | 108 |
| X. | Ueber die Beschreibung des regulären Fünfecks und Zehnecks in den Kreis. Von dem Herausgeber . . . . . | I. | 113 |
| X. | Sehr leicht elementar zu beweisender Satz von der Parabel. Nach Siebeck . . . . . | I. | 120 |
| XIV. | Geometrischer Ort der Mittelpunkte aller durch einen festen Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnitts. Von Herrn Professor E. Lommel in Schwyz . . . . . | II. | 231 |
| XV. | Autre démonstration du théorème de Mr. Beltrami énoncé dans le 42. Tome p. 356. de ce journal. Par Monsieur R. Lobatto, Professeur à l'École polytechnique à Delft . . . . | II. | 234 |
| XVI. | Remarques sur une solution donnée par Mr. Jos. Eilles à München, du problème relatif à la cubature d'un cylindre droit coupé par un plan incliné sur sa base. Par Monsieur R. Lobatto, Professeur à l'École polytechnique à Delft. (Voir Tome 42. pag. 186. de ce journal.) . . . | II. | 235 |
| XVII. | Geometrischer Beweis des Satzes von Beltrami über die Relation zwischen dem Mittelpunkt des Kreises um ein ebenes Dreieck und den Mittelpunkten der vier Berührungskreise dieses Dreiecks. Von Herrn Carl Schmidt in Spremberg . . . . . | II. | 238 |

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| XVIII. | Beweis des von dem Herausgeber in T. XLII. H. II. S. 229. mitgetheilten geometrischen Satzes. Von Herrn Dr. am Ende in Langensalza | II. | 241 |
| XX. | Zwei Beweise des im ersten Hefte dieses Bandes (S. 102.) auf andere Art bewiesenen Beltramischen Satzes vom Dreiecke und ein Satz vom Viereck. Von Herrn Carl Schmitt, Hauptmann im k. k. Genie-Stabe und Professor der höheren Mathematik an der k. k. Genie-Akademie in Bruck bei Znaim . . . . . | III. | 290 |
| XXI. | Ueber den Kegelschnitt der neun Punkte und sein stereometrisches Seitenstück. Von Herrn Heinrich Gretschel, Lehrer an der Handelslehranstalt in Leipzig . . . . . | III. | 293 |
| XXV. | Beweis einiger geometrischen Sätze. Von Herrn Professor Dr. F. König, Oberlehrer am Kneiphöfschen Gymnasio zu Königsberg i. Pr. . . | III. | 345 |
| XXVI. | De locis geometricis punctorum in plano trianguli, quae singularia vocantur, annotationes factae a Dre. Christiano Fr. Lindman, Lect. Strengnesensi . . . . . | III. | 350 |
| XXVII. | Noch zu der Kugel der mittleren Krümmung des Ellipsoids. Von dem Herausgeber . . . | III. | 361 |
| XXVII. | Unmittelbarer und elementarer Beweis des Satzes von Beltrami (Archiv. Thl. XLII. S. 356). Von Herrn Professor Reuschle in Stuttgart. . | III. | 361 |
| XXVIII | Construction der Linien zweiter Ordnung aus ihrer allgemeinen Gleichung, und ein geometrischer Satz. Von Herrn Carl Schmitt, Hauptmann im k. k. Geniestabe, Professor der höheren Mathematik an der k. k. Genie-Akademie in Bruck bei Znaim . . . . . | IV. | 365 |
| XXXI. | Neue Entwickelung der Theorie des Maasses der Krümmung. Von dem Herausgeber . . . | IV. | 437 |
| XXXII. | Construction du carré dont les côtés passent par quatre points donnés. Par Monsieur Fasbender, Professeur à Thorn . . . . . | IV. | 472 |
| XXXV. | Auszug aus einem Briefe des Herrn Professor Eugenio Beltrami in Pisa an den Her- | | |

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| | ausgeber, betreffend die im Archiv mitgetheilten Beltrami'schen Sätze . . . . . | IV. | 481 |
| XXXV. | Ueber einen Satz Beltrami's vom Dreieck und über Nagel's Centralendreiecke. Von Herrn Professor Reuschle in Stuttgart . . . . | IV. | 483 |
| | **Trigonometrie.** | | |
| X. | Umformung der Formel der sphärischen Trigonometrie: $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$. Von dem Herausgeber . . . . . | I. | 119 |
| XXXIII. | Die Entwickelung der trigonometrischen Funktionen in unendliche Faktorenfolgen. Von Herrn Professor Dr. Dienger an der polytechnischen Schule in Carlsruhe . . . . . | IV. | 474 |
| XXXV. | Note sur les logarithmes des sinus et tangentes des petits angles. (Extrait du Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles. No. 52.). Par M. F. Burnier . . . . . | IV. | 487 |
| | **Geodäsie und praktische Geometrie überhaupt.** | | |
| XIX. | Ueber die geometrischen Principien des Zeichnens, insbesondere über die der Axonometrie. Aus den Vorlesungen über Anwendung der Geometrie auf die Künste gehalten im Jahre 1856 am Königl. technischen Institute zu Turin von Herrn Quintino Sella, Finanzminister des Königreichs Italien. (Deutsch von Maximilian Curtze, ordentlichem Lehrer am Königlichen Gymnasium zu Thorn.) . . . . . | III. | 245 |
| XXVII. | Noch zur Kugel der mittleren Krümmung des Ellipsoids. Von dem Herausgeber . . . . | III. | 361 |
| | **Mechanik.** | | |
| VII. | Ueber die Gleichgewichtslage, in der sich die Mittelpunkte der einbeschriebenen Kreise eines Dreiecks zum Mittelpunkte des umschriebenen Kreises desselben befinden. Von Herrn Ed. | | |

| Nr. der Abhandlung. | | Heft. | Seite. |
|---|---|---|---|
| | Jac. Noeggerath, Director der Königl. Provinzial-Gewerbeschule zu Brieg a. d. O. . . | I. | 89 |
| VIII. | Behandlung des ballistischen Problems mit Hülfe der hyperbolischen Functionen. Von Herrn Doctor W. Ligowski, Lehrer der Mathematik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und dem See-Cadetten-Institut in Berlin . . | I. | 92 |
| XI. | Elementare Ableitung der Haupteigenschaften der Kettenlinien. Von Herrn Heinrich Gretschel, Lehrer der Mathematik an der Handelslehranstalt in Leipzig . . . . . | II. | 121 |
| XIII. | Ueber das ballistische Problem, unter Voraussetzung eines der erlangten Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstandes. Von dem Herausgeber . . . . . | II. | 210 |
| XXIV. | Elementare Behandlung des ballistischen Problemes unter Voraussetzung eines der ersten Potenz der Geschwindigkeit direct proportionalen Luftwiderstandes. Von Herrn Heinrich Gretschel, Lehrer der Mathematik an der Handelslehranstalt in Leipzig. . . . . | III. | 341 |
| XXIX. | Ueber die allgemeine Theorie der Centralbewegung. Von dem Herausgeber . . . . . | IV. | 377 |
| | **Nautik.** | | |
| XXIII. | Zur Berechnung der Monddistanzen. Von Herrn Doctor W. Ligowski, Professor der Mathematik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und am See-Cadetten-Institut in Berlin . . . . . | III. | 335 |
| | **Literarische Berichte *).** | | |
| CLXIX. | . . . . . | I. | 1 |
| CLXX. | . . . . . | II. | 1 |
| CLXXI. | . . . . . | III. | 1 |
| CLXXII. | . . . . . | IV. | 1 |


*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

# I.

## Ein neuer Beweis des vom Herrn Oberlehrer Harnischmacher*) mitgetheilten Lehrsatzes über einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks.

(Archiv, Band XLII. S. 90.)

Von

Herrn *W. Mink*,

Oberlehrer in Crefeld.

Des leichteren Verständnisses wegen sei der Lehrsatz hier wiederholt:

*Lehrsatz.* Die Geraden, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Punkten verbinden, in welchen die gegenüberliegenden Seiten von den zugehörigen äusseren Berührungskreisen tangirt werden, schneiden sich in einem Punkte $T$, welcher mit dem Schwerpunkte $S$ und dem Centrum $O$ des inneren Berührungskreises in einer geraden Linie liegt, und zwar so, dass $TS = 2SO$ ist.

Beweis. Die Seiten $BC$, $AC$, $AB$ des Dreiecks $ABC$ (Taf. I. Fig. 1.) seien der Reihe nach mit $a$, $b$, $c$, ihre halbe Summe mit $s$ bezeichnet; ferner seien $P$, $Q$, $R$ die zugehörigen Berührungspunkte der äusseren Berührungskreise, also $AP$, $BQ$, $CR$ die im Satze bezeichneten Transversalen. Alsdann ist bekanntermassen**):

*) Ueber den ersten Erfinder dieses Satzes s. T. XLII. S. 352. G.

**) Siehe unter Andern Kramp, élémens de géométrie. p. 115 u. s. f. oder Förstemann, Lehrbuch der Geometrie, I. Theil. S. 140. u. s. f.

$$BP = s-c, \qquad CP = s-b,$$
$$CQ = s-a, \qquad AQ = s-c,$$
$$AR = s-b, \qquad BR = s-a.$$

Hieraus ergibt sich auf der Stelle:

$$BP.CQ.AR = CP.AQ.BR,$$

also schneiden sich jene Transversalen in einem Punkte.

Um nun zu zeigen, dass dieser Punkt $T$ mit dem Schwerpunkte $S$ und dem Mittelpunkte $O$ des eingeschriebenen Kreises in einer Geraden liegt, und dass $ST = 2SO$ ist, seien diese drei Punkte construirt und noch die Geraden $OS$, $TS$, $OD$, $DF$, wo $F$ die Mitte von $AT$ sein soll, ferner $CG$ parallel $AP$ bis zum Durchschnitt mit der verlängerten $BQ$ gezogen.

Da nun

$$BP = s-c = \frac{a+b-c}{2}, \quad BD = \tfrac{1}{2}a, \quad BE = \frac{ac}{b+c}$$

ist, so hat man

$$DP = BP - BD = \frac{a+b-c}{2} - \tfrac{1}{2}a = \frac{b-c}{2},$$

$$ED = BD - BE = \tfrac{1}{2}a - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)};$$

also

$$ED : DP = \frac{a(b-c)}{2(b+c)} : \frac{b-c}{2} = a : b+c.$$

Es ist aber auch

$$EO : OA = \frac{ac}{b+c} : c = a : b+c,$$

folglich

$$ED : DP = EO : OA,$$

daher $OD$ parallel $AP$.

Ferner ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken $ATQ$ und $QGC$, so wie $BGC$ und $BTP$:

$$AT : GC = AQ : QC,$$
$$GC : TP = BC : BP;$$

also

$$AT : TP = BC.AQ : QC.BP.$$

oder

$$AT:TP = a(s-c):(s-a)(s-c)$$
$$= a:s-a$$
$$= a:\frac{b+c-a}{2}.$$

Daher ist:

$$\tfrac{1}{2}AT:\tfrac{1}{2}AT+TP = \tfrac{1}{2}a:\tfrac{1}{2}a+\frac{b+c-a}{2},$$

oder

$$AF:FP = a:b+c;$$

mithin

$$ED:DP = AF:FP,$$

folglich $DF$ parallel $AE$.

Da demnach $AODF$ ein Parallelogramm, so ist $OD = AF = \frac{1}{2}AT$; es ist aber auch $SD = \frac{1}{2}AS$ und $\angle ODS = \angle SAT$, folglich Dreieck $ODS \sim TAS$. Daher ist $\angle OSD = \angle TSA$; es bilden mithin die Geraden $OS$ und $ST$ eine einzige Gerade und es ist $ST = 2OS$.

Zusatz. Zieht man noch durch $T$ und $D$ eine Gerade, bis sie die verlängerte $AE$ in $H$ trifft, sodann $BH$ und $CH$. so folgt aus dem vorhin Bewiesenen:

1) $TD = DH$,

2) $AH = 2FD = 2AO$, also $AO = OH$.

Es daher $BO$ eine Mittellinie des Dreiecks $ABH$, $OT$ eine Mittellinie des Dreiecks $ATH$ und $TD$ eine Mittellinie des Dreiecks $BTC$. Da sich nun $BC$ und $TH$ gegenseitig halbiren, so ist $BHCT$ ein Parallelogramm, und daher

3) $BH = CT$ und $CH = BT$.

Diese Relationen geben ein bequemes Mittel an die Hand, die Entfernungen des Punktes $T$ von den Ecken $A$, $B$ und $C$ des Dreiecks zu berechnen. Da nämlich im Dreieck $ABH$ bekannt ist: $AB = c$, $AO^2 = \frac{bc(s-a)}{s}$ und $BO^2 = \frac{ac(s-b)}{s}$ *), so erhält man durch Einsetzung dieser Werthe in die bekannte Gleichung

$$CT^2 = BH^2 = 2BO^2 + 2AO^2 - AB^2:$$

*) Förstemann a. a. O. p. 146.

$$CT^2 = 2\frac{ac(s-b)}{s} + 2\frac{bc(s-a)}{s} - c^2,$$

oder nach einigen Reductionen:

$$CT^2 = \frac{c}{s}\{(a-b)^2 + c(s-c)\},$$

und analog:

$$BT^2 = \frac{b}{s}\{(a-c)^2 + b(s-b)\},$$

$$AT^2 = \frac{a}{s}\{(b-c)^2 + a(s-a)\}.$$

Ist $a = b$, so verwandeln sich die vorstehenden Ausdrücke in.

$$AT^2 = \frac{a}{s}\{(a-c)^2 + \frac{ac}{2}\},$$

$$BT^2 = \frac{a}{s}\{(a-c)^2 + \frac{ac}{2}\},$$

$$CT^2 = \frac{c^2}{s}(s-c).$$

Im gleichschenkligen Dreiecke sind also die Entfernungen des Punktes $T$ von den Endpunkten der Grundlinie gleich, und es verhält sich das Quadrat seiner Entfernung von der Spitze zum Quadrate der Grundlinie, wie der Ueberschuss des halben Umfangs über die Grundlinie zum halben Umfang.

Ist $a = b = c$, so ergibt sich aus den obigen Gleichungen:

$$AT = BT = CT = a\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

wie dies auch sein muss, da im gleichseitigen Dreieck der Punkt $T$ mit dem Durchschnittspunkte der Höhen zusammenfällt.

Will man die Entfernungen des Punktes $T$ von den Ecken $A$, $B$ und $C$ durch den Radius $R$ des umschriebenen Kreises, den Radius $r$ des eingeschriebenen und die Winkel des Dreiecks ausdrücken, so hat man in die Gleichung

$$CT^2 = 2BO^2 + 2AO^2 - AB^2$$

die bekannten Ausdrücke (siehe Archiv Thl. XXXVI. S. 334.):

$$AO = 4R\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C, \quad BO = 4R\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}A,$$

so wie

$$AB = 4R\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C$$

einzusetzen und bei den Reductionen die Relationen zu benutzen, welche der Herausgeber des Archivs am Schlusse seiner Abhandlung über die Entfernungen der merkwürdigen Punkte des Dreiecks, Archiv Thl. XXXVI. S. 325. u. s. f. mitgetheilt hat. Man erhält auf diese Weise:

$$\begin{aligned}CT^2 &= 32R^2\sin\tfrac{1}{2}B^2\sin\tfrac{1}{2}C^2+32R^2\sin\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}A^2-16R^2\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}C^2\\ &= 16R^2\sin\tfrac{1}{2}C^2(2\sin\tfrac{1}{2}A^2+2\sin\tfrac{1}{2}B^2-\cos\tfrac{1}{2}C^2)\\ &= 16R^2\sin\tfrac{1}{2}C^2(2\sin\tfrac{1}{2}A^2+2\sin\tfrac{1}{2}B^2+2\sin\tfrac{1}{2}C^2-1-\sin\tfrac{1}{2}C^2)\\ &= 16R^2\sin\tfrac{1}{2}C^2(2-4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C-1-\sin\tfrac{1}{2}C^2)\\ &= 16R^2\sin\tfrac{1}{2}C^2(\cos\tfrac{1}{2}C^2-4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)\\ &= 4R^2\sin C^2-16Rr\sin\tfrac{1}{2}C^2.\end{aligned}$$

Folglich ist analog:

$$BT^2 = 4R^2\sin B^2 - 16Rr\sin\tfrac{1}{2}B^2$$

und

$$AT^2 = 4R^2\sin A^2 - 16Rr\sin\tfrac{1}{2}A^2.$$

Wenn $A=B$, so wird offenbar $AT^2=BT^2$, also $AT=BT$ und

$$CT^2 = 4R^2\sin 2A^2 - 16Rr\cos A^2.$$

Wenn $A=B=C$, so geben die obigen Gleichungen:

$$AT=BT=CT=R,$$

wie es auch sein muss.

Auch die Entfernung $OT$ lässt sich mit Hülfe des oben Bewiesenen finden. Zu dem Ende ist nach bekannten Sätzen:

$$\begin{aligned}2OT^2 &= AT^2+TH^2-2AO^2\\ &= AT^2+2BT^2+2CT^2-BC^2-2AO^2\\ &= 2AT^2+2BT^2+2CT^2-AT^2-BC^2-2AO^2,\end{aligned}$$

also

$$OT^2 = AT^2+BT^2+CT^2-\tfrac{1}{2}AT^2-\tfrac{1}{2}BC^2-AO^2,$$

oder durch Einsetzung der entwickelten Ausdrücke:

$$\begin{aligned}OT^2 &= 4R^2(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2)-16Rr(\sin\tfrac{1}{2}A^2+\sin\tfrac{1}{2}B^2+\sin\tfrac{1}{2}C^2)\\ &\quad -4R^2\sin A^2+8Rr\sin\tfrac{1}{2}A^2-16R^2\sin\tfrac{1}{2}B^2\sin\tfrac{1}{2}C^2.\end{aligned}$$

Die beiden ersten Glieder dieses Aggregats sind symmetrisch

und verwandeln sich mit Hülfe der Relationen der oben angeführten Abhandlung des Herrn Herausgebers leicht in

$$8(R-r)^2+8R^2\cos A\cos B\cos C.$$

Ich setze der Kürze wegen diesen Theil gleich $M$ und bilde, um auch die drei letzten Glieder des Aggregats umzuformen, durch gehörige Vertauschung der Buchstaben die folgenden drei Gleichungen:

$$OT'^2 = M-4R^2\sin A^2+8Rr\sin\tfrac{1}{2}A^2-16R^2\sin\tfrac{1}{2}B^2\sin\tfrac{1}{2}C^2,$$

$$OT'^2 = M-4R^2\sin B^2+8Rr\sin\tfrac{1}{2}B^2-16R^2\sin\tfrac{1}{2}A^2\sin\tfrac{1}{2}C^2,$$

$$OT'^2 = M-4R^2\sin C^2+8Rr\sin\tfrac{1}{2}C^2-16R^2\sin\tfrac{1}{2}A^2\sin\tfrac{1}{2}B^2.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
3OT'^2 &= 3M-4R^2(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2)\\
&\quad +8Rr(\sin\tfrac{1}{2}A^2+\sin\tfrac{1}{2}B^2+\sin\tfrac{1}{2}C^2)\\
&\quad -16R^2(\sin\tfrac{1}{2}A^2\sin\tfrac{1}{2}B^2+\sin\tfrac{1}{2}A^2\sin\tfrac{1}{2}C^2+\sin\tfrac{1}{2}B^2\sin\tfrac{1}{2}C^2)\\
&= 3M-8R^2(1+\cos A\cos B\cos C)\\
&\quad +8Rr(1-2\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)\\
&\quad -8R^2(\sin\tfrac{1}{2}A^2+\sin\tfrac{1}{2}B^2+\sin\tfrac{1}{2}C^2)^2\\
&\quad +8R^2(\sin\tfrac{1}{2}A^4+\sin\tfrac{1}{2}B^4+\sin\tfrac{1}{2}C^4)\\
&= 3M-8R^2-8R^2\cos A\cos B\cos C\\
&\quad +8Rr-4r^2\\
&\quad -8R^2(1-2\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2\\
&\quad +8R^2\left\{\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos B}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos C}{2}\right)^2\right\}\\
&= 3M-8R^2-8R^2\cos A\cos B\cos C\\
&\quad +8Rr-4r^2\\
&\quad -8R^2+8Rr-2r^2\\
&\quad +4R^2-4Rr-4R^2\cos A\cos B\cos C\\
&= 3M-12R^2+12Rr-6r^2-12R^2\cos A\cos B\cos C;
\end{aligned}$$

folglich:

$$OT^2 = M - 4R^2 + 4Rr - 2r^2 - 4R^2\cos A\cos B\cos C$$
$$= M - 2R^2 + 4Rr - 2r^2 - 2R^2 - 4R^2\cos A\cos B\cos C$$
$$= M - 2(R-r)^2 - 2R^2(1 + 2\cos A\cos B\cos C),$$

und schliesslich, wenn man für $M$ seinen Werth setzt.

$$OT^2 = 8(R-r)^2 + 8R^2\cos A\cos B\cos C - 2(R-r)^2 - 2R^2(1 + 2\cos A\cos B\cos C)$$
$$= 6(R-r)^2 - 2R^2(1 - 2\cos A\cos B\cos C),$$

in Uebereinstimmung mit dem bekannten Resultate.

## II.

## Lösung der Thl. XLII. S. 80. ff. behandelten geometrischen Aufgabe durch Zurückführung auf eine Dreiecksconstruction.

Von

Herrn *Carl Schmidt*

in Spremberg.

Das Archiv bringt in Thl. XLII. Heft 1. unter Nr. VII. die geometrische und algebraische Auflösung einer Aufgabe, die gewiss vielseitiges Interesse erregt haben wird. Die Aufgabe selbst, imgleichen ihre algebraische Lösung, ist, wie sich bei derselben angeführt findet, den in Graz 1853 erschienenen Materialien zum Gebrauche bei und nach dem Unterrichte in der höheren Analysis von Joh. Rogner entnommen, woselbst sie als Nr. 657.

erscheint. Hiernach darf man mit Recht vermuthen, dieselbe werde einer geometrischen Lösung Schwierigkeiten bieten. Der Reiz, eine solche ohne Kenntnissnahme der mitgetheilten Lösung auf dem Wege der geometrischen Analysis aufzufinden, wird noch dadurch erhöhet, dass der gegebenen Lösung eine geometrische Analysis nicht vorangestellt ist. Indem ich die Aufgabe in diesem Sinne eingehender behandelte, boten sich mir einige merkwürdige Relationen dar, die an sich schon — etwa in der Gestalt von Lehrsätzen — Beachtung verdienen, für die gegebene Aufgabe aber eine ganz leichte Auflösung vermitteln, indem sie dieselbe auf die Construction eines Dreiecks aus Grundlinie, Seitendifferenz und (rechtem) Winkel an der Spitze reduciren. Mehr um jener Relationen willen, als der Lösung selber wegen, theile ich das Folgende mit, da die vom Herrn Oberst von Dewall gegebene Auflösung der meinigen an Eleganz und Geschlossenheit voransteht und, trotzdem die Figur dem oberflächlichen Blicke complicirt erscheinen könnte, doch einfach ist. Der Bequemlichkeit wegen schreibe ich die Aufgabe hier noch einmal nieder, wie sie aus Rogner entnommen ist.

In dem Durchmesses $AB$ (Taf. I. Fig. 2) eines Halbkreises, dessen Mittelpunkt $C$ ist, ist ein Punkt $P$ gegeben: man soll in $AB$, zwischen $A$ und $P$, einen solchen Punkt $Q$ bestimmen, dass, wenn man von $Q$ aus mit $QP$ in der Fläche des gegebenen Halbkreises einen neuen Halbkreis beschreibt und an diesen von $A$ aus eine Tangente $AH$ zieht, das Segment $GH$ derselben, welches zwischen dem Berührungspunkte $G$ und dem Umfange des gegebenen Halbkreises liegt, gleich dem Segmente $PB$ ist.

Die Aufgabe lässt sich auch folgendermassen einkleiden:

Ueber einer gegebenen festliegenden Hypotenuse $AB$, in welcher der Punkt $P$ bestimmt ist, soll ein rechtwinkliges Dreieck construirt und dazu in der Hypotenuse ein Punkt $Q$ bestimmt werden, so dass die Parallele $QG$ mit der Kathete $BH$ dem Hypotenusenabschnitt $QP$, der Kathetenabschnitt $GH$ aber dem Hypotenusenabschnitt $PB$ gleich werde.

Geometrische Analysis. Angenommen, $Q$ sei der gesuchte Punkt in der Hypotenuse $AB$ und $ABH$ das verlangte rechtwinklige Dreieck, also die Parallele $QG =$ dem Abschnitt $QP$ und $GH = PB$.

Wenn man $QT$ parallel $GH$ legt, so ist:

$$TH = QG \qquad (1)$$

und $QT = GH$. Wenn man ferner $QA$ auf $BT$ von $B$ aus als $BU$ abschneidet, so dass

$$BU = QA \qquad (2)$$

wird, und von $U$ auf $AB$ die Senkrechte $UV$ fällt, so ist $\Delta BUV \cong \Delta QAG$, also $BV = QG$ und $VU = GA$. Da nun

$$BQ = BP + PQ = GH + QG \text{ angenommen und}$$

$$BV = QG \text{ erwiesen ist, so bleibt}$$

$$BQ - BV = QV = GH,$$

also auch

$$QV = QT.$$

Wenn man nun $QU$ zieht, so ist $\Delta UQV \cong UQT$, also $UV = UT$, und da $UV = GA$ erwiesen, so ergibt sich auch

$$UT = GA. \qquad (3)$$

Fasst man nun (1), (2) und (3) zusammen, so ist

$$TH + BU + UT = QG + QA + GA,$$

d. h. die Kathete $BH$ ist gleich der Summe der drei Seiten des durch die Parallele $QG$ abgeschnittenen Dreiecks $QAG$.

Setzt man jetzt in der Summe der drei Seiten statt des Summanden $QG$ wiederum $QP$ ein, so ergiebt sich

$$BH = QP + QA + GA = AP + GA,$$

für die Kathete $AH = GH + GA$ ergiebt sich aber, wenn man statt des Summanden $GH$ gleichfalls nach der Annahme $BP$ einsetzt:

$$AH = BP + GA.$$

Bezeichnen wir endlich die gegebenen Segmente $BP$ mit $a$ und $AP$ mit $b$, so ist:

$$BH = b + GA$$

und

$$AH = a + GA.$$

Der Unterschied der beiden Dreiecksseiten $BH$ und $AH$ ist also $= b - a$ und mithin bekannt. Man hat demnach zur Construction des Dreiecks $ABH$ die Grundlinie $= a + b$, die Seitendifferenz $= b - a$ und den rechten Winkel an der Spitze.

**Auflösung.** Man construire über $AB$ (Taf. I. Fig. 3.) dem schon gegebenen Halbkreise, der den rechten Winkel fas einen Kreisbogen, der einen Peripheriewinkel von anderthalb Rec ten aufnimmt, schneide von $B$ aus die Differenz $b-a=B$ als Sehne $BX$ dieses Kreisbogens ein, verlängere $BX$ bis zu Durchschnittspunkt $H$ mit dem Halbkreise, ziehe $HA$, mac $HG=BP=a$ und ziehe $GQ$ parallel mit $HB$, so ist $Q$ d verlangte Punkt (der Mittelpunkt des Kreises, der durch $P$ ge und die Sehne $AH$ als seine Tangente in $G$ berührt).

**Beweis.** $HG$ ist $=BP=a$ gemacht worden, und $QG$ ste als Parallele mit $BH$ senkrecht auf $AH$. Es bleibt also n noch zu beweisen, dass $QG=QP$ ist.

$AB$ ist $=a+b$, $AH=a+AG$ und $BH=BX+XH$ $b-a+XH$. Das Dreieck $AHX$ ist bei $H$ rechtwinklig, und d Winkel bei $X$ ist als Nebenwinkel eines Peripheriewinkels v anderthalb Rechten gleich einem halben Rechten, der Wink desselben Dreiecks $AHX$ bei $A$ ist also auch gleich einem h ben Rechten und das Dreieck selbst gleichschenklig auf $A$ also $XH=AH=a+AG$. Hiernach ist $BH=b-a+a+A$ $=b+AG$. Im rechtwinkligen Dreieck $ABH$ ist

$$AB^2=AH^2+BH^2,$$

da nun

$$AB=a+b,$$
$$AH=a+AG,$$
$$BH=b+AG$$

ist, so ergiebt sich:

$$a^2+2ab+b^2=a^2+2a.AG+AG^2+b^2+2b.AG+AG^2,$$
$$ab=(a+b).AG+AG^2,$$
$$ab=AG.(a+b+AG).$$

Es verhält sich also

$$AG:a=b:a+b+AG$$

oder

$$AG:GH=AP:PB+BH.$$

Wird nun $BY=BH$ gemacht und $HY$ und $GP$ gezogen, sind wegen der Proportion $AG:GH=AP:PY$ die Linien $G$ und $HY$ parallel, also die Dreiecke $GPQ$ und $HYB$ ähnlic und da letzteres gleichschenklig auf $HY$ ist, auch ersteres gleic schenklig auf $GP$, es ist also $QG=GP$.

Anmerkung 1. Eine Discussion der verschiedenen Fälle der Aufgabe ist bereits in der Behandlung derselben im Archiv Thl. XLII. Nr. VII. durchgeführt worden und kann darum hier unterbleiben. Nur das sei bemerkt, dass für die Lage des Punktes $P$ zwischen $A$ und dem Kreismittelpunkt $C$, für welche die Seitendifferenz $b-a$ negativ wird, bei der Construction die positive Differenz $a-b=BW'$ (Taf. I. Fig. 4.) im Supplementsbogen zu dem Kreisbogen von anderthalb Rechten als Sehne $BX'$ einzuschneiden ist. Eine für diesen Fall besonders angelegte geometrische Analysis giebt an die Hand, statt der früheren Differenz $b-a=BX$ von $B$ aus hier die Differenz $a-b=AX''$ von $A$ aus als Sehne in demselben Kreisbogen für anderthalb Rechte einzuschneiden. Beide Constructionen ($a-b$ als Sehne $BX'$ im Supplementsbogen, oder $a-b$ als Sehne $AX''$ im Bogen selbst) ergeben sich als wesentlich einerlei. Dass für die Lage $P$ in $C$ die Seitendifferenz ($b-a=a-b=0$) verschwindet, das Dreieck $ABH$ also gleichschenklig wird, fällt sofort in die Augen *).

Anmerkung 2. In den einleitenden Worten ist auf die Relationen aufmerksam gemacht worden, die sich aus näherer Betrachtung des verlangten Dreiecks $ABH$ mit seinem Punkte $Q$ ergeben und die Lösung der Aufgabe durch Reduction vermitteln. In der geometrischen Analysis selbst ist bereits die merkwürdigste dieser Relationen durch gesperrte Schrift hervorgehoben. Es soll nun noch zum Schluss das kleine System von Sätzen aufgestellt werden, das alle diese Relationen umfasst.

I. Aufgabe. In einem gegebenen Dreieck $ABH$ (Taf. I. Fig. 5.) eine zwei Seiten schneidende Parallele $QG$ mit der dritten Seite $BH$ so zu legen, dass die Seitensumme des abgeschnittenen Dreiecks $AQG$ gleich der dritten Seite $GH$ werde.

Man ziehe die winkelhalbirenden Transversalen, schneide $RS$ als $AT$ ab und lege $QG$ durch $T$ parallel mit $BH$ u. s. f., wie bekannt.

---

*) Werden die Beschränkungen, die der Rogner'schen Aufgabe beigegeben sind ($P$ nur im Durchmesser selbst, nicht in den Verlängerungen desselben, $Q$ zwischen $A$ und $P$, $GH$ Segment der Kathete selbst, nicht auch ihrer Verlängerungen, das Dreieck $ABH$ im gegebenen Halbkreise, nicht in der andern Hälfte des vollständigen Kreises) aufgehoben, so ergeben sich mehr Fälle — im Ganzen eilf — und mehr Lösungen in der Mehrzahl derselben — zwei oder genauer genommen drei. —

Die Behandlung der Aufgabe verspricht der Verfasser, wenn dieselbe auf Interesse rechnen darf, in einem der nächsten Hefte.

2. Lehrsatz. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck $ABH$ (Taf. I. Fig. 2.) eine Parallele $QG$ mit der Kathete $BH$ so gelegt ist, dass die Seitensumme des abgeschnittenen Dreiecks $AQG$ gleich der gegenüberliegenden Kathete $BH$ ist, so ist das Hypotenusenstück $BQ$ gleich der Summe des gegenüberliegenden Kathetenstücks $GH$ und der Parallele $QG$.

Der Beweis lässt sich ganz nach Analogie mit dem ersten Theile der geometrischen Analysis führen.

3. Lehrsatz. (Converse zu 2). Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck $ABH$ eine Parallele $QG$ mit der Kathete $BH$ so gelegt ist, dass das Hypotenusenstück $BQ$ gleich der Summe des gegenüberliegenden Kathetenstücks $GH$ und der Parallele $QG$ ist, so ist die Seitensumme des abgeschnittenen Dreiecks $AQG$ gleich der gegenüberliegenden Kathete $BH$.

Der Beweis stimmt völlig überein mit dem ersten Theil der geometrischen Analysis.

Die beiden Lehrsätze 2. und 3. lassen sich auch folgendermassen aussprechen:

Wenn in der Hypotenuse $AB$ (Taf. I. Fig. 6.) eines rechtwinkligen Dreiecks $ABH$ ein Punkt $Q$ so liegt, dass die Parallelen $QG$ und $QT$ mit den beiden Katheten letztere in der Art schneiden, dass für die sechs entstehenden Seitenabschnitte — dieselben vom Theilpunkt $Q$ der Hypotenuse aus nach der einen oder der anderen Richtung ringsherum mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet — der Bedingung entsprechen:

$$1+2=5,$$

so folgt

$$3+4=6,$$

und umgekehrt.

Die Sätze 2. und 3. lassen sich auch durch Rechnung also beweisen.

Man ziehe in dem Dreieck $ABH$ noch die Parallele $QT$ mit $AH$ und nenne die sechs Seitenabschnitte vom Theilungspunkte $Q$ der Hypotenuse ausgehend der Reihe nach $l$, $m$, $n$, $p$, $q$, $r$.

Im ersten Lehrsatz wird vorausgesetzt $l+m+p=p+q$, also

$$l+m=q.$$

**Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke I. und II. ist** $l = \frac{pr}{q}$ **und** $n = \frac{np}{q}$, **also ist nach der Voraussetzung:**

$$\frac{pr}{q} + \frac{np}{q} = q,$$

$$p(r+n) = q^2 = r^2 - n^2 = (r+n)(r-n),$$

$$p = r - n,$$

$$n + p = r.$$

**Im zweiten Lehrsatz wird vorausgesetzt:**

$$r = n + p.$$

**Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke II. und I. ist** $r = \frac{lq}{p}$ **und** $n = \frac{mq}{p}$, **also ist nach der Voraussetzung**

$$\frac{lq}{p} = \frac{mq}{p} + p,$$

$$q(l-m) = p^2 = l^2 - m^2 = (l+m)(l-m),$$

$$q = l + m,$$

$$p + q = l + m + p.$$

# III.

## Ueber die Linien, welche die Tangenten einer Curve unter constantem Winkel schneiden.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

### I.

**Wenn man von einem Punkte einer Curve (*a*) aus beliebig viele Linien zieht, wovon jede sämmtliche Tangenten von (*a*) unter einem constanten Winkel durchkreuzt, so liegen die Krümmungsmittelpunkte dieser Linien, welche den Durchschnittspunkten derselben mit einer Tangente von (*a*) entsprechen, auf der Normale von (*a*).**

In Taf. I. Fig. 7. sei $Att'$ eine Linie, welche die Tangenten der Curve (*a*) oder $Anm'$ unter dem Winkel $\alpha$ durchkreuzt; $tn$ und $t'n'$ sind Normalen von $Att'$. Wegen der Gleichheit der Winkel bei $t$ und $t'$ ist $tqpt'$ ein Kreisviereck, welches bei unendlicher Annäherung der Punkte $m'$ an $m$ oder $t'$ an $t$ in einen Kreis übergeht, dessen Durchmesser $tn$ ist, weil dieser Kreis durch $m$ geht und also den rechten Winkel bei $m$ enthalten muss. Hieraus geht hervor, dass $n$ der Krümmungsmittelpunkt von $t$ ist u. s. f.

Da die Winkel bei $n$ und $n'$ ebenfalls $= \alpha$ sind und die Curve $nn'$ die Evolute von $Att'$ ist, so folgt weiter hieraus:

**Die Evoluten derjenigen Linien, welche die Tangenten einer Curve unter constantem Winkel durch-**

kreuzen, schneiden ihrerseits die Normalen dieser Curve unter demselben constanten Winkel.

Man ziehe durch den Krümmungsmittelpunkt $a$ der gegebenen Curve eine Gerade senkrecht auf $am$, welche die Normale der Curve $nn'$ in $o$ schneidet, so lässt sich auf analoge Art schliessen, dass $o$ der Krümmungsmittelpunkt von $nn'$ ist. Hieraus folgt die Gleichung:

$$am = nt.\cos\alpha + on.\sin\alpha,$$

oder, wenn wir die Krümmungshalbmesser $am$, $nt$, $on$ mit $\varrho$, $\varrho'$, $\varrho''$ bezeichnen:

1) $$\varrho = \varrho'\cos\alpha + \varrho''\sin\alpha.$$

Die Contingenzwinkel bei $p$, $t$, $q$ sind alle unter einander gleich; bezeichenen wir also die Bogenelemente in diesen Punkten mit $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\sigma''$, so ist:

$$\varrho : \varrho' : \varrho'' = d\sigma : d\sigma' : d\sigma'',$$

also nach 1):

$$d\sigma = d\sigma'\cos\alpha + d\sigma''\sin\alpha,$$

oder durch Integration, da $\alpha$ constant ist:

2) $$\sigma = \sigma'\cos\alpha + \sigma''\sin\alpha,$$

indem man sich durch Zurückgehen auf den Punkt $A$ leicht vergewissern kann, dass die Constante gleich 0 ist. $\sigma$ ist die Länge der gegebenen Curve $Am$, $\sigma'$ ist die Länge des Bogens $At$ von der die Tangenten unter dem Winkel $\alpha$ durchkreuzenden Linie und $\sigma''$ ist die Länge des Bogens $An$ der die Normalen unter dem Winkel $\alpha$ durchschneidenden Curve.

Betrachten wir dagegen die Curve $At$ als gegeben, und mithin auch ihre Evolute $An$, so kann man die Curve $Am$ als die Enveloppe aller derjenigen Geraden ansehen, welche durch die einzelnen Punkte von $At$ unter constantem Winkel $\alpha$ mit den Tangenten (oder Normalen) gezogen sind. Für jeden besondern Werth von $\alpha$ erhält man wieder eine andere Curve $Am$. Die Endpunkte $m$ dieser Enveloppen liegen auf dem Kreis, dessen Durchmesser $tn$ ist. Die Normalen in den Endpunkten $m$ gehen sämmtlich durch den Punkt $n$; und die Krümmungsmittelpunkte $a$, welche diesen Endpunken entsprechen, liegen auf dem Kreis, dessen Durchmesser $on$ ist. Wir haben nun folgenden Satz:

Auf einer Curve sind zwei feste Punkte gegeben; durch alle Punkte der Curve zwischen denselben ziehe

man Gerade, welche mit den Tangenten einen constanten Winkel $\alpha$ bilden, so haben die Enveloppen dieser Geraden, wovon jede einem bestimmten Werth von $\alpha$ entspricht, folgende Eigenschaften:

a) Ihre Endpunkte liegen auf einem Kreise, dessen Durchmesser der Krümmungshalbmesser im Endpunkte der gegebenen Curve ist;

b) die ihren Endpunkten entsprechenden Krümmungsmittelpunkte liegen ebenfalls auf einem festen Kreise, dessen Durchmesser der Krümmungshalbmesser im Endpunkte der Evolute der gegebenen Curve ist;

c) ihre Längen $\sigma$ entsprechen der Gleichung:

$$\sigma = \sigma' \cos\alpha + \sigma'' \sin\alpha,$$

in welcher $\sigma'$ und $\sigma''$ die constanten Bogen der gegebenen Curve und ihrer Evolute sind.

## II.

### Schneiden sich die auf einander folgenden Flächennormalen, deren Fusspunkte auf einer Krümmungslinie liegen?

Wenn man durch alle Punkte einer Krümmungslinie die Normalen der Fläche zieht, so bilden diese eine entwickelbare Fläche, und sind also, wie die geradlinigen Erzeugenden jeder entwickelbaren Fläche, die Tangenten einer doppelt gekrümmten Curve, welche die Rückkehrkante (arête de rebroussement) der entwickelbaren Fläche genannt wird. Diese doppelt gekrümmte Curve ist eine geodätische Linie auf der Fläche der Krümmungsmittelpunkte. Sobald man also zugibt — und wer sollte diess nicht? — dass die auf einander folgenden Tangenten einer doppelt gekrümmten Curve sich schneiden (die Durchschnittspunkte sind die Punkte der Curve), so muss man auch zugeben, dass die Flächennormalen, deren Fusspunkte auf einer Krümmungslinie liegen, sich schneiden. $A$ und $B$ seien zwei Punkte auf einer beliebigen Curve einer Fläche, $Aa$ und $Bb$ die Normalen der Fläche, und zwar sollen $a$ und $b$ diejenigen Punkte der Normalen sein, welche ihre kürzeste Entfernung angeben. Bei unendlicher Annäherung der Punkte $A$ und $B$ bilden die sämmtlichen auf einander folgenden

Flächennormalen $Aa$, $Bb$, $Cc$, ...., deren Fusspunkte auf der Curve $ABC$.... liegen, eine windschiefe Fläche, deren Striktionslinie (ligne de striction) $abc$.... ist; diese Linie wird von sämmtlichen Normalen, den Erzeugenden der entwickelbaren Fläche, geschnitten, und zwar unter einem von Null verschiedenen Winkel, der bis 90° steigen kann; das Verhältniss der beiden unendlich kleinen Linien $\frac{ab}{AB}$ oder $\frac{bc}{BC}$ hat einen von Null verschiedenen, aber zwischen 0 und 1 liegenden Werth. Ist dagegen $ABC$.... eine Krümmungslinie auf der Fläche, so ist von keiner windschiefen Fläche und von keiner Striktionslinie mehr die Rede, sondern die Normalen $Aa$, $Bb$, $Cc$,.... sind die Tangenten der doppelt gekrümmten Curve $abc$...., und die Grenze des Verhältnisses $\frac{ab}{AB}$, $\frac{bc}{BC}$ ist $=0$, nun nicht mehr ein zwischen 0 und 1 liegender Bruch. Wir haben also folgende Charaktere:

$$\text{für Nicht-Krümmungslinien: } \lim\frac{ab}{AB}>0 \text{ und } <1,$$

$$\text{für Krümmungslinien: } \lim\frac{ab}{AB}=0.$$

Hiernach modificirt sich die Ansicht von Moigno (34. Theil des Archivs, Seite 230), welche übrigens auf eine ältere, tief im Unendlichkleinen steckende, und die Grenzverhältnisse nicht gehörig beachtende Abhandlung Poisson's (Journal de l'école polytechnique, cah. 21., p. 205) zu basiren scheint.

## IV.

# Ueber die Winkelsumme in Dreiecken, gebildet aus Linien des Systems (*a*) oder aus geodätischen Linien.

Von

Herrn Doctor *O. Böklen*,

in Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

---

Wenn man die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser = 1, in 720 gleiche Theile theilt, so ist die Anzahl solcher Theile, welche eine sphärische Figur enthält, ihr Inhalt. Theilt man einen grössten Kreis einer Kugel in 360 gleiche Theile oder Grade, so ist die Anzahl solcher Theile, welche eine sphärische Linie enthält, ihre Länge, oder bei einer geschlossenen sphärischen Linie ihr Umfang. Diess vorausgesetzt, haben wir folgenden Satz:

I. Der Inhalt einer sphärischen Figur, vermehrt um den Umfang ihrer Polarfigur, ist = 360, oder umgekehrt, der Umfang der ersteren plus dem Inhalt der letzteren ist = 360.

Wir nehmen zunächst an, die sphärische Figur habe keine einspringenden Theile.

Der Pol eines grössten Kreises ist der Endpunkt des auf demselben senkrechten Kugelhalbmessers. Die Pole sämmtlicher grössten Kreise, welche eine sphärische Figur berühren, bilden die Polarfigur. Bezeichnet man die Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks, d. h. die Anzahl Grade, welche die drei Winkel zusammen enthalten, mit $s$, so ist dessen Inhalt $= s - 180$; theilt ein sphärisches Vieleck durch Bögen grösster Kreise, die von einer Ecke ausgehen, in $n-2$ Dreiecke, so ist demgemäss dessen Inhalt

$$= S - (n-2).180;$$

mit $S$ bezeichnen wir die Winkelsumme des Vielecks. *ABCDE*...

sei das Vieleck; ein grösster Kreis bewege sich so, dass er nach und nach durch alle Seiten des Vielecks geht, oder sich nach und nach um alle Ecken desselben dreht. Beim Uebergang von der Seite $AB$ zur Seite $BC$, oder bei der Drehung um die Ecke $B$, beschreibt z. B. der Pol des grössten Kreises einen Bogen, dessen Länge $= 180 - B$ Grade ist; wenn der grösste Kreis sich um alle Ecken gedreht hat und wieder in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, so hat der Pol das Polar-Vieleck beschrieben, dessen Umfang somit

$$= n \,.\, 180 - (A + B + C \ldots) = n \,.\, 180 - S$$

ist.

Wir erhalten also für die Summe des Inhalts eines sphärischen Vielecks und des Umfangs seines Polar-Vielecks die Zahl

$$S - (n-2) \,.\, 180 + n \,.\, 180 - S = 360.$$

Dieser Satz gilt, wie gross auch $n$ ist; beschreibt man also in eine sphärische Figur ein Vieleck von unendlich vielen Seiten, so gilt er für dasselbe oder für die Figur selbst. Somit ist der erste Theil des Satzes I. bewiesen; die Umkehrung folgt daraus, dass eine sphärische Figur die Polarfigur ihrer eigenen Polarfigur ist.

Wenn aber das aus Bögen grösster Kreise gebildete Vieleck auf der Kugel einspringende Winkel hat, so gilt die vorstehende Beweisführung ebenfalls, nur muss derjenige Theil des Umfangs der Polarfigur, welcher durch eine rückläufige Bewegung des Pols erzeugt wird, subtraktiv genommen werden. Wir wollen annehmen, $ABCDEFG$ sei das Vieleck und $E$ der einspringende Winkel. Während sich der nach und nach durch alle Seiten gehende grösste Kreis um die Nebenwinkel von $A$, $B$, $C$, $D$ dreht, geschieht die Drehung immer in gleichem Sinne, z. B. von rechts nach links (man denke sich so in der Richtung von den durch die Ecken $A$, $B$, $C$..., gehenden Kugelhalbmessern stehend, dass die Füsse im Mittelpunkte der Kugel sind, der Kopf in den Ecken $A$, $B$... und dass man mit dem Gesicht gegen den Pol des grössten Kreises gekehrt ist). In der Ecke $E$, beim Uebergang von der Seite $DE$ zur Seite $EF$ dreht sich der grösste Kreis von links nach rechts um einen Winkel $= E - 180$ und der Pol macht also eine rückläufige Bewegung; in $F$ und $G$ findet dagegen wieder wie früher eine Drehung von rechts nach links statt. Betrachten wir nun denjenigen Theil des Umfangs der Polarfigur, wo der Pol eine rückläufige Bewegung gemacht hat, als negativ, so haben wir für diesen Umfang

$$6 \,.\, 180 - (A + B + C + D + F + G) - (E - 180) = 7 \,.\, 180 - S,$$

wenn $S$ die Summe der Vieleckswinkel ist. Der Inhalt des Vielecks ist wie oben $= S - 5.180$; somit ist, wie oben, die Summe des Inhalts und des Umfangs der Polarfigur $= 360$. Wenn das Vieleck ausser $E$ noch mehrere einspringende Winkel enthielte, so würden bei jedem derselben die gleichen Schlussfolgerungen zu ziehen sein. Ist die sphärische Figur krummlinig mit einspringenden Theilen, so gilt der Satz 1. unter der Voraussetzung, dass beim Umfang der Polarfigur diejenigen Theile, welche der Pol in rückläufiger Bewegung beschrieben hat, subtraktiv genommen werden.

Gegeben ist eine beliebige Linie auf irgend einer Fläche. Wir ziehen durch jeden Punkt der Linie erstens die Flächen-Normale, zweitens die konjugirte Tangente der Linie (Durchschnitt der durch zwei unendlich nahe Punkte der Linie gehenden Tangential-Ebenen); wir ziehen ferner mit allen Flächen-Normalen sowie mit allen konjugirten Tangenten parallele Kugelhalbmesser, so erhalten wir zwei sphärische Figuren, wovon die Eine die Polarfigur der andern ist; somit haben wir folgenden Satz:

2. Der Inhalt der den Flächen-Normalen einer Linie auf einer Fläche korrespondirenden sphärischen Figur, vermehrt um den Umfang der den konjugirten Tangenten dieser Linie korrespondirenden sphärischen Figur, ist gleich 360, und umgekehrt, der Umfang der ersteren plus dem Inhalt der letzteren ist gleich 360. Wenn die erste sphärische Figur einspringende Theile hat, so sind die, durch eine rückläufige Bewegung des Pols entstandenen Theile vom Umfang der Polarfigur subtraktiv zu nehmen.

Der Umfang der den konjugirten Tangenten einer Linie auf einer Fläche korrespondirenden sphärischen Figur ist gleich der Summe der Drehungswinkel, welche die konjugirte Tangente beschreibt, wenn sie nach und nach über alle Punkte der Linie auf der Fläche kommt. Sind nämlich $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ unendlich nahe Punkte einer solchen Linie, so sind, wie bekannt, $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta \ldots$ Tangenten-Richtungen. Die konjugirte Tangente des Elements $\alpha\beta$ ist der Durchschnitt von zwei Ebenen, welche die Fläche in $\alpha$ und $\beta$ berühren; dieser Durchschnitt steht also senkrecht auf derjenigen Ebene, welche den beiden durch $\alpha$ und $\beta$ gehenden Flächen-Normalen parallel ist. Ebenso ist die konjugirte Tangente von $\beta\gamma$ der Durchschnitt von zwei Ebenen, welche die Fläche in $\beta$ und $\gamma$ berühren u. s. w. Bewegt sich nun eine Gerade so, dass sie nach und nach mit allen konjugirten Tangenten der Elemente $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$ u. s. w.

zusammentrifft, so ist die Summe der Drehungswinkel, welche sie bei dieser Bewegung beschreibt, gleich dem Umfange der den konjugirten Tangenten der Linie $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ korrespondirenden sphärischen Figur. Die Summe dieser Drehungswinkel lässt sich nun in zwei speziellen Fällen leicht bestimmen.

## §. 1. Die Linien des Systems (α).

Solche Linien auf den Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die durch ihre einzelnen Punkte gehenden Flächen-Normalen Einer Ebene parallel sind, nenne ich, wie früher*), Linien des Systems (α) oder bloss Linien (α). Nach dem Obigen ist also die den Flächen-Normalen einer Linie (α) korrespondirende sphärische Linie ein grösster Kreis; und den konjugirten Tangenten, welche unter sich parallel sind, entspricht auf der Kugeloberfläche ein Punkt. Eine Linie (α) ist somit die Berührungscurve der Fläche mit einem umschriebenen Cylinder; bei den Flächen zweiten Grades sind die Linien (α) Schnitte von Ebenen, welche bei dem Ellipsoid oder den Hyperboloiden durch den Mittelpunkt gehen, und demgemäss Centralschnitte oder auch Diametralschnitte heissen, und beim Paraboloid der Axe parallel sind.

$\alpha\beta\gamma$ sei ein Dreieck aus Linien (α) auf einer Fläche. Wenn die konjugirte Tangente von $\alpha$ nach $\beta$ geht, bleibt sie sich stets parallel; ihr Drehungswinkel ist also gleich 0. Beim Uebergang im Punkte $\beta$ in die Lage der konjugirten Tangente der Seite $\beta\gamma$ beschreibt sie einen gewissen Winkel $180-\beta'$; von hier bis nach $\gamma$ ist die Drehung wieder gleich 0; beim Uebergang in $\gamma$ in die Lage der konjugirten Tangente der Seite $\gamma\alpha$ beschreibt die bewegliche Linie wieder einen Winkel $180-\gamma'$; von da bis nach $\alpha$ ist die Drehung gleich 0; beim Uebergang in $\alpha$ in die ursprüngliche Lage beschreibt die Linie einen dritten Winkel $180-\alpha'$; also ist die Summe der Drehungswinkel, welche die konjugirte Tangente beschrieben hat, bei ihrer Bewegung auf dem Umfang des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$

$$540-(\alpha'+\beta'+\gamma');$$

$\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ sind die Winkel zwischen je zwei konjugirten Tangenten in den Ecken des Dreiecks. Es ist aber, um eine Verwechselung dieser Winkel mit ihren Nebenwinkeln zu vermeiden, Folgendes zu bemerken: Dreht sich in der Ecke $\alpha$ des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ eine Gerade so von der Richtung der Tangente der Seite $\alpha\beta$ zur Richtung der Tangente der Seite $\alpha\gamma$, dass sie den Dreieckswinkel $\alpha$

*) Thl. XXXIX. S. 214.

selbst und nicht dessen Nebenwinkel beschreibt, so wird sich auch die konjugirte Tangente um einen gewissen Winkel drehen, den wir $\alpha'$ nennen. Ebenso sind $\beta'$ und $\gamma'$ die Winkel, um welche sich die konjugirte Tangente in den Punkten $\beta$ und $\gamma$ dreht, wenn die Tangente in diesen Punkten die betreffenden Dreieckswinkel beschreibt.

Nun ist nach Satz 2. die Summe der Drehungswinkel $540-(\alpha'+\beta'+\gamma')$, oder der Umfang der den konjugirten Tangenten von $\alpha\beta\gamma$ korrespondirenden sphärischen Figur, vermehrt um den Inhalt der den Flächen-Normalen von $\alpha\beta\gamma$ korrespondirenden sphärischen Figur, $=360$. Letztere ist aber ein gewöhnliches aus Bögen grösster Kreise bestehendes Dreieck; bezeichnen wir dessen Inhalt mit $i$ (diess ist nach unserer Erklärung eine Zahl, welche angiebt, wie viel von den 720 gleichen Theilen der Kugeloberfläche auf dieses sphärische Dreieck kommen), so ist:

$$540-(\alpha'+\beta'+\gamma')+i=360,$$

oder:

$$\alpha'+\beta'+\gamma'-180=i.$$

In dieser Gleichung ist folgender Satz enthalten:

3. a. Der Ueberschuss der Summe von den Winkeln zwischen je zwei konjugirten Tangenten in den Ecken eines Dreiecks aus Linien ($a$) auf einer gleichartig gekrümmten Fläche über $180^0$ ist gleich dem Inhalt des den Flächen-Normalen dieses Dreiecks korrespondirenden sphärischen Dreiecks.

Bei der Anwendung dieses Satzes auf das Ellipsoid, zweimantlige Hyperboloid oder elliptische Paraboloid setzt man statt „Linien ($a$)" Centralschnitte oder der Axe parallele Schnitte.

Bei einer ungleichartig gekrümmten Fläche dagegen ist die Summe der Drehungswinkel, welche die konjugirte Tangente beschreibt, indem sie nach und nach über alle Punkte des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ hingleitet und schliesslich wieder in ihre ursprüngliche Lage in $\alpha$ zurückkehrt,

$$=180+\alpha'+\beta'+\gamma'.$$

Somit ist:

$$180+\alpha'+\beta'+\gamma'+i=360.$$
$$180-(\alpha'+\beta'+\gamma')=i.$$

Wir haben also folgenden Satz:

3. b. Der Ueberschuss von $180^0$ über die Winkelsumme von je zwei konjugirten Tangenten in den Ecken

eines Dreiecks aus Linien (*a*) auf einer ungleichartig gekrümmten Fläche ist gleich dem Inhalt des den Flächen-Normalen dieses Dreiecks korrespondirenden sphärischen Dreiecks.

Bei der Anwendung dieses Satzes auf das einmantlige Hyperboloid oder hyperbolische Paraboloid setzt man statt „Linien (*a*)" Centralschnitte oder der Axe parallele Schnitte.

## §. 2. Dreiecke aus geodätischen Linien.

In Taf. I. Fig. 8. sei $\alpha\beta$ eine geodätische Linie auf einer beliebigen Fläche. In allen Punkten derselben von $\alpha$ bis $\beta$ denken wir uns die konjugirten Tangenten der einzelnen Elemente der Linie gezogen; diese werden eine entwickelbare Fläche bilden, welche sich in einer Ebene ausbreiten oder abwickeln lässt; dadurch verwandelt sich, wie bekannt, die geodätische Linie $\alpha\beta$ in eine Gerade $AB$, und die konjugirten Tangenten in $\alpha$ und $\beta$ werden bei der Abwicklung zwei durch $A$ und $B$ gehende Gerade sein, die sich in $C$ schneiden. Da die Winkel zwischen jedem Element von $\alpha\beta$ und seiner conjugirten Tangente während der Abwicklung konstant bleiben, so ist der Winkel, welchen die beiden (sich nicht schneidenden) durch $\alpha$ und $\beta$ gehenden konjugirten Tangenten der geodätischen Linie $\alpha\beta$ mit einander bilden, und den wir $c$ nennen wollen, gleich dem Winkel $C$ in dem geradlinigen Dreieck $ABC$; $C$ ist aber gleich $180 - A - B$; oder gleich $m - m'$, wenn wir mit $m$ den Winkel bezeichnen, welchen die konjugirte Tangente in $\alpha$ mit der Verlängerung der geodätischen Linie über $\alpha$ hinaus bildet, und mit $m'$ den Winkel zwischen der konjugirten Tangente in $\beta$ mit der geodätischen Linie $\beta\alpha$ selbst, also ist $c = m - m'$. Nun sei $\beta\gamma$ eine zweite geodätische Linie auf der Fläche, und der Winkel zwischen den konjugirten Tangenten ihrer Elemente in $\beta$ und $\gamma = a$, so wird, wie vorhin, bewiesen, dass $a = o - o'$ ist, wenn mit $o$ der Winkel zwischen der konjugirten Tangente in $\beta$ und der Verlängerung der geodätischen Linie $\gamma\beta$ über $\beta$ hinaus und mit $o'$ der Winkel zwischen der konjugirten Tangente in $\gamma$ und der geodätischen Linie $\gamma\beta$ selbst bezeichnet wird. Ganz auf dieselbe Weise und bei analoger Bezeichnung finden wir für die dritte geodätische Linie $\gamma\alpha$ die Gleichung $b = n - n'$; $b$ ist der Winkel zwischen den durch $\gamma$ und $\alpha$ gehenden konjugirten Tangenten der geodätischen Linie $\gamma\alpha$; $n$ der Winkel, welchen die erste dieser Linien in $\gamma$ mit der Verlängerung von $\alpha\gamma$ über $\gamma$ hinaus und $n'$ der Winkel, welchen die zweite dieser Linien in $\alpha$ mit der geodätischen Linie $\alpha\gamma$ selbst bildet.

Bezeichnen wir die Winkel des geodätischen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ mit $\alpha, \beta, \gamma$; die Winkel, welche je zwei konjugirte Tangenten in den Ecken $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ mit einander bilden, durch $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$; nun ist einerseits die Summe der Drehungen, welche die konjugirte Tangente des geodätischen Dreiecks macht, indem sie, von $\alpha$ ausgehend, über die Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ geht und in ihre ursprüngliche Lage in $\alpha$ zurückkehrt,

$$= a + b + c + 540 - \alpha' - \beta' - \gamma',$$

oder, da

$$a = o - o', \quad b = n - n' \quad \text{und} \quad c = m - m'$$

ist,

$$= 540 + m - m' + n - n' + o - o' - \alpha' - \beta' - \gamma';$$

anderseits ist:

$$\alpha' - m + n' = \alpha,$$
$$\beta' - o + m' = \beta,$$
$$\gamma' - n + o' = \gamma;$$

somit ist die genannte Summe von Drehungen, oder der Umfang der den konjugirten Tangenten des geodätischen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ entsprechenden sphärischen Figur,

$$= 540 - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Bezeichnen wir den Inhalt der den Flächennormalen von $\alpha\beta\gamma$ korrespondirenden sphärischen Figur mit $i$, so ist nach Satz 2:

$$540 - (\alpha + \beta + \gamma) + i = 360,$$

$$i = \alpha + \beta + \gamma - 180.$$

Diese Gleichung enthält folgenden Satz:

4. a. **Der Ueberschuss der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks auf einer Fläche über 180° ist gleich der den Flächennormalen des Dreiecks korrespondirenden sphärischen Figur.**

Taf. I. Fig. 9. Bei einer ungleichartig gekrümmten Fläche, wie z. B. dem einmantligen Hyperboloid, ist die Summe der Drehungen, welche die konjugirte Tangente beschreibt, indem sie über das Dreieck hingleitet, und, von der Ecke $\alpha$ ausgehend, wieder in ihre ursprüngliche Lage in $\alpha$ zurückkehrt,

$$= a + b + c - \alpha' - \beta' - \gamma' + 180,$$

oder, weil

$$a = o' - o, \quad b = n' - n, \quad c = m' - m$$

ist,

$$= 180 + m - m' + n - n' + o - o' - \alpha' - \beta' - \gamma'.$$

Ferner ist:

$$n' - m - \alpha' = \alpha,$$

$$m' - o - \beta' = \beta,$$

$$o' - n - \gamma' = \gamma;$$

somit ist die Summe der Drehungen, oder der Umfang des den konjugirten Tangenten des geodätischen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ entsprechenden sphärischen Dreiecks,

$$= 180 + \alpha + \beta + \gamma.$$

Also ist nach Satz 2.:

$$180 + \alpha + \beta + \gamma + i = 360,$$

$$= 180 - (\alpha + \beta + \gamma).$$

**4 b. Der Ueberschuss von 180 Grad über die Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks auf einer ungleichartig gekrümmten Fläche ist gleich dem Inhalt der den Flächen-Normalen des Dreiecks korrespondirenden sphärischen Figur.**

Die beiden Sätze 4 a. und 4 b. sind von Gauss (Disq. circa superf. curvas).

# V.

## Ueber die Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts Normalen an denselben zu ziehen.

Von

dem Herausgeber.

### §. 1.

Mit der berühmten Aufgabe:

Durch einen gegebenen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts Normalen an denselben zu ziehen,

hat sich bekanntlich schon Apollonius in dem fünften Buche seines Werkes über die Kegelschnitte beschäftigt, und seine Untersuchung wird allgemein für eine der feinsten in der alten Geometrie gehalten. Er construirt die gesuchten Normalen durch die Durchschnitte einer gleichseitigen Hyperbel mit dem gegebenen Kegelschnitte. Dasselbe habe ich in der Abhandlung Thl. XXXII. Nr. XIII. gethan, auf analytischem Wege, und namentlich den Beweis geführt, dass die construirende Hyperbel eine gleichseitige ist. Es hat aber schon de la Hire gezeigt, dass die gesuchten Normalen sich auch durch die Durchschnitte eines Kreises mit dem gegebenen Kegelschnitte construiren lassen. Eine andere Construction mittelst eines Kreises hat Joachimsthal gegeben in Crelle's Journal. Thl. XLVIII. Nr. 23., und zwar mit Hülfe von zwei von ihm gefundenen allgemeinen Sätzen (m. s. unten §. 3. und §. 4.) von den Kegelschnitten, wobei jedoch zu bemerken ist, dass wenigstens den ersten dieser beiden Sätze (m. s. unten §. 3.) schon früher Herr Fortunato Padula in Neapel gefunden hat*), dem also jedenfalls die Priorität der Erfindung gebührt. Uebrigens erklärt Joachimsthal selbst seine Construction nur für eine vorläufige**), jedenfalls deshalb, weil er bei der Construction

*) M. s. Elementi di Geometria analytica per R. Rubini. Napoli. 1864. p. 468.

**) Er sagt von seiner Construction S. 377.: „quoiqu'elle ne soit pas

des die Aufgabe lösenden Kreises der zweiten Coordinate des Mittelpunkts dieses Kreises bedarf, die er aber nicht construirt, sondern nur durch eine Formel bestimmt, wogegen der übrige Theil der Construction in der That ganz rein geometrisch ist. Ausserdem sind bei der Lösung des Problems nach meiner Meinung noch einige andere Punkte zu berücksichtigen und zu erledigen, so dass ich mir erlauben werde, im Folgenden eine neue Lösung desselben zu geben, mit einer Construction, die sich nur der geraden Linie und des Kreises, oder des Lineals und des Zirkels bedient. Ich werde diese Lösung ganz auf die in meiner Abhandlung „Theorie der Kegelschnitte nach einer neuen Methode analytisch entwickelt (Thl. XXXI. Nr. XIII.)" entwickelten Formeln gründen, welche Abhandlung ich daher hier in ihrer ganzen Ausdehnung als bekannt voraussetzen und im Folgenden bei den Verweisungen auf dieselbe kurz durch N. T. d. K. bezeichnen werde. Ueber die Anzahl der Normalen, welche sich aus einem gegebenen Punkte an einen Kegelschnitt ziehen lassen, s. m. die Abhandlung Thl. VI. Nr. XX.

## §. 2.

Wir denken uns, wie in unserer N. T. d. K., den gegebenen Kegelschnitt aus einem Brennpunkte und einer Directrix mittelst der Charakteristik $n$ construirt, und nehmen die durch den Brennpunkt senkrecht gegen die Directrix gelegte Axe und die Directrix als die Axen der $x'$ und $y'$ eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x'y'$ an. Die Coordinaten des Brennpunkts in diesem Systeme bezeichnen wir durch $F', 0$; die Coordinaten des dem Brennpunkte zunächst liegenden Scheitels des Kegelschnitts durch $f', 0$. Die Gleichung der Directrix ist

$$x' = 0,$$

und denken wir uns dieselbe also im Allgemeinen durch

$$A'x' + B'y' + C' = 0$$

bezeichnet, so ist:

$$A' = 1, \quad B' = 0, \quad C' = 0;$$

folglich nach den allgemeinen Formeln N. T. d. K. S. 97. §. 12. Nr. 14*):

$$f' = F' - \frac{nF'}{n+1} = \frac{F'}{n+1}, \quad F' = (n+1)f'.$$

encore une solution définitive". Die Formel für die zweite Coordinate des Mittelpunkts des zu construirenden Kreises s. m. S. 379. Nr. 3) a. a. O.

Legen wir nun durch den Scheitel ein dem Systeme der $x'y'$ paralleles Coordinatensystem der $xy$, und bezeichnen die Coordinaten des Brennpunkts in diesem Systeme durch $f, 0$; so ist:

$$x' = f' + x, \quad F' = f' + f;$$

also nach dem Obigen:

$$(n+1)f' = f' + f, \quad nf' = f, \quad f' = \frac{1}{n}f;$$

folglich:

$$x' = \frac{1}{n}f + x,$$

und daher nach dem Obigen:

$$x + \frac{1}{n}f = 0$$

die Gleichung der Directrix in dem Systeme der $xy$. Bezeichnen wir also in diesem Systeme die Gleichung der Directrix im Allgemeinen durch

$$Ax + By + C = 0,$$

so ist:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{n}f;$$

also nach N.T.d.K. S.79. Nr. 2) die Gleichung des Kegelschnitts:

1) . . . . . $n^2(x + \frac{1}{n}f)^2 = (x-f)^2 + y^2,$

oder:

2) . . . . . $y^2 = (n^2-1)x^2 + 2(n+1)fx.$

Ist $(uv)$ ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts, so ist nach N. T. d. K. S. 133. §. 27. Nr. 2) die Gleichung der Normale des Kegelschnitts in diesem Punkte:

$$y - v = -\frac{v}{n^2(u+\frac{1}{n}f) - (u-f)}(x-u),$$

oder, wie man leicht findet:

3) . . . . $y - v = -\frac{v}{(n+1)\{(n-1)u+f\}}(x-u).$

Die Gleichung der durch den Scheitel senkrecht gegen diese Normale gezogenen Geraden ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

4) . . . . . $y = \frac{(n+1)\{(n-1)u+f\}}{v}x.$

Ist jetzt $(\alpha\beta)$ ein bestimmter oder gegebener, unveränderlicher Punkt, durch welchen die den Kegelschnitt in $(uv)$ treffende Normale gezogen worden, und wird $(xy)$ gleichfalls als irgend ein bestimmter Punkt in der durch den Scheitel senkrecht gegen die Normale gezogenen Geraden aufgefasst, so haben wir nach 2), 3), 4) die drei folgenden Gleichungen:

$$5) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^2 = (n^2-1)u^2 + 2(n+1)fu, \\ \beta - v = -\dfrac{v}{(n+1)\{(n-1)u+f\}}(\alpha - u), \\ y = \dfrac{(n+1)\{(n-1)u+f\}}{v}x; \end{array} \right.$$

aus denen wir jetzt $u$, $v$ ganz eliminiren wollen, um eine Gleichung zwischen $x$, $y$ und bekannten Grössen zu erhalten.

Aus der dritten der drei vorstehenden Gleichungen folgt:

$$v = \frac{(n+1)\{(n-1)u+f\}}{y}x.$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung und bestimmt $u$, so erhält man:

$$u = \frac{\alpha x + \beta y - (n+1)fx}{n^2 x},$$

also:

$$(n-1)u + f = \frac{(n-1)(\alpha x + \beta y) + fx}{n^2 x},$$

und daher nach dem vorstehenden Ausdrucke von $v$:

$$v = \frac{(n+1)\{(n-1)(\alpha x + \beta y) + fx\}}{n^2 y},$$

so dass wir also für $u$, $v$ die folgenden Ausdrücke haben:

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \dfrac{\alpha x + \beta y - (n+1)fx}{n^2 x}, \\ v = \dfrac{(n+1)\{(n-1)(\alpha x + \beta y) + fx\}}{n^2 y}. \end{array} \right.$$

Führt man diese Ausdrücke von $u$, $v$ in die erste der drei Gleichungen 5) ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung:

$$7) \quad (n+1)x^2\{(n-1)(\alpha x + \beta y) + fx\}^2 = y^2\{\alpha x + \beta y - (n+1)fx\}\{(n-1)(\alpha x + \beta y) + (n^2+1)fx\}.$$

Ferner findet man leicht:

$$\{\alpha x+\beta y-(n+1)fx\}\{(n-1)(\alpha x+\beta y)+(n^2+1)fx\}$$
$$=(n-1)(\alpha x+\beta y)^2+2fx(\alpha x+\beta y)-(n+1)(n^2+1)f^2x^2,$$

und hat also die Gleichung:

$$(n+1)x^2\{(n-1)^2(\alpha x+\beta y)^2+2(n-1)fx(\alpha x+\beta y)+f^2x^2\}$$
$$=y^2\{(n-1)(\alpha x+\beta y)^2+2fx(\alpha x+\beta y)-(n+1)(n^2+1)f^2x^2\},$$

welche man leicht auf die folgende Form bringt:

$$8)\ \ldots\ldots \left.\begin{array}{l}(n-1)\{y^2-(n^2-1)x^2\}(\alpha x+\beta y)^2\\ +\quad 2\{y^2-(n^2-1)x^2\}fx(\alpha x+\beta y)\\ -(n+1)\{(n^2+1)y^2+x^2\}f^2x^2\end{array}\right\}=0.$$

Bezeichnet nun aber $(xy)$ den zweiten Durchschnittspunkt der durch den Scheitel senkrecht gegen die Normale gezogenen Geraden mit dem Kegelschnitte, so verschwindet im Allgemeinen $x$ nicht, und nach 2) ist:

$$y^2-(n^2-1)x^2=2(n+1)fx,$$

also nach 8):

$$\left.\begin{array}{l}(n-1).2(n+1)fx.(\alpha x+\beta y)^2\\ +2.2(n+1)fx.fx(\alpha x+\beta y)\\ -(n+1)\{(n^2+1)y^2+x^2\}f^2x^2\end{array}\right\}=0,$$

oder, weil $x$ nicht verschwindet:

$$\left.\begin{array}{l}2(n-1)(\alpha x+\beta y)^2\\ +4fx(\alpha x+\beta y)\\ -\{(n^2+1)y^2+x^2\}fx\end{array}\right\}=0,$$

also:

$$\left.\begin{array}{l}2(n-1)(\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy)+2(n-1)\beta^2y^2\\ +4fx(\alpha x+\beta y)-\{(n^2+1)y^2+x^2\}fx\end{array}\right\}=0,$$

und folglich, weil

$$y^2=(n^2-1)x^2+2(n+1)fx$$

ist:

$$\left.\begin{array}{l}2(n-1)(\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy)\\ +2(n-1)\beta^2\{(n^2-1)x^2+2(n+1)fx\}\\ +4fx(\alpha x+\beta y)-\{(n^2+1)y^2+x^2\}fx\end{array}\right\}=0,$$

oder, wenn man wieder durch das nicht verschwindende $x$ dividirt:

$$\left.\begin{array}{l} 2(n-1)(\alpha^2 x+2\alpha\beta y) \\ +2(n-1)\beta^2\{(n^2-1)x+2(n+1)f\} \\ +4f(\alpha x+\beta y)-\{(n^2+1)y^2+x^2\}f \end{array}\right\} = 0.$$

Daher hat man jetzt die beiden folgenden Gleichungen:

$$f\{x^2+(n^2+1)y^2\}$$
$$= 2(n-1)\alpha(\alpha x+2\beta y)+2(n-1)\beta^2\{(n^2-1)x+2(n+1)f\}+4f(\alpha x+\beta y),$$
$$f\{(n^2-1)x^2-y^2\} = -2(n+1)f^2x,$$

und erhält durch deren Addition die Gleichung:

$$n^2f(x^2+y^2)$$
$$= 2(n-1)\alpha(\alpha x+2\beta y)+2(n-1)\beta^2\{(n^2-1)x+2(n+1)f\}$$
$$+4f(\alpha x+\beta y)-2(n+1)f^2x$$
$$= 2(n-1)\{\alpha^2+(n^2-1)\beta^2\}x+2f\{2\alpha-(n+1)f\}x$$
$$+4\beta\{(n-1)\alpha+f\}y+4(n^2-1)\beta^2f$$
$$= 2\{(n-1)[\alpha^2+(n^2-1)\beta^2]+f[2\alpha-(n+1)f]\}x$$
$$+4\beta\{(n-1)\alpha+f\}y+4(n^2-1)\beta^2f.$$
$$= 2\{\alpha[(n-1)\alpha+2f]+(n+1)[(n-1)^2\beta^2-f^2]\}x$$
$$+4\beta\{(n-1)\alpha+f\}y+4(n^2-1)\beta^2f,$$

also die Gleichung:

9) . . . . . $x^2+y^2$

$$= 2\frac{\alpha\{(n-1)\alpha+2f\}+(n+1)\{(n-1)^2\beta^2-f^2\}}{n^2f}x+4\frac{\beta\{(n-1)\alpha+f\}}{n^2f}y$$
$$+\frac{4(n^2-1)\beta^2}{n^2},$$

oder, wie sogleich erhellet:

10)

$$\left\{x-\frac{\alpha[(n-1)\alpha+2f]+(n+1)[(n-1)^2\beta^2-f^2]}{n^2f}\right\}^2+\left\{y-\frac{2\beta[(n-1)\alpha+f]}{n^2f}\right\}^2$$
$$= \frac{4(n^2-1)\beta^2}{n^2}+\left\{\frac{\alpha[(n-1)\alpha+2f]+(n+1)[(n-1)^2\beta^2-f^2]}{n^2f}\right\}^2$$
$$+\left\{\frac{2\beta[(n-1)\alpha+f]}{n^2f}\right\}^2,$$

der:

11)

$$\left\{x-\frac{\alpha[(n-1)\alpha+2f]+(n+1)[(n-1)^2\beta^2-f^2]}{n^2f}\right\}^2+\left\{y-\frac{2\beta[(n-1)\alpha+f]}{n^2f}\right\}^2$$
$$=\left\{\frac{\alpha[(n-1)\alpha+2f]+(n+1)[(n-1)^2\beta^2-f^2]}{n^2f}\right\}^2$$
$$+\frac{4\beta^2\{[(n-1)\alpha+f]^2+n^2(n^2-1)f^2\}}{n^4f^2},$$

oder auch:

12)

$$\left\{x-\frac{\alpha[2f-(1-n)\alpha]+(1+n)[(1-n)^2\beta^2-f^2]}{n^2f}\right\}^2+\left\{y-\frac{2\beta[f-(1-n)\alpha]}{n^2f}\right\}^2$$
$$=\left\{\frac{\alpha[2f-(1-n)\alpha]+(1+n)[(1-n)^2\beta^2-f^2]}{n^2f}\right\}^2$$
$$+\frac{4\beta^2\{[f-(1-n)\alpha]^2-n^2(1-n^2)f^2\}}{n^4f^2}.$$

Die Natur der durch diese Gleichungen charakterisirten Curve soll nun im folgenden Paragraphen genau ermittelt werden.

## §. 3.

Wenn der gegebene Kegelschnitt eine Parabel und folglich $n=1$ ist, so wird die Gleichung 10), wie man leicht findet:

13)

$$\{x-2(\alpha-f)\}^2+(y-2\beta)^2=\{2(\alpha-f)\}^2+(2\beta)^2=4\{(\alpha-f)^2+\beta^2\}.$$

Die durch die Gleichungen 10), 11), 12) dargestellte Curve ist also ein Kreis. Bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunkts dieses Kreises durch $p$, $q$ und seinen Halbmesser durch $r$, so ist:

14)

$$p=2(\alpha-f),\quad q=2\beta,\quad r=2\sqrt{(\alpha-f)^2+\beta^2}.$$

Weil die Gleichung 13) durch $x=0$, $y=0$ erfüllt wird, so geht dieser Kreis immer durch den Scheitel der Parabel, und es ist, wie auch aus den vorstehenden Formeln sogleich erhellet:

15) . . . . . $r^2 = p^2 + q^2$.

Wenn der gegebene Kegelschnitt eine Hyperbel und folglich $n > 1$ ist, so ist die Grösse

$$\frac{4(n^2-1)\beta^2}{n^2},$$

und folglich auch die Grösse auf der rechten Seite der Gleichungen 10), 11), 12) positiv. Die durch diese Gleichungen dargestellte Curve ist also auch in diesem Falle ein Kreis. Bezeichnen wir wie vorher die Coordinaten des Mittelpunkts dieses Kreises durch $p$, $q$ und seinen Halbmesser durch $r$; so ist nach 10), 11):

16)
$$\begin{cases} p = \dfrac{\alpha\{2f+(n-1)\alpha\}+(n+1)\{(n-1)^2\beta^2-f^2\}}{n^2 f}, \\ q = \dfrac{2\beta\{f+(n-1)\alpha\}}{n^2 f}; \end{cases}$$

und:

17) . . . . . $r^2 = p^2 + q^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{n^2-1}}{n}\beta\right)^2$

oder:

18) $$r^2 = \left\{\frac{\alpha[2f+(n-1)\alpha]+(n+1)[(n-1)^2\beta^2-f^2]}{n^2 f}\right\}^2 + \frac{4\beta^2\{[f+(n-1)\alpha]^2+n^2(n^2-1)f^2\}}{n^4 f^2}.$$

Wenn der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse und folglich $n < 1$ ist, so ist eine besondere Untersuchung nöthig über die auf der rechten Seite der Gleichungen 10), 11), 12) stehende Grösse rücksichtlich ihres Vorzeichens, welche Grösse wir durch $U$ bezeichnen, und daher nach 12):

$$U = \left\{\frac{\alpha[2f-(1-n)\alpha]+(1+n)[(1-n)^2\beta^2-f^2]}{n^2 f}\right\}^2 + \frac{4\beta^2\{[f-(1-n)\alpha]^2-n^2(1-n^2)f^2\}}{n^4 f^2}$$

setzen wollen. Setzen wir aber der Kürze wegen noch:

$$V = \alpha\{2f-(1-n)\alpha\}+(1+n)\{(1-n)^2\beta^2-f^2\},$$
$$W = \{f-(1-n)\alpha\}^2-n^2(1-n^2)f^2;$$

so ist:

$$U=\frac{V^2+4\beta^2 W}{n^4 f^2},$$

also:

$$n^4 f^2 U = V^2+4\beta^2 W.$$

Der Einfachheit wegen wollen wir von jetzt an, was offenbar verstattet ist und der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, die Grösse $f$ als positiv annehmen.

Weil nun

$$W=\{f-(1-n)\alpha\}^2-n^2(1-n^2)f^2$$
$$=\{1-n^2(1-n^2)\}f^2+(1-n)^2\alpha^2-2(1-n)f\alpha$$

ist, und für $n<1$ die Grössen

$$1-n^2(1-n^2) \text{ und } 1-n$$

offenbar positiv sind; so ist für ein verschwindendes und ein negatives $\alpha$ augenscheinlich die Grösse $W$, folglich nach dem Obigen auch die Grösse $U$, positiv. Für $\alpha \lessgtr 0$ ist also $U$ positiv, und wir brauchen daher von jetzt an nur den Fall eines positiven $\alpha$ zu betrachten oder $\alpha$ als positiv anzunehmen.

Nach N. T. d. K. S. 99. §. 12. Nr. 18) ist, wenn $a$ seine bekannte Bedeutung hat:

$$a=\frac{n(f+\frac{1}{n}f)}{1-n^2}=\frac{(1+n)f}{1-n^2}=\frac{f}{1-n}, \quad 2a=\frac{2f}{1-n}.$$

Für

$$\alpha \gtreqless \frac{2f}{1-n}$$

ist:

$$(1-n)\alpha \gtreqless 2f, \text{ also } (1-n)\alpha-f \gtreqless f;$$

also, weil hiernach

$$(1-n)\alpha-f$$

natürlich positiv ist, auch:

$$\{(1-n)\alpha-f\}^2 \gtreqless f^2 \text{ oder } \{f-(1-n)\alpha\}^2 \gtreqless f^2,$$

folglich:

$$\{f-(1-n)\alpha\}^2-n^2(1-n^2)f^2 \gtreqless \{1-n^2(1-n^2)\}f^2,$$

also nach dem Obigen:

$$W \gtreqless \{1-n^2(1-n^2)\}f^2,$$

und daher offenbar $W$, also auch $U$, positiv.

Nach dem Vorhergehenden ist also $U$ positiv für

$$\alpha \lesseqgtr 0 \text{ und für } \alpha \gtreqless \frac{2f}{1-n},$$

oder für $\alpha \lesseqgtr 0$ und für $\alpha \gtreqless 2a$.

Für

$$\alpha \lesseqgtr \frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{1-n}f$$

ist:

$$(1-n)\alpha \lesseqgtr f-n\sqrt{1-n^2}.f,$$

$$f-(1-n)\alpha \gtreqless n\sqrt{1-n^2}.f,$$

$$\{f-(1-n)\alpha\}^2 \gtreqless n^2(1-n^2)f^2,$$

$$\{f-(1-n)\alpha\}^2-n^2(1-n^2)f^2 \gtreqless 0,$$

wobei man nicht zu übersehen hat, dass nach Vorstehendem, so wie $n\sqrt{1-n^2}.f$, auch $f-(1-n)\alpha$ natürlich positiv ist; also ist $W \gtreqless 0$ und folglich $U$ positiv.

Für

$$\alpha \gtreqless \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n}f$$

ist:

$$(1-n)\alpha \gtreqless f+n\sqrt{1-n^2}.f,$$

$$(1-n)\alpha-f \gtreqless n\sqrt{1-n^2}.f,$$

$$\{(1-n)\alpha-f\}^2 \gtreqless n^2(1-n^2)f^2,$$

$$\{f-(1-n)\alpha\}^2 \gtreqless n^2(1-n^2)f^2,$$

$$\{f-(1-n)\alpha\}^2-n^2(1-n^2)f^2 \gtreqless 0,$$

wobei man wiederum nicht zu übersehen hat, dass nach Vorstehendem, so wie $n\sqrt{1-n^2}.f$, auch $(1-n)\alpha - f$ positiv ist; also ist $W \gtreqless 0$, und folglich $U$ positiv.

Für

$$\alpha \leqq \frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f \text{ und } \alpha \geqq \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f$$

ist also $U$ positiv, und es bleibt folglich nur noch das Intervall

$$\frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f < \alpha < \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f$$

zu untersuchen übrig, welches wir in die beiden Intervalle

$$\frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f < \alpha \leqq \frac{f}{1-n}$$

und

$$\frac{f}{1-n} \leqq \alpha < \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f$$

zerlegen, und jedes dieser beiden Intervalle einer besonderen Untersuchung unterwerfen wollen.

Für

$$\frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f < \alpha \leqq \frac{f}{1-n}$$

ist:

$$(1-n\sqrt{1-n^2})f < (1-n)\alpha, \quad (1-n)\alpha \leqq f;$$

$$f - n\sqrt{1-n^2}.f < (1-n)\alpha, \quad (1-n)\alpha \leqq f;$$

$$f - (1-n)\alpha < n\sqrt{1-n^2}.f, \quad f-(1-n)\alpha \gtreqless 0;$$

$$|f-(1-n)\alpha|^2 < n^2(1-n^2)f^2,$$

$$|f-(1-n)\alpha|^2 - n^2(1-n^2)f^2 < 0;$$

also $W$ negativ.

Für

$$\frac{f}{1-n} \leqq \alpha < \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f$$

ist:

$$f \lessgtr (1-n)\alpha, \quad (1-n)\alpha < (1+n\sqrt{1-n^2})f,$$

$$f \lessgtr (1-n)\alpha, \quad (1-n)\alpha < f + n\sqrt{1-n^2}.f,$$

$$(1-n)\alpha - f \gtrless 0, \quad (1-n)\alpha - f < n\sqrt{1-n^2}.f.$$

$$|(1-n)\alpha - f|^2 < n^2(1-n^2)f^2,$$

$$|f-(1-n)\alpha|^2 < n^2(1-n^2)f^2,$$

$$|f-(1-n)\alpha|^2 - n^2(1-n^2)f^2 < 0;$$

also $W$ negativ.

Es ist folglich in dem ganzen Intervalle

$$\frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{n}f < \alpha < \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{n}f$$

die Grösse $W$ negativ, also die Grösse

$$-W = n^2(1-n^2)f^2 - |f-(1-n)\alpha|^2$$

positiv.

Betrachten wir nun die Grösse

$$T = \alpha|2f-(1-n)\alpha| - (1+n)f^2.$$

Für

$$\alpha = \frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{1-n}f$$

ist der Werth dieser Grösse:

$$\frac{(1-n\sqrt{1-n^2})(1+n\sqrt{1-n^2})}{1-n}f^2 - (1+n)f^2$$

$$= \frac{1-n^2(1-n^2)-(1-n^2)}{1-n}f^2 = \frac{n^4}{1-n}f^2,$$

also positiv.

Für

$$\alpha = \frac{f}{1-n}$$

ist der Werth obiger Grösse:

$$\frac{f^2}{1-n} - (1+n)f^2 = \frac{n^2}{1-n}f^2,$$

also positiv.

Für

$$\alpha = \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f$$

ist der Werth obiger Grösse:

$$\frac{(1+n\sqrt{1-n^2})(1-n\sqrt{1-n^2})}{1-n} f^2 - (1+n) f^2$$
$$= \frac{1-n^2(1-n^2)-(1-n^2)}{1-n} f^2 = \frac{n^4}{1-n} f^2,$$

also positiv.

Das Differential von $T$ in Bezug auf $\alpha$ als veränderliche Grösse ist:

$$\partial T = 2\{f-(1-n)\alpha\}\partial\alpha.$$

Unter der Voraussetzung, dass $\partial\alpha$ positiv sei, ist folglich

$$\partial T \begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix} \text{ für } \begin{matrix}\alpha < \frac{f}{1-n},\\ \alpha > \frac{f}{1-n}.\end{matrix}$$

Lässt man also $\alpha$ von

$$\frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f \text{ bis } \frac{f}{1-n}$$

wachsen, so wächst $T$ fortwährend, und ist also stets positiv, weil $T$ positiv ist für

$$\alpha = \frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{n} f.$$

Lässt man $\alpha$ von

$$\frac{f}{1-n} \text{ bis } \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f$$

wachsen, so nimmt $T$ fortwährend ab, und ist also stets positiv, weil für

$$\alpha = \frac{f}{1-n} \text{ und } \alpha = \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f$$

diese Grösse nach dem Obigen positiv ist; denn sollte $T$ in dem in Rede stehenden Intervall irgend einmal negativ werden, so müsste es irgend einmal wieder wachsen, um zu dem positiven Werthe zu gelangen, welchen es für

$$\alpha = \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f$$

erhält, was dem widerspricht, dass $T$ stets abnimmt, wenn man $\alpha$ von

$$\frac{f}{1-n} \text{ bis } \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f$$

wachsen lässt.

Hiernach ist also $T$ in dem ganzen Intervalle von

$$\alpha = \frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f \text{ bis } \alpha = \frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n} f$$

stets positiv. Also ist auch die Grösse

$$\begin{aligned} V &= \alpha\{2f-(1-n)\alpha\} + (1+n)\{(1-n)^2\beta^2 - f^2\} \\ &= \alpha\{2f-(1-n)\alpha\} - (1+n)f^2 + (1+n)(1-n)^2\beta^2 \\ &= T + (1+n)(1-n)^2\beta^2 \end{aligned}$$

in diesem ganzen Intervalle stets positiv.

Weil

$$\begin{aligned} &\alpha\{2f-(1-n)\alpha\} - (1+n)f^2 + (1+n)(1-n)^2\beta^2 \\ &- 2\sqrt{(1+n)(1-n)^2\beta^2 . \{\alpha[2f-(1-n)\alpha] - (1+n)f^2\}} \\ &= \{\sqrt{\alpha[2f-(1-n)\alpha] - (1+n)f^2} - \sqrt{(1+n)(1-n)^2\beta^2}\}^2 \end{aligned}$$

ist, so ist:

$$\begin{aligned} &\alpha\{2f-(1-n)\alpha\} - (1+n)f^2 + (1+n)(1-n)^2\beta^2 \\ &\geqq 2\sqrt{(1+n)(1-n)^2\beta^2 . \{\alpha[2f-(1-n)\alpha] - (1+n)f^2\}} \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} &\alpha\{2f-(1-n)\alpha\} - (1+n)f^2 + (1+n)(1-n)^2\beta^2 \\ &\geqq \pm 2\beta\sqrt{(1+n)(1-n)^2\{\alpha[2f-(1-n)\alpha] - (1+n)f^2\}}, \end{aligned}$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem $\beta$ positiv oder negativ ist.

Die Bedingung

$$\begin{aligned} &(1+n)(1-n)^2\{\alpha[2f-(1-n)\alpha] - (1+n)f^2\} \\ &\geqq n^2(1-n^2)f^2 - \{f-(1-n)\alpha\}^2, \end{aligned}$$

wo diese letztere Grösse nach dem Obigen positiv ist, ist erfüllt, wenn die folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} &(1+n)(1-n)^2\alpha\{2f-(1-n)\alpha\} + \{f-(1-n)\alpha\}^2 \\ &\geqq n^2(1-n^2)f^2 + (1-n^2)^2f^2 \\ &\geqq (1-n^2)\{n^2 + (1-n^2)\}f^2 \\ &\geqq (1-n^2)f^2 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Für

$$\alpha = \frac{f}{1-n}$$

ist, wie man sogleich übersieht:

$$(1+n)(1-n)^2\alpha\{2f-(1-n)\alpha\}+\{f-(1-n)\alpha\}^2$$
$$=(1+n)(1-n)^2\frac{f^2}{1-n}=(1-n^2)f^2.$$

Das Differential von

$$(1+n)(1-n)^2\alpha\{2f-(1-n)\alpha\}+\{f-(1-n)\alpha\}^2$$

nach $\alpha$ ist:

$$2(1+n)(1-n)^2\{f-(1-n)\alpha\}\partial\alpha-2(1-n)\{f-(1-n)\alpha\}\partial\alpha$$
$$=2(1-n)\{(1-n^2)-1\}\{f-(1-n)\alpha\}\partial\alpha$$
$$=-2n^2(1-n)\{f-(1-n)\alpha\}\partial\alpha.$$

Lässt man nun $\alpha$ von $\frac{f}{1-n}$ an abnehmen oder zunehmen, so ist dieses Differential in beiden Fällen positiv, und es nimmt also die Grösse

$$(1+n)(1-n)^2\alpha\{2f-(1-n)\alpha\}+\{f-(1-n)\alpha\}^2$$

in beiden Fällen fortwährend zu; es ist also immer:

$$(1+n)(1-n)^2\alpha\{2f-(1-n)\alpha\}+\{f-(1-n)\alpha\}^2$$
$$\gtrless(1-n^2)f^2,$$

und also nach dem Obigen, nämlich in dem Intervalle

$$\alpha=\frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{1-n}f \text{ bis } \alpha=\frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n}f,$$

auch immer:

$$(1+n)(1-n)^2\{\alpha[2f-(1-n)\alpha]-(1+n)f^2\}$$
$$\gtrless n^2(1-n^2)f^2-\{f-(1-n)\alpha\}^2,$$

folglich nach dem Obigen auch immer:

$$\alpha\{2f-(1-n)\alpha\}-(1+n)f^2+(1+n)(1-n)^2\beta^2$$
$$\gtrless\pm2\beta\sqrt{n^2(1-n^2)f^2-\{f-(1-n)\alpha\}^2},$$

oder:

$$\alpha\{2f-(1-n)\alpha\}+(1+n)\{(1-n)^2\beta^2-f^2\}$$
$$\gtrless \pm 2\beta\sqrt{n^2(1-n^2)f^2-\{f-(1-n)\alpha\}^2},$$

die Zeichen wie oben genommen, also

$$\{\alpha[2f-(1-n)\alpha]+(1+n)[(1-n)^2\beta^2-f^2]\}^2$$
$$\gtrless 4\beta^2\{n^2(1-n^2)f^2-[f-(1-n)\alpha]^2\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\{\alpha[2f-(1-n)\alpha]+(1+n)[(1-n)^2\beta^2-f^2]\}^2\\ +4\beta^2\{[f-(1-n)\alpha]^2-n^2(1-n^2)f^2\}\end{array}\right\}\gtrless 0;$$

folglich in den obigen Bezeichnungen:

$$V^2+4\beta^2W\gtrless 0,$$

und daher

$$U=\frac{V^2+4\beta^2W}{n^4f^2}$$

auch in dem Intervalle

$$\frac{1-n\sqrt{1-n^2}}{1-n}f<\alpha<\frac{1+n\sqrt{1-n^2}}{1-n}f$$

stets positiv.

Hiermit ist nun bewiesen, dass auch in dem Falle der Ellipse die Grösse

$$U=\left\{\frac{\alpha[2f-(1-n)\alpha]+(1+n)[(1-n)^2\beta^2-f^2]}{n^2f}\right\}^2$$
$$+\frac{4\beta^2\{[f-(1-n)\alpha]^2-n^2(1-n^2)f^2\}}{n^4f^2}$$

stets positiv, folglich auch in diesem Falle die durch die Gleichungen 10), 11), 12) charakterisirte Curve ein Kreis ist. Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunkts dieses Kreises durch $p$, $q$ und seinen Halbmesser durch $r$; so ist nach 10), 12):

$$19)\quad \left\{\begin{array}{l}p=\dfrac{\alpha\{2f-(1-n)\alpha\}+(1+n)\{(1-n)^2\beta^2-f^2\}}{n^2f},\\ q=\dfrac{2\beta\{f-(1-n)\alpha\}}{n^2f};\end{array}\right.$$

und:

$$20) \quad \ldots\ldots \quad r^2 = p^2 + q^2 - \left(\frac{2\sqrt{1-n^2}}{n}\beta\right)^2$$

oder:

$$21) \quad r^2 = \left\{\frac{\alpha[2f-(1-n)\alpha] + (1+n)[(1-n)^2\beta^2 - f^2]}{n^2 f}\right\}^2 + \frac{4\beta^2\{[f-(1-n)\alpha]^2 - n^2(1-n^2)f^2\}}{n^4 f^2}.$$

Die durch die Gleichungen 10), 11), 12) charakterisirte Curve ist folglich in allen Fällen ein Kreis, dessen Mittelpunkt $(pq)$ und Halbmesser $r$ ganz im Allgemeinen durch die Formeln:

$$22) \quad \begin{cases} p = \dfrac{\alpha\{2f+(n-1)\alpha\} + (n+1)\{(n-1)^2\beta^2 - f^2\}}{n^2 f}, \\ q = \dfrac{2\beta\{f+(n-1)\alpha\}}{n^2 f} \end{cases}$$

und:

$$23) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r^2 = p^2 + q^2 + \frac{4(n^2-1)\beta^2}{n^2}$$

oder:

$$24) \quad r^2 = \left\{\frac{\alpha[2f+(n-1)\alpha] + (n+1)[(n-1)^2\beta^2 - f^2]}{n^2 f}\right\}^2 + \frac{4\beta^2\{[f+(n-1)\alpha]^2 + n^2(n^2-1)f^2\}}{n^4 f^2}$$

bestimmt werden; und aus dem Vorhergehenden ergiebt sich der folgende

*Satz.*

**Die von einem Scheitel eines Kegelschnitts auf die an denselben durch ein und denselben gegebenen oder bestimmten Punkt gezogenen Normalen gefällten Perpendikel treffen den Kegelschnitt zum zweiten Male in Punkten, welche sämmtlich in einem und demselben, durch die obigen Formeln vollständig bestimmten Kreise liegen.**

§. 4.

Wenn der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, und also einen Mittelpunkt hat, wollen wir die Coor-

dinaten des Mittelpunkts durch $F$, $G$ bezeichnen; dann ist nach N. T. d. K. S. 93. §. 11. Nr. 3):

$$F = f - \frac{n^2(f+\frac{f}{n})}{n^2-1} = -\frac{f}{n-1}, \quad G = 0.$$

Legen wir nun durch den gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ einen Durchmesser des Kegelschnitts, so ist dessen Gleichung:

$$y-\beta = \frac{\beta}{\alpha+\frac{f}{n-1}}(x-\alpha) = \frac{(n-1)\beta}{f+(n-1)\alpha}(x-\alpha)$$

oder:

$$y = -\frac{\beta}{\alpha+\frac{f}{n-1}}(x+\frac{f}{n-1}) = \frac{(n-1)\beta}{f+(n-1)\alpha}(x+\frac{f}{n-1}),$$

oder, etwas anders geschrieben:

$$y-\beta = \frac{(n-1)\beta}{(n-1)\alpha+f}(x-\alpha), \quad y = \frac{(n-1)\beta}{(n-1)\alpha+f}(x+\frac{f}{n-1}).$$

Ziehen wir durch den Scheitel (00) eine Senkrechte auf diesen Diameter, so ist deren Gleichung:

$$y = -\frac{(n-1)\alpha+f}{(n-1)\beta}x;$$

und wenn nun $\xi$, $\eta$ die Coordinaten des zweiten Durchschnittspunkts dieser Senkrechten mit dem Kegelschnitte bezeichnen, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\eta = -\frac{(n-1)\alpha+f}{(n-1)\beta}\xi, \quad \eta^2 = (n^2-1)\xi^2 + 2(n+1)f\xi.$$

Durch Auflösung dieser beiden Gleichungen erhält man sehr leicht:

$$\xi = \frac{2(n+1)(n-1)^2 f\beta^2}{\{(n-1)\alpha+f\}^2-(n-1)^2(n^2-1)\beta^2},$$

$$\eta = -\frac{2(n+1)(n-1)f\beta\{(n-1)\alpha+f\}}{\{(n-1)\alpha+f\}^2-(n-1)^2(n^2-1)\beta^2}.$$

Durch den Punkt $(\xi\eta)$ legen wir jetzt an den Kegelschnitt eine Berührende, so ist nach N. T. d. K. S. 132. §. 27. Nr. 1) deren Gleichung:

$$y-\eta=\frac{n^2(\xi+\frac{f}{n})-(\xi-f)}{\eta}(x-\xi)$$

$$=\frac{(n+1)\{(n-1)\xi+f\}}{\eta}(x-\xi),$$

also, weil man mittelst der obigen Ausdrücke von $\xi$, $\eta$ leicht

$$(n-1)\xi+f=\frac{\{(n-1)\alpha+f\}^2+(n-1)^2(n^2-1)\beta^2}{\{(n-1)\alpha+f\}^2-(n-1)^2(n^2-1)\beta^2}f$$

findet:

$$y-\eta=-\frac{\{(n-1)\alpha+f\}^2+(n-1)^2(n^2-1)\beta^2}{2(n-1)\beta\{(n-1)\alpha+f\}}(x-\xi),$$

wo man nun noch für $\xi$, $\eta$ ihre obigen Ausdrücke einführen muss; dadurch erhält man mittelst leichter Rechnung die folgende völlig entwickelte Gleichung der in Rede stehenden Berührenden:

$$y=-\frac{\{(n-1)\alpha+f\}^2+(n-1)^2(n^2-1)\beta^2}{2(n-1)\beta\{(n-1)\alpha+f\}}x-\frac{(n^2-1)f\beta}{(n-1)\alpha+f}.$$

Beschreibt man über $2a$ als Durchmesser einen Kreis, so ist dessen Gleichung:

$$(x-F)^2+(y-G)^2=a^2,$$

also, weil nach dem Obigen

$$F=-\frac{f}{n-1},\quad G=0$$

und nach N. T. d. K. S. 99. §. 12. Nr. 18), Nr. 19) allgemein:

$$a^2=\left(\frac{f}{n-1}\right)^2$$

ist:

$$(x+\frac{f}{n-1})^2+y^2=\left(\frac{f}{n-1}\right)^2,$$

oder, wie man hieraus leicht findet:

$$x^2+y^2=-\frac{2f}{n-1}x.$$

Für die gemeinschaftliche Sehne dieses Kreises und des durch die Gleichung 9) bestimmten Kreises finden die beiden Gleichungen:

$$x^2+y^2=-\frac{2f}{n-1}x,$$

$$x^2+y^2=2\frac{\alpha\{(n-1)\alpha+2f\}+(n+1)\{(n-1)^2\beta^2-f^2\}}{n^2f}x$$
$$+4\frac{\beta\{(n-1)\alpha+f\}}{n^2f}y+\frac{4(n^2-1)\beta^2}{n^2}$$

Statt, aus denen man als Gleichung der in Rede stehenden gemeinschaftlichen Sehne durch Subtraction die folgende erhält:

$$-\left\{\frac{f}{n-1}+\frac{\alpha[(n-1)\alpha+2f]+(n+1)[(n-1)^2\beta^2-f^2]}{n^2f}\right\}x$$
$$-\frac{2\beta\{(n-1)\alpha+f\}}{n^2f}y\Bigg\}=\frac{2(n^2-1)\beta^2}{n^2},$$

oder, wie man leicht findet, die folgende:

$$\frac{\{(n-1)\alpha+f\}^2+(n-1)^2(n^2-1)\beta^2}{n^2(n-1)f}x+\frac{2\beta\{(n-1)\alpha+f\}}{n^2f}y=-\frac{2(n^2-1)\beta^2}{n^2},$$

also:

$$y=-\frac{\{(n-1)\alpha+f\}^2+(n-1)^2(n^2-1)\beta^2}{2(n-1)\beta\{(n-1)\alpha+f\}}x-\frac{(n^2-1)f\beta}{(n-1)\alpha+f},$$

welche Gleichung ganz mit der Gleichung der obigen Berührenden übereinstimmt; daraus ergiebt sich der folgende

*Satz.*

Wenn man durch den Scheitel des Kegelschnitts auf den durch den Punkt $(\alpha\beta)$ gezogenen Durchmesser desselben eine Senkrechte zieht, und durch den zweiten Durchschnittspunkt dieser Senkrechten mit dem Kegelschnitte an diesen eine Berührende legt; so ist diese Berührende die gemeinschaftliche Sehne des über der Hauptaxe $2a$ als Durchmesser beschriebenen Kreises und des durch die Formeln des vorhergehenden Paragraphen bestimmten Kreises.

§. 5.

In dem Falle der Ellipse und Hyperbel wollen wir jetzt durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts als Anfang ein dem primitiven Systeme der $xy$ paralleles Coordinatensystem der $x'y'$ legen, und in diesem Systeme die Coordinaten der Punkte $(f0)$, $(\alpha\beta)$, $(pq)$ respective durch $f'$, $0$; $\alpha'$, $\beta'$; $p'$, $q'$ bezeichnen *). Dann ist:

*) Dass der absolute Werth von $f'$ in der gewöhnlichen Bezeichnung die Grösse $e$ ist, versteht sich von selbst.

$$f = F + f'; \quad \alpha = F + \alpha'; \quad p = F + p';$$
$$\beta = \beta'; \quad q = q';$$

also, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$F = -\frac{f}{n-1} = \frac{f}{1-n}$$

ist:

$$f = \frac{f}{1-n} + f'; \quad \alpha = \frac{f}{1-n} + \alpha'; \quad p = \frac{f}{1-n} + p';$$
$$\beta = \beta'; \quad q = q'.$$

Folglich ist:

$$f' = -\frac{nf}{1-n}, \quad f = -\frac{(1-n)f'}{n}.$$

Ferner ist:

$$p' = p - \frac{f}{1-n} = \frac{(1-n)p - f}{1-n}.$$

Nach 22) ist:

$$p = \frac{\alpha\{2f-(1-n)\alpha\} + (1+n)\{(1-n)^2\beta^2 - f^2\}}{n^2 f},$$
$$q = \frac{2\beta\{f-(1-n)\alpha\}}{n^2 f};$$

also, wie man leicht findet:

$$(1-n)p - f = \frac{(1-n)\alpha\{2f-(1-n)\alpha\} + (1-n)^3(1+n)\beta^2 - f^2}{n^2 f}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$(1-n)\alpha = f + (1-n)\alpha',$$

also:

$$2f-(1-n)\alpha = f - (1-n)\alpha';$$

folglich:

$$(1-n)p - f = -\left(\frac{1-n}{n}\right)^2 \cdot \frac{\alpha'^2 - (1-n^2)\beta'^2}{f},$$

und daher:

$$p' = -\frac{1-n}{n^2} \cdot \frac{\alpha'^2 - (1-n^2)\beta'^2}{f},$$

oder, wenn man nach dem Obigen

$$f = -\frac{(1-n)f'}{n}$$

setzt:

$$p' = \frac{\alpha'^2 - (1-n^2)\beta'^2}{nf'}.$$

Weiter ist:

$$f - (1-n)\alpha = -(1-n)\alpha', \quad \beta = \beta';$$

folglich:

$$q' = q = -\frac{2(1-n)\alpha'\beta'}{n^2 f},$$

und, wenn man wieder

$$f = -\frac{(1-n)f'}{n}$$

setzt:

$$q' = \frac{2\alpha'\beta'}{nf'}.$$

Also hat man für $p'$, $q'$ die folgenden Ausdrücke:

$$25) \ldots \begin{cases} p' = \dfrac{\alpha'^2 - (1-n^2)\beta'^2}{nf'} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\alpha'^2 - (1-n^2)\beta'^2}{f'}, \\ q' = \dfrac{2\alpha'\beta'}{nf'} = \dfrac{2}{n} \cdot \dfrac{\alpha'\beta'}{f'}. \end{cases}$$

Nach 23) ist:

$$r^2 = p^2 + q^2 - \frac{4(1-n^2)\beta^2}{n^2},$$

und nach dem Obigen:

$$p = p' - \frac{f'}{n}, \quad q = q';$$

also:

$$26) \ldots \ldots \quad r^2 = (p' - \frac{f'}{n})^2 + q'^2 - \frac{4(1-n^2)\beta'^2}{n^2},$$

und folglich nach 25):

27)

$$r^2 = \left\{\frac{\alpha'^2 - (1-n^2)\beta'^2 - f'^2}{nf'}\right\}^2 + \frac{4\alpha'^2\beta'^2}{n^2 f'^2} - \frac{4(1-n^2)\beta'^2}{n^2}$$

oder:

$$28) \quad r^2 = \left\{\frac{\alpha'^2 - (1-n^2)\beta'^2 - f'^2}{nf'}\right\}^2 + \frac{4\beta'^2\{\alpha'^2 - (1-n^2)f'^2\}}{n^2 f'^2}.$$

## §. 6.

Die in den vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Formeln

und Sätze wollen wir nun zur Construction der durch einen gegebenen Punkt gehenden Normalen eines gegebenen Kegelschnitts anwenden, indem wir jetzt zuerst annehmen, dass dieser Kegelschnitt eine Parabel sei.

In der im Ganzen gewiss ohne weitere Erläuterung völlig verständlichen Taf. II. Fig. I. sei $P$ der gegebene Punkt, durch welchen Normalen an die gegebene Parabel gezogen werden sollen, also:

$$\alpha = +AQ, \quad \beta = +PQ.$$

Die Coordinaten des Mittelpunkts des in §. 3. bestimmten Kreises sind in diesem Falle nach 14):

$$p = 2(\alpha - f), \quad q = 2\beta.$$

Da nun $f = +AF$ und $\alpha - f = AQ - AF = FQ$ ist, so mache man $AD = 2.FQ$ und, nachdem man in $D$ auf die Axe der Parabel ein Perpendikel errichtet, $CD = 2.PQ$, wodurch der Punkt $C$ erhalten wird, welcher offenbar der Mittelpunkt des zu bestimmenden Kreises ist, weil seine Coordinaten

$$+AD = 2.FQ = 2(\alpha - f) = p,$$
$$+CD = 2.PQ = 2\beta \qquad = q$$

sind. Da nun nach §. 3. dieser Kreis immer durch den Scheitel $A$ der Parabel geht, so wird derselbe erhalten, wenn man aus dem bekannten Punkte $C$ einen durch den Scheitel $A$ der Parabel gehenden Kreis beschreibt, welcher im vorliegenden Falle die Parabel, ausser in dem Scheitel $A$, in den drei Punkten $E$, $E'$, $E''$ schneidet. Zieht man jetzt die Geraden $AE$, $AE'$, $AE''$ und legt durch den gegebenen Punkt $P$ die in der Figur durch stärkere Linien ausgezeichneten Geraden, welche auf $AE$, $AE'$, $AE''$ senkrecht stehen, so sind diese Senkrechten die gesuchten Normalen, wie aus dem in §. 3. bewiesenen Satze auf der Stelle erhellet.

Dass man in allen Fällen bei der Ausführung dieser Construction auf die Vorzeichen gehörig Rücksicht zu nehmen hat, welche allen zur Anwendung kommenden Grössen in Folge des zu Grunde gelegten Coordinatensystems zukommen, versteht sich ganz von selbst und bedarf kaum noch einer besonderen Bemerkung, gilt aber auch für das Folgende.

## §. 7.

Im Falle der beiden anderen Kegelschnitte wird es hier völ-

lig genügen, die Ausführung der Construction der Normalen nur für einen derselben, etwa für die Ellipse, zu zeigen, weil für die Hyperbel die anzuwendende Methode im Wesentlichen vollständig dieselbe ist.

Zuvörderst ist zu bemerken, dass im vorliegenden Falle die Charakteristik $n$ gegeben sein muss. Soll aber die Construction den Namen einer rein geometrischen verdienen, so darf $n$ nicht als eine Zahl gegeben sein, weil ja diese Zahl auch eine Irrationalzahl sein könnte. Es muss vielmehr $n$ durch das Verhältniss zweier bestimmten Geraden ausgedrückt gedacht werden. Bezeichnen wir aber die lineare Entfernung des Scheitels vom Brennpunkte wie früher durch $f$, ferner die lineare Entfernung des Scheitels von der Directrix durch $\lambda$; so ist nach N. T. d. K. S. 68. §. 1.:

$$n = \frac{f}{\lambda}.$$

Auch ist nach N. T. d. K. S. 99. §. 12. Nr. 20), Nr. 21), wenn $a$ und $e$ ihre bekannte Bedeutung haben:

$$n = \frac{e}{a},$$

und man sieht also, dass man immer anzunehmen berechtigt ist, dass die Charakteristik $n$ in der von einer rein geometrischen Construction in Anspruch genommenen Weise ausgedrückt, dargestellt oder gegeben sei.

In der wieder ohne weitere Erläuterung im Ganzen gewiss völlig verständlichen Taf. III. Fig. II. sei aus dem Mittelpunkte $O$ eine Ellipse beschrieben, und $P$ sei der gegebene Punkt, durch welchen an dieselbe Normalen gezogen werden sollen, so dass also:

$$\alpha' = +OQ, \quad \beta' = +PQ$$

und $f' = -OF$ ist. Nach 25) ist:

$$\tfrac{1}{2}q' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha'\beta'}{f'},$$

also, weil

$$n = \frac{e}{a}$$

ist:

$$\tfrac{1}{2}q' = \frac{a}{e} \cdot \frac{\alpha'\beta'}{f'},$$

wobei man des Folgenden wegen zu beachten hat, dass im vorliegenden Falle $q'$ negativ ist. In dem Brennpunkte $F'$ errichte man auf die Axe $AA'$ ein Perpendikel $F'R=PQ$, und ziehe die Gerade $OR$, welche $PQ$ in $S$ schneidet; so ist:

$$OF' : OQ = F'R : SQ,$$

also:

$$SQ = \frac{OQ.F'R}{OF'} = \frac{OQ.PQ}{OF} = -\frac{\alpha'\beta'}{f'}.$$

Durch $S$ ziehe man mit $AA'$ eine Parallele, welche $F'R$ in $T$ schneidet und ziehe die Gerade $OT$, welche die in $A'$ auf $AA'$ errichtete Senkrechte in $U$ schneidet; so ist:

$$OF' : OA' = F'T : A'U,$$

also:

$$A'U = \frac{OA'.F'T}{OF'} = \frac{OA}{OF}.SQ = -\frac{a}{e}.\frac{\alpha'\beta'}{f'},$$

folglich nach dem Obigen:

$$A'U = -\tfrac{1}{2}q', \quad q' = -2.A'U.$$

Macht man nun $A'V=2.A'U$, so ist $q'=-A'V$, und wenn man jetzt durch $V$ mit $AA'$ eine Parallele $GH$ zieht, so muss der Mittelpunkt des nach §. 3. zu beschreibenden Kreises in der Geraden $GH$ liegen. Nun ziehe man durch den gegebenen Punkt $P$ den Durchmesser $OP$ der Ellipse, fälle auf denselben von dem Scheitel $A$ eine Senkrechte, welche die Ellipse zum zweiten Male in $K$ schneidet, und lege auf bekannte Weise durch $K$ an die Ellipse die Berührende $MN$. Beschreibt man jetzt über $AA'$ als Durchmesser einen Kreis, welcher die Berührende $MN$ in den Punkten $J$ und $L$ schneidet, so sind diese beiden Punkte nach dem in §. 4. bewiesenen Satze auch Punkte des nach §. 3. zu beschreibenden Kreises, oder $JL$ ist eine Sehne dieses Kreises. Errichtet man jetzt auf $JL$ in ihrer Mitte eine Senkrechte, so ist deren Durchschnittspunkt $C$ mit der Geraden $GH$ der Mittelpunkt des nach §. 3. zu beschreibenden Kreises, welcher also nun leicht beschrieben werden kann, wenn man aus $C$ als Mittelpunkt durch einen der beiden von $C$ gleich weit entfernten Punkte $J$ und $L$ einen Kreis beschreibt, der dann natürlich auch durch den anderen Punkt gehen muss. Zieht man nun von dem Scheitel $A$ nach den Durchschnittspunkten $E$ und $E'$ dieses letzteren Kreises mit der Ellipse die Geraden $AE$ und $AE'$, und fällt auf dieselben von dem Punkte $P$ die in der Figur durch stärkere Linien ausgezeich-

neten Senkrechten, so sind diese Senkrechten, wie unmittelbar aus dem in §. 3. bewiesenen Satze folgt, die gesuchten Normalen.

## §. 8.

Aber auch ohne Anwendung des in §. 4. bewiesenen Satzes lassen sich die Normalen construiren, wie jetzt noch gezeigt werden soll.

Nach 25) und 23) ist:

$$p' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha'^2 - (1-n^2)\beta'^2}{f'}, \quad q' = \frac{2}{n} \cdot \frac{\alpha'\beta'}{f'}$$

und:

$$r^2 = p^2 + q^2 - \frac{4(1-n^2)\beta^2}{n^2}.$$

Also ist:

$$p' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha'^2}{f'} + n\frac{\beta'^2}{f'} - \frac{1}{n} \cdot \frac{\beta'^2}{f'}, \quad \tfrac{1}{2}q' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha'\beta'}{f'};$$

folglich, weil

$$n = \frac{e}{a}, \quad \frac{1}{n} = \frac{a}{e}$$

ist:

$$p' = \frac{a}{e} \cdot \frac{\alpha'^2}{f'} + \frac{e}{a} \cdot \frac{\beta'^2}{f'} - \frac{a}{e} \cdot \frac{\beta'^2}{f'}, \quad \tfrac{1}{2}q' = \frac{a}{e} \cdot \frac{\alpha'\beta'}{f'}.$$

In Taf. III. Fig. III. sind die Linien $OM$, $ON$ so aufgetragen worden, dass

$$OM : ON = e : a$$

ist, und es ist also:

$$p' = \frac{ON}{OM} \cdot \frac{\alpha'^2}{f'} + \frac{OM}{ON} \cdot \frac{\beta'^2}{f'} - \frac{ON}{OM} \cdot \frac{\beta'^2}{f'}, \quad \tfrac{1}{2}q' = \frac{ON}{OM} \cdot \frac{\alpha'\beta'}{f'}.$$

Man mache nun

$$OB = OQ, \qquad OD = PQ$$

und beschreibe zwei durch $F$, $B$ und $F$, $D$ gehende Kreise, deren Mittelpunkte in $AA'$ liegen, wie die Figur zeigt, und deren Durchschnittspunkte mit $AA'$ die Punkte $R$, $S$ sind; dann ist offenbar:

$$OR = -\frac{\alpha'^2}{f'}, \quad OS = -\frac{\beta'^2}{f'}.$$

Hierauf ziehe man $MR$ und mit derselben durch $N$ die Parallele $NT$, welche $AA'$ in $T$ schneidet, so ist:

$$OT = \frac{ON}{OM} \cdot OR = -\frac{ON}{OM} \cdot \frac{\alpha'^2}{f'}.$$

Ferner ziehe man $MS$ und mit derselben durch $N$ die Parallele $NU$, welche $AA'$ in $U$ schneidet, so ist:

$$OU = \frac{ON}{OM} \cdot OS = -\frac{ON}{OM} \cdot \frac{\beta'^2}{f'}.$$

Endlich ziehe man $NS$ und mit derselben durch $M$ die Parallele $MV$, welche $AA'$ in $V$ schneidet, so ist:

$$OV = \frac{OM}{ON} \cdot OS = -\frac{OM}{ON} \cdot \frac{\beta'^2}{f'}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$p' = -OT - OV + OU = OU - (OT + OV).$$

Macht man nun

$$OW = OT + OV, \quad WX = OU;$$

so ist offenbar

$$OX = OU - (OT + OV),$$

also:

$$p' = +OX.$$

Ganz wie im vorhergehenden Paragraphen construirt man, wie auch in Taf. III. Fig. III. ohne Beifügung von Buchstaben angedeutet worden ist, die Coordinate $q'$, und bestimmt also nun leicht den Mittelpunkt $C$ des nach §. 3. zu beschreibenden Kreises.

Um nun ferner den Halbmesser $r$ dieses Kreises zu construiren, bemerke man, dass nach dem Obigen:

$$r^2 = p^2 + q^2 - \left\{\left(\frac{2\beta}{n}\right)^2 - (2\beta)^2\right\},$$

also:

$$r^2 = p^2 + q^2 - \left\{\left(\frac{a.2\beta'}{e}\right)^2 - (2\beta')^2\right\}$$

oder:

$$r^2 = p^2 + q^2 - \left\{\left(\frac{ON.2\beta'}{OM}\right)^2 - (2\beta')^2\right\}$$

ist. Man mache nun $OY = 2.PQ = 2\beta'$, ziehe die Gerade $MY$

und mit derselben durch $N$ die Parallele $NZ$, welche $AA'$ in $Z$ schneidet, so ist:

$$OZ = \frac{ON.OY}{OM} = \frac{ON.2\beta'}{OM}.$$

Hierauf beschreibe man über $OZ$ als Durchmesser einen Kreis, trage in denselben $OG = OY = 2\beta'$ ein und ziehe $GZ$, so ist:

$$GZ^2 = OZ^2 - OG^2 = \left(\frac{ON.2\beta'}{OM}\right)^2 - (2\beta')^2,$$

folglich nach dem Obigen:

$$r^2 = p^2 + q^2 - GZ^2.$$

Nun ziehe man $AC$, beschreibe über dieser Geraden als Durchmesser einen Kreis, trage in denselben $AH = GZ$ ein und ziehe $CH$, so ist:

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = AX^2 + CX^2 - GZ^2,$$

also offenbar *)

$$CH^2 = p^2 + q^2 - GZ^2,$$

und daher nach dem Obigen $r = CH$. Man beschreibt also nun aus $C$ als Mittelpunkt mit $CH$ als Halbmesser einen Kreis, welcher in diesem Falle die gegebene Ellipse in den zwei Punkten $E$ und $E'$ schneidet; dann zieht man $AE$ und $AE'$ und fällt von $P$ auf $AE$ und $AE'$ Perpendikel, welche in Taf III. Fig. III. durch stärkere Linien vor den übrigen ausgezeichnet worden sind, so sind diese Perpendikel die gesuchten Normalen.

Die vollständige Uebereinstimmung der durch die beiden in Taf. III. Fig. II. und Taf. III. Fig. III. ausgeführten Constructionen erhaltenen Resultate mit einander wird man sogleich bemerken.

Für die Hyperbel ist die Construction von den hier für die Ellipse ausgeführten Constructionen nicht wesentlich verschieden, wie schon bemerkt worden ist.

Die gerade Linie und der Kreis reichen also in allen Fällen vollständig hin, um die berühmte Aufgabe zu lösen.

---

## Bemerkung.

Es ist in diesem Aufsatze durchaus nur meine Absicht gewesen, das berühmte Problem von den durch einen gegebenen Punkt

*) Es wird kaum nöthig sein, daran zu erinnern, dass $q = q'$ ist.

an einen Kegelschnitt zu ziehenden Normalen bloss durch die Gerade und den Kreis in völliger Allgemeinheit zu lösen, und ich lasse mich der Kürze wegen auf gewisse besondere Fälle, in denen sich einfachere Constructionen geben lassen, für jetzt gar nicht ein, hoffe aber auf Fälle dieser Art später zurückzukommen. Dass auch die im Obigen gegebenen ganz allgemeinen Formeln in solchen besonderen Fällen oft bedeutend einfacher ausfallen, versteht sich von selbst. Liegt etwa der gegebene Punkt $P$ im Falle der Ellipse in der Nebenaxe derselben, so ist $\alpha' = 0$, und folglich nach dem Obigen in §. 8.:

$$p' = \left(\frac{e}{a} - \frac{a}{e}\right)\frac{\beta'^2}{f'}, \quad q' = 0.$$

Liegt in demselben Falle der Punkt $P$ in der Hauptaxe, so ist $\beta' = 0$, also nach dem Obigen in §. 8.:

$$p' = \frac{a}{e} \cdot \frac{\alpha'^2}{f'}, \quad q' = 0.$$

Das weitere Eingehen auf solche besondere Fälle liegt aber, wie schon erinnert, hier für jetzt gar nicht in meiner Absicht.

---

## VI.

## Der Kegelschnitt der neun Punkte.

Von

dem Herausgeber.

---

### §. 1.

So wie der Kreis der neun Punkte hat in neuester Zeit auch der Kegelschnitt der neun Punkte die Aufmerksamkeit der Mathematiker in einem bedeutenden Grade auf sich gezogen; insbesondere haben mehrere ausgezeichnete italienische Mathematiker, wie

die Herren Battaglini, Beltrami, Trudi u. A., sich der Untersuchung dieses Kegelschnitts mit ausgezeichnetem analytischen Geschick und grossem Erfolge gewidmet, und ihre betreffenden Arbeiten verdienen die grösste Beachtung. Allen diesen schönen Untersuchungen sind indess neuere Coordinatensysteme zu Grunde gelegt worden, und für **rechtwinklige** Coordinaten ist meines Wissens die **allgemeine** Gleichung des Kegelschnitts der neun Punkte noch von Niemand entwickelt worden. Da aber dieses Coordinatensystem doch immer das „Système classique", wie es mit Recht von einem der neuesten französischen Schriftsteller*) genannt wird, ist und bleiben wird: so habe ich mir die Entwickelung der allgemeinen Gleichung des Kegelschnitts der neun Punkte für das genannte classische Coordinatensystem in dieser Abhandlung zur Aufgabe gemacht, und will die Resultate meiner Untersuchung im Folgenden mittheilen, da ich die von mir gefundenen Gleichungen, wenn sie auch nicht einfach sind, ihrer Form wegen doch der Mittheilung wohl werth halte. Viel einfacher gestaltet sich freilich die Sache, wenn man ein gewisses specielles schiefwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legt, wie ich dies schon vor vielen Jahren in meinen „Elementen der analytischen Geometrie. Zweiter Theil. Leipzig. 1839. S. 122. §. 40." gezeigt habe, worauf ich am Schluss dieser Abhandlung zurückkommen werde, deren Zweck, wie schon gesagt, die Zugrundelegung eines solchen speciellen Coordinatensystems nicht war.

Vorher erlaube ich mir jedoch die Titel der nach meiner Meinung vorzüglich hierher gehörenden und hauptsächlich zu be-

---

*) Les coordonnées de Descartes étant seules usitées dans nos Lycées et dans nos Ecoles, la plupart des hommes spéciaux qui, par position ou par goût, s'adonnent à la science, ne renoncent pas volontiers à des procédés qui leur sont familiers, et peuvent reculer devant l'adoption des nouveaux artifices, si ingénieux qu'ils soient, de la Géométrie moderne (Études analytiques sur la Théorie générale des courbes planes par M. Félix Lucas. Paris 1864. Préface, ein Werk, welches von den bedeutendsten französischen Mathematikern sehr gerühmt wird). Der Gebrauch der cartesischen Coordinaten wird als „procédés classiques de Descartes" bezeichnet. — Wir wünschen sehr, dass die neuen Coordinatensysteme immer mehr Eingang und Anwendung finden mögen, und verweisen deshalb namentlich auf die unten genannten Schriften ausgezeichneter italienischer Mathematiker. Auch s. m. unsere Abhandlung: „Das System der Dreilinien-Coordinaten in allgemeiner analytischer Entwickelung" im Archiv Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. S. 389.

achtenden Abhandlungen der oben genannten trefflichen italienischen Mathematiker besonders namhaft zu machen, und zu deren in allen Beziehungen lehrreichem Studium recht sehr einzuladen:

Sopra alcune proprietà delle linee di secondo grado per G. Battaglini (Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli. Fascicolo 1°. — Maggio 1862).

Nota sopra alcune questioni di Geometria per G. Battaglini (Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli. Fascicolo 5°. — Settembre 1862).

Intorno alle coniche di nove punti e ad alcune quistioni che ne dipendono. Nota del Prof. Eugenio Beltrami. (Estratta dalla Serie II. Vol. II. delle Mem. dell' Accad. delle Scienze dell' Istituto di Bologna). Bologna 1863.

Sulle coniche di nove punti. Nota di Eugenio Beltrami (Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università Italiane. Anno I. Aprile 1863. p. 109. Napoli).

Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti, per Eugenio Beltrami (Giornale di Matematiche etc. Anno I. Luglio 1863. p. 208. Dicembre 1863. p. 354. Napoli).

Intorno ad alcune proprietà del cerchio de nove punti. Nota di N. Trudi (Giornale di Matematiche etc. Anno I. Gennaio 1863. p. 29. Napoli).

## §. 2.

Es handelt sich hier um die allgemeine Bestimmung des geometrischen Orts der Mittelpunkte aller der Kegelschnitte, welche sich durch vier gegebene oder feste Punkte legen lassen, und insbesondere um die Entwickelung der allgemeinen Gleichung dieses Orts für rechtwinklige Coordinaten, wobei, was hier ein für alle Mal bemerkt wird, natürlich nur solche Kegelschnitte zur Betrachtung kommen, die einen Mittelpunkt haben.

Die vier gegebenen oder festen Punkte seien

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3$$

und ihre Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der $xy$ seien beziehungsweise:

$$x_0, y_0;\quad x_1, y_1;\quad x_2, y_2;\quad x_3, y_3.$$

Durch den Punkt $A_0$, der natürlich unter den vier gegebenen Punkten ganz beliebig gewählt werden kann, denken wir uns ein neues, dem primitiven Systeme der $xy$ paralleles Coordinatensystem der $uv$ gelegt, und bezeichnen die Coordinaten der Punkte

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

in Bezug auf dieses neue System beziehungsweise durch:

$$u_1, v_1;\quad u_2, v_2;\quad u_3, v_3;$$

ihre polaren Coordinaten in Bezug auf dasselbe System durch:

$$\alpha_1, \varrho_1;\quad \alpha_2, \varrho_2;\quad \alpha_3, \varrho_3;$$

wo also:

$$1)\ldots\ldots\begin{cases} u_1 = \varrho_1 \cos\alpha_1, & v_1 = \varrho_1 \sin\alpha_1; \\ u_2 = \varrho_2 \cos\alpha_2, & v_2 = \varrho_2 \sin\alpha_2; \\ u_3 = \varrho_3 \cos\alpha_3, & v_3 = \varrho_3 \sin\alpha_3 \end{cases}$$

ist.

Durch die vier festen Punkte

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

denken wir uns jetzt einen beliebigen Kegelschnitt, der einen *Mittelpunkt* hat, gelegt, und nehmen dessen Axen als ein ferneres neues rechtwinkliges Coordinatensystem der $XY$ an, in Bezug auf welches wir die Coordinaten der vier festen Punkte beziehungsweise durch

$$X_0, Y_0;\quad X_1, Y_1;\quad X_2, Y_2;\quad X_3, Y_3$$

bezeichnen. Die Annahme des positiven Theils der Axe der $X$ ist willkührlich; der positive Theil der Axe der $Y$ muss aber immer so angenommen werden, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der $X$ durch den rechten Winkel $(XY)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $Y$ zu gelangen, in demselben Sinne bewegen muss, in welchem man sich bewegen muss, um von den positiven Theilen der Axen der $x$, $u$ durch die rechten Winkel $(xy)$, $(uv)$ hindurch zu den positiven Theilen der Axen der $y$, $v$ zu gelangen. Von dem Mittelpunkte des Kegelschnitts oder dem Anfange der $XY$ denken wir uns eine mit den positiven Theilen der Axen der $x$, $u$ parallele und gleich

gerichtete Gerade ausgehend, und bezeichnen den von dem positiven Theile der Axe der $X$ mit dieser Geraden eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von der in Rede stehenden Geraden an in demselben Sinne von 0 bis 360° zählen, in welchem man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der $x$ oder $u$ an durch den rechten Winkel $(xy)$ oder $(uv)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ oder $v$ zu gelangen, durch $\theta$.

Endlich denken wir uns durch den Punkt $A_0$ als Anfang ein dem System der $XY$ paralleles Coordinatensystem der $X'Y'$ gelegt, und bezeichnen die Coordinaten der Punkte

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

in diesem Systeme beziehungsweise durch

$$X_1', \ Y_1'; \quad X_2', \ Y_2'; \quad X_3', \ Y_3'.$$

Dann haben wir nach den bekannten Formeln der Coordinatenverwandlung offenbar die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_1 &= X_1'\cos\theta - Y_1'\sin\theta, & v_1 &= X_1'\sin\theta + Y_1'\cos\theta; \\ u_2 &= X_2'\cos\theta - Y_2'\sin\theta, & v_2 &= X_2'\sin\theta + Y_2'\cos\theta; \\ u_3 &= X_3'\cos\theta - Y_3'\sin\theta, & v_3 &= X_3'\sin\theta + Y_3'\cos\theta; \end{aligned}$$

aus denen sehr leicht:

$$\begin{aligned} X_1' &= u_1\cos\theta + v_1\sin\theta, & Y_1' &= -u_1\sin\theta + v_1\cos\theta; \\ X_2' &= u_2\cos\theta + v_2\sin\theta, & Y_2' &= -u_2\sin\theta + v_2\cos\theta; \\ X_3' &= u_3\cos\theta + v_3\sin\theta, & Y_3' &= -u_3\sin\theta + v_3\cos\theta \end{aligned}$$

folgt. Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten hat man ferner die Gleichungen:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 + X_1', & Y_1 &= Y_0 + Y_1'; \\ X_2 &= X_0 + X_2', & Y_2 &= Y_0 + Y_2'; \\ X_3 &= X_0 + X_3', & Y_3 &= Y_0 + Y_3'; \end{aligned}$$

also ist nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 + u_1\cos\theta + v_1\sin\theta, & Y_1 &= Y_0 - u_1\sin\theta + v_1\cos\theta; \\ X_2 &= X_0 + u_2\cos\theta + v_2\sin\theta, & Y_2 &= Y_0 - u_2\sin\theta + v_2\cos\theta; \\ X_3 &= X_0 + u_3\cos\theta + v_3\sin\theta, & Y_3 &= Y_0 - u_3\sin\theta + v_3\cos\theta; \end{aligned}$$

folglich nach 1):

$$2) \quad \begin{cases} X_1 = X_0 + \varrho_1\cos(\alpha_1 - \theta), & Y_1 = Y_0 + \varrho_1\sin(\alpha_1 - \theta); \\ X_2 = X_0 + \varrho_2\cos(\alpha_2 - \theta), & Y_2 = Y_0 + \varrho_2\sin(\alpha_2 - \theta); \\ X_3 = X_0 + \varrho_3\cos(\alpha_3 - \theta), & Y_3 = Y_0 + \varrho_3\sin(\alpha_3 - \theta). \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunkts des Kegelschnitts in dem primitiven System der $xy$ durch $\xi$, $\eta$; so haben wir nach den bekannten Formeln der Coordinatenverwandlung offenbar die folgenden Gleichungen:

$$x_0 = \xi + X_0 \cos\theta - Y_0 \sin\theta,$$
$$y_0 = \eta + X_0 \sin\theta + Y_0 \cos\theta;$$

also:

$$3) \quad \begin{cases} \xi = x_0 - X_0 \cos\theta + Y_0 \sin\theta, \\ \eta = y_0 - X_0 \sin\theta - Y_0 \cos\theta; \end{cases}$$

oder:

$$x_0 - \xi = X_0 \cos\theta - Y_0 \sin\theta,$$
$$y_0 - \eta = X_0 \sin\theta + Y_0 \cos\theta;$$

und folglich:

$$4) \quad \begin{cases} X_0 = \phantom{-}(x_0 - \xi)\cos\theta + (y_0 - \eta)\sin\theta, \\ Y_0 = -(x_0 - \xi)\sin\theta + (y_0 - \eta)\cos\theta. \end{cases}$$

Legen wir nun, was offenbar verstattet ist, im Falle der Hyperbel die Axe der $X$ immer in deren Hauptaxe, und lassen im Folgenden die oberen Zeichen dem Falle der Ellipse, die unteren dem Falle der Hyperbel entsprechen; so haben wir, weil der Kegelschnitt durch die vier festen Punkte

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

oder

$$(X_0 Y_0), \quad (X_1 Y_1), \quad (X_2 Y_2), \quad (X_3 Y_3)$$

geht, offenbar in bekannter Bezeichnung die folgenden Gleichungen:

$$5) \quad \begin{cases} \left(\frac{X_0}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{Y_0}{b}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{X_1}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{Y_1}{b}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{X_2}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{Y_2}{b}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{X_3}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{Y_3}{b}\right)^2 = 1; \end{cases}$$

also nach 2):

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{X_0}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{Y_0}{b}\right)^2 = 1, \\ \left\{\frac{X_0 + \varrho_1\cos(\alpha_1-\theta)}{a}\right\}^2 \pm \left\{\frac{Y_0 + \varrho_1\sin(\alpha_1-\theta)}{b}\right\}^2 = 1, \\ \left\{\frac{X_0 + \varrho_2\cos(\alpha_2-\theta)}{a}\right\}^2 \pm \left\{\frac{Y_0 + \varrho_2\sin(\alpha_2-\theta)}{b}\right\}^2 = 1, \\ \left\{\frac{X_0 + \varrho_3\cos(\alpha_3-\theta)}{a}\right\}^2 \pm \left\{\frac{Y_0 + \varrho_3\sin(\alpha_3-\theta)}{b}\right\}^2 = 1; \end{array}\right.$$

folglich, wenn man der Kürze wegen

$$7)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \varepsilon = \pm\frac{a^2}{b^2}$$

setzt, durch Subtraction der ersten Gleichung von den drei letzten:

8)

$$\{2X_0 + \varrho_1\cos(\theta-\alpha_1)\}\cos(\theta-\alpha_1) = \varepsilon\{2Y_0 - \varrho_1\sin(\theta-\alpha_1)\}\sin(\theta-\alpha_1),$$
$$\{2X_0 + \varrho_2\cos(\theta-\alpha_2)\}\cos(\theta-\alpha_2) = \varepsilon\{2Y_0 - \varrho_2\sin(\theta-\alpha_2)\}\sin(\theta-\alpha_2),$$
$$\{2X_0 + \varrho_3\cos(\theta-\alpha_3)\}\cos(\theta-\alpha_3) = \varepsilon\{2Y_0 - \varrho_3\sin(\theta-\alpha_3)\}\sin(\theta-\alpha_3);$$

oder:

9)

$$2X_0\cos(\theta-\alpha_1) - 2\varepsilon Y_0\sin(\theta-\alpha_1) = -\varrho_1\{\cos(\theta-\alpha_1)^2 + \varepsilon\sin(\theta-\alpha_1)^2\},$$
$$2X_0\cos(\theta-\alpha_2) - 2\varepsilon Y_0\sin(\theta-\alpha_2) = -\varrho_2\{\cos(\theta-\alpha_2)^2 + \varepsilon\sin(\theta-\alpha_2)^2\},$$
$$2X_0\cos(\theta-\alpha_3) - 2\varepsilon Y_0\sin(\theta-\alpha_3) = -\varrho_3\{\cos(\theta-\alpha_3)^2 + \varepsilon\sin(\theta-\alpha_3)^2\}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit:

$$\cos(\theta-\alpha_2)\sin(\theta-\alpha_3) - \sin(\theta-\alpha_2)\cos(\theta-\alpha_3) = \sin(\alpha_2-\alpha_3),$$
$$\cos(\theta-\alpha_3)\sin(\theta-\alpha_1) - \sin(\theta-\alpha_3)\cos(\theta-\alpha_1) = \sin(\alpha_3-\alpha_1),$$
$$\cos(\theta-\alpha_1)\sin(\theta-\alpha_2) - \sin(\theta-\alpha_1)\cos(\theta-\alpha_2) = \sin(\alpha_1-\alpha_2);$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

10)

$$\left.\begin{array}{l} \varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\{\cos(\theta-\alpha_1)^2 + \varepsilon\sin(\theta-\alpha_1)^2\} \\ + \varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\{\cos(\theta-\alpha_2)^2 + \varepsilon\sin(\theta-\alpha_2)^2\} \\ + \varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{\cos(\theta-\alpha_3)^2 + \varepsilon\sin(\theta-\alpha_3)^2\} \end{array}\right\} = 0;$$

oder:

11)

$$\left.\begin{aligned}&\varrho_1 \sin(\alpha_2-\alpha_3)\{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\cos 2(\theta-\alpha_1)\}\\ &+\varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\cos 2(\theta-\alpha_2)\}\\ &+\varrho_3 \sin(\alpha_1-\alpha_2)\{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\cos 2(\theta-\alpha_3)\}\end{aligned}\right\}=0;$$

oder, wenn der Kürze wegen:

12)

$$P=\varrho_1 \sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_1)+\varrho_3 \sin(\alpha_1-\alpha_2),$$

$$Q=\varrho_1 \sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos 2\alpha_1+\varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\cos 2\alpha_2+\varrho_3 \sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos 2\alpha_3,$$

$$R=\varrho_1 \sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin 2\alpha_1+\varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin 2\alpha_2+\varrho_3 \sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin 2\alpha_3$$

gesetzt wird:

13) . . . $(1+\varepsilon)P+(1-\varepsilon)(Q\cos 2\theta+R\sin 2\theta)=0$

oder:

14) . . . $(1+\varepsilon)P=-(1-\varepsilon)(Q\cos 2\theta+R\sin 2\theta).$

Drücken wir diese Gleichung auf folgende Art aus:

15) $(P-Q\cos 2\theta-R\sin 2\theta)\varepsilon=-(P+Q\cos 2\theta+R\sin 2\theta),$

und verbinden mit ihr durch Multiplication die erste der Gleichungen 8), nämlich die Gleichung:

$$\{2X_0+\varrho_1\cos(\theta-\alpha_1)\}\cos(\theta-\alpha_1)=\varepsilon\{2Y_0-\varrho_1\sin(\theta-\alpha_1)\}\sin(\theta-\alpha_1);$$

so erhalten wir die Gleichung:

16)

$$(P-Q\cos 2\theta-R\sin 2\theta)\{2X_0+\varrho_1\cos(\theta-\alpha_1)\}\cos(\theta-\alpha_1)$$
$$=-(P+Q\cos 2\theta+R\sin 2\theta)\{2Y_0-\varrho_1\sin(\theta-\alpha_1)\}\sin(\theta-\alpha_1),$$

welche man leicht auf die Form:

17)

$$P\{X_0\cos(\theta-\alpha_1)+Y_0\sin(\theta-\alpha_1)+\tfrac{1}{2}\varrho_1\cos 2(\theta-\alpha_1)\}$$
$$=(Q\cos 2\theta+R\sin 2\theta)\{X_0\cos(\theta-\alpha_1)-Y_0\sin(\theta-\alpha_1)+\tfrac{1}{2}\varrho_1\}$$

bringt. Nach 4) ist aber:

$$X_0=(x_0-x)\cos\theta+(y_0-y)\sin\theta,$$
$$Y_0=-(x_0-x)\sin\theta+(y_0-y)\cos\theta;$$

also:

$$X_0\cos(\theta-\alpha_1)+Y_0\sin(\theta-\alpha_1)=(x_0-x)\cos(2\theta-\alpha_1)+(y_0-\eta)\sin(2\theta-\alpha_1),$$
$$X_0\cos(\theta-\alpha_1)-Y_0\sin(\theta-\alpha_1)=(x_0-x)\cos\alpha_1+(y_0-\eta)\sin\alpha_1;$$

und daher die Gleichung 17):

$$P\{(x_0-x)\cos(2\theta-\alpha_1)+(y_0-\eta)\sin(2\theta-\alpha_1)+\tfrac{1}{2}\varrho_1\cos 2(\theta-\alpha_1)\}$$
$$=(Q\cos 2\theta+R\sin 2\theta)\{(x_0-x)\cos\alpha_1+(y_0-\eta)\sin\alpha_1+\tfrac{1}{2}\varrho_1\},$$

welche Gleichung man leicht auf die folgende Form bringt:

18)

$$\{(P-Q)(x_0-x)\cos\alpha_1-(P+Q)(y_0-\eta)\sin\alpha_1-\tfrac{1}{2}\varrho_1(Q-P\cos 2\alpha_1)\}\cos 2\theta$$
$$=\{(R\cos\alpha_1-P\sin\alpha_1)(x_0-x)+(R\sin\alpha_1-P\cos\alpha_1)(y_0-\eta)+\tfrac{1}{2}\varrho_1(R-P\sin 2\alpha_1)\}\sin 2\theta.$$

So wie hier mit der Gleichung 15) die erste der Gleichungen 8) verbunden wurde, lässt sich natürlich mit der Gleichung 15) auch die zweite der Gleichungen 8) verbinden, wodurch man die Gleichung:

19)

$$\{(P-Q)(x_0-x)\cos\alpha_2-(P+Q)(y_0-\eta)\sin\alpha_2-\tfrac{1}{2}\varrho_2(Q-P\cos 2\alpha_2)\}\cos 2\theta$$
$$=\{(R\cos\alpha_2-P\sin\alpha_2)(x_0-x)+(R\sin\alpha_2-P\cos\alpha_2)(y_0-\eta)+\tfrac{1}{2}\varrho_2(R-P\sin 2\alpha_2)\}\sin 2\theta$$

erhält. Stellt man die Seiten dieser Gleichung um und multiplicirt dann die Gleichung 18) mit ihr, so erhält man, weil diese Gleichungen natürlich unabhängig von bestimmten Werthen von $\theta$ gelten, die Gleichung:

20)

$$\{(P-Q)(x_0-x)\cos\alpha_1-(P+Q)(y_0-\eta)\sin\alpha_1-\tfrac{1}{2}\varrho_1(Q-P\cos 2\alpha_1)\}$$
$$\times\{(R\cos\alpha_2-P\sin\alpha_2)(x_0-x)+(R\sin\alpha_2-P\cos\alpha_2)(y_0-\eta)+\tfrac{1}{2}\varrho_2(R-P\sin 2\alpha_2)\}$$
$$=\{(P-Q)(x_0-x)\cos\alpha_2-(P+Q)(y_0-\eta)\sin\alpha_2-\tfrac{1}{2}\varrho_2(Q-P\cos 2\alpha_2)\}$$
$$\times\{(R\cos\alpha_1-P\sin\alpha_1)(x_0-x)+(R\sin\alpha_1-P\cos\alpha_1)(y_0-\eta)+\tfrac{1}{2}\varrho_1(R-P\sin 2\alpha_1)\}$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes $(x\eta)$ in dem durch den Punkt $A_0$ als Anfang parallel mit dem primitiven Systeme

der $xy$ gelegten Coordinatensysteme durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$x=x_0+\mathfrak{x},\quad y=y_0+\mathfrak{y};\quad x_0-x=-\mathfrak{x},\quad y_0-y=-\mathfrak{y};$$

also die obige Gleichung:

21)

$$\begin{aligned}&\{(P-Q)\mathfrak{x}\cos\alpha_1-(P+Q)\mathfrak{y}\sin\alpha_1+\tfrac{1}{2}\varrho_1(Q-P\cos 2\alpha_1)\}\\ &\times\{(R\cos\alpha_2-P\sin\alpha_2)\mathfrak{x}+(R\sin\alpha_2-P\cos\alpha_2)\mathfrak{y}-\tfrac{1}{2}\varrho_2(R-P\sin 2\alpha_2)\}\\ &=\{(P-Q)\mathfrak{x}\cos\alpha_2-(P+Q)\mathfrak{y}\sin\alpha_2+\tfrac{1}{2}\varrho_2(Q-P\cos 2\alpha_2)\}\\ &\times\{(R\cos\alpha_1-P\sin\alpha_1)\mathfrak{x}+(R\sin\alpha_1-P\cos\alpha_1)\mathfrak{y}-\tfrac{1}{2}\varrho_1(R-P\sin 2\alpha_1)\}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung, oder die Gleichung 20), ist die Gleichung des geometrischen Orts der Mittelpunkte aller durch die vier gegebenen Punkte gelegten Kegelschnitte, und da diese Gleichungen in Bezug auf $x$, $y$ oder $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ offenbar vom zweiten Grade sind, so ist der Ort selbst ein Kegelschnitt.

## §. 3.

Wir müssen nun aber die Gleichungen 20) und 21) auf die gewöhnliche Form der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen bringen. Bringt man zu dem Ende die Gleichung 20) auf Null, indem man alle Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auf die linke Seite bringt und die Gleichung gehörig nach den veränderlichen Grössen ordnet, so findet man Folgendes.

Der Coefficient von

$$(x_0-x)^2$$

ist, wie sich mittelst sehr leichter Rechnung ergiebt:

$$P(P-Q)\sin(\alpha_1-\alpha_2).$$

Der Coefficient von

$$(y_0-y)^2$$

ist, wie man mittelst eben so leichter Rechnung findet:

$$P(P+Q)\sin(\alpha_1-\alpha_2).$$

Der Coefficient von

$$(x_0-x)(y_0-y)$$

ist, wie sich gleichfalls durch sehr einfache Rechnung ergiebt:

$$-2PR\sin(\alpha_1-\alpha_2).$$

Für den Coefficienten von

$$x_0 - x$$

erhält man zuvörderst leicht den Ausdruck:

$$-\tfrac{1}{2}\varrho_1 P\left\{\begin{array}{l} P\sin(\alpha_2-2\alpha_1) \\ -Q(\sin\alpha_2-\sin 2\alpha_1\cos\alpha_2) \\ +R(\cos\alpha_2-\cos 2\alpha_1\cos\alpha_2)\end{array}\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}\varrho_2 P\left\{\begin{array}{l} P\sin(\alpha_1-2\alpha_2) \\ -Q(\sin\alpha_1-\sin 2\alpha_2\cos\alpha_1) \\ +R(\cos\alpha_1-\cos 2\alpha_2\cos\alpha_1)\end{array}\right\}.$$

Führt man nun aber für $P$, $Q$, $R$ ihre Ausdrücke aus 12) ein, so erhält man:

$$\begin{array}{l} P\sin(\alpha_2-2\alpha_1) \\ -Q(\sin\alpha_2-\sin 2\alpha_1\cos\alpha_2) \\ +R(\cos\alpha_2-\cos 2\alpha_1\cos\alpha_2)\end{array}$$

$$\begin{aligned} = {} & \varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\{\sin\alpha_2-\sin(2\alpha_1-\alpha_2)+\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_2\} \\ & -\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{\sin(2\alpha_1-\alpha_2)-\sin(2\alpha_3-\alpha_2)-\sin 2(\alpha_1-\alpha_3)\cos\alpha_2\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{array}{l} P\sin(\alpha_1-2\alpha_2) \\ -Q(\sin\alpha_1-\sin 2\alpha_2\cos\alpha_1) \\ +R(\cos\alpha_1-\cos 2\alpha_2\cos\alpha_1)\end{array}$$

$$\begin{aligned} = {} & \varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\{\sin\alpha_1-\sin(2\alpha_2-\alpha_1)-\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_1\} \\ & -\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{\sin(2\alpha_2-\alpha_1)-\sin(2\alpha_3-\alpha_1)-\sin 2(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1\}. \end{aligned}$$

Also ist unser Coefficient:

$$-\tfrac{1}{2}\varrho_1 P\left\{\begin{array}{l} \varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\sin\alpha_2-\sin(2\alpha_1-\alpha_2)+\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_2] \\ -\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\sin(2\alpha_1-\alpha_2)-\sin(2\alpha_3-\alpha_2)-\sin 2(\alpha_1-\alpha_3)\cos\alpha_2]\end{array}\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}\varrho_2 P\left\{\begin{array}{l} \varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\sin\alpha_1-\sin(2\alpha_2-\alpha_1)-\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_1] \\ -\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\sin(2\alpha_2-\alpha_1)-\sin(2\alpha_3-\alpha_1)-\sin 2(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1]\end{array}\right\}.$$

Es ist aber:

$$\sin\alpha_2-\sin(2\alpha_1-\alpha_2)+\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_2 = 2\sin(\alpha_1-\alpha_2)^2\sin\alpha_2,$$

$$\sin\alpha_1-\sin(2\alpha_2-\alpha_1)-\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_1 = 2\sin(\alpha_1-\alpha_2)^2\sin\alpha_1,$$

$$\sin(2\alpha_1-\alpha_2)-\sin(2\alpha_3-\alpha_2)-\sin 2(\alpha_1-\alpha_3)\cos\alpha_2$$
$$=-2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\{\cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2\},$$
$$\sin(2\alpha_2-\alpha_1)-\sin(2\alpha_3-\alpha_1)-\sin 2(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1$$
$$=2\sin(\alpha_2-\alpha_3)\{\cos(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1\};$$

also unser Coefficient:

$$-P\sin(\alpha_1-\alpha_2)$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2-\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1]\\+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1]\\+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2]\end{array}\right\},$$

oder, weil, wie man leicht findet:

$$\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2-\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1$$
$$=\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)-\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_3$$

ist:

$$-P\sin(\alpha_1-\alpha_2)$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)-\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_3]\\+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1]\\+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2]\end{array}\right\}$$

oder:

$$P\sin(\alpha_1-\alpha_2)$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_3-\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)]\\+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1-\cos(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]\\+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2-\cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)]\end{array}\right\},$$

Für den Coefficienten von

$$y_0-\eta$$

erhält man zuvörderst leicht den Ausdruck:

$$-\tfrac{1}{2}\varrho_1 P\left\{\begin{array}{l}P\cos(\alpha_2-2\alpha_1)\\-Q(\cos\alpha_2-\sin 2\alpha_1\sin\alpha_2)\\-R(\sin\alpha_2+\cos 2\alpha_1\sin\alpha_2)\end{array}\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\varrho_2 P\left\{\begin{array}{l}P\cos(\alpha_1-2\alpha_2)\\-Q(\cos\alpha_1-\sin 2\alpha_2\sin\alpha_1)\\-R(\sin\alpha_1+\cos 2\alpha_2\sin\alpha_1)\end{array}\right\}.$$

Führt man aber für $P$, $Q$, $R$ ihre Ausdrücke aus 12) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&P\cos(\alpha_3-2\alpha_1)\\
&-Q(\cos\alpha_2-\sin 2\alpha_1\sin\alpha_2)\\
&-R(\sin\alpha_2+\cos 2\alpha_1\sin\alpha_2)\\
=&-\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\{\cos\alpha_2-\cos(2\alpha_1-\alpha_2)-\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_2\}\\
&+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{\cos(2\alpha_1-\alpha_2)-\cos(2\alpha_3-\alpha_2)+\sin 2(\alpha_1-\alpha_3)\sin\alpha_2\}
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
&P\cos(\alpha_1-2\alpha_2)\\
&Q(\cos\alpha_1-\sin 2\alpha_2\sin\alpha_1)\\
&-R(\sin\alpha_1+\cos 2\alpha_2\sin\alpha_1)\\
=&-\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\{\cos\alpha_1-\cos(2\alpha_2-\alpha_1)+\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_1\}\\
&+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{\cos(2\alpha_2-\alpha_1)-\cos(2\alpha_3-\alpha_1)+\sin 2(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1\}.
\end{aligned}$$

Also ist unser Coefficient:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\varrho_1 P\\
\times&\left\{\begin{matrix}\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos\alpha_2-\cos(2\alpha_1-\alpha_2)-\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_2]\\ -\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(2\alpha_1-\alpha_2)-\cos(2\alpha_3-\alpha_2)+\sin 2(\alpha_1-\alpha_3)\sin\alpha_2]\end{matrix}\right\}\\
&-\tfrac{1}{2}\varrho_2 P\\
\times&\left\{\begin{matrix}\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos\alpha_1-\cos(2\alpha_2-\alpha_1)+\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_1]\\ -\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(2\alpha_2-\alpha_1)-\cos(2\alpha_3-\alpha_1)+\sin 2(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1]\end{matrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha_2-\cos(2\alpha_1-\alpha_2)-\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_2\\
=\;&2\sin(\alpha_1-\alpha_2)^2\cos\alpha_2,\\
&\cos\alpha_1-\cos(2\alpha_2-\alpha_1)+\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_1\\
=\;&2\sin(\alpha_1-\alpha_2)^2\cos\alpha_1,\\
&\cos(2\alpha_1-\alpha_2)-\cos(2\alpha_3-\alpha_2)+\sin 2(\alpha_1-\alpha_3)\sin\alpha_2\\
=\;&2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\{\sin(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2\},\\
&\cos(2\alpha_2-\alpha_1)-\cos(2\alpha_3-\alpha_1)+\sin 2(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1\\
=&-2\sin(\alpha_2-\alpha_3)\{\sin(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1\};
\end{aligned}$$

also ist unser Coefficient:

$$-P\sin(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}-\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\sin(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2-\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1]\\+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\sin(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1]\\+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\sin(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2]\end{array}\right\},$$

oder, weil, wie man leicht findet:

$$\sin(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2-\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1$$
$$=-[\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)-\cos(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_3]$$

ist:

$$-P\sin(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)-\cos(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_3]\\+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\sin(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1]\\+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\sin(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)-\cos(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2]\end{array}\right\},$$

oder:

$$P\sin(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_3-\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)]\\+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1-\sin(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]\\+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2-\sin(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)]\end{array}\right\}.$$

Für das von

$$x_0-x \quad \text{und} \quad y_0-\eta$$

ganz unabhängige Glied erhält man zuvörderst leicht den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{4}\varrho_1\varrho_2 P\{P\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)-Q(\sin 2\alpha_1-\sin 2\alpha_2)+R(\cos 2\alpha_1-\cos 2\alpha_2)\}.$$

Führt man nun aber für $P$, $Q$, $R$ ihre Ausdrücke aus 12) ein, so bringt man dieses Glied leicht auf die Form:

$$\tfrac{1}{4}\varrho_1\varrho_2\varrho_3 P\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)+\sin 2(\alpha_2-\alpha_3)+\sin 2(\alpha_3-\alpha_1)\},$$

oder, nach einer sehr bekannten Relation, auf die Form:

$$-\varrho_1\varrho_2\varrho_3 P\sin(\alpha_1-\alpha_2).\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1).$$

Wenn $\sin(\alpha_1-\alpha_2)=0$ wäre, so würden offenbar die Punkte $A_0$, $A_1$, $A_2$ in einer geraden Linie liegen, und also durch die vier gegebenen Punkte überhaupt kein Kegelschnitt beschrieben werden können, so dass wir also, wie sich dies auch schon von vorn herein ganz von selbst verstand, annehmen müssen, dass

keine drei der vier gegebenen Punkte in gerader Linie liegen, unter welcher Voraussetzung also $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$ niemals verschwindet. Wenn nun auch die Grösse $P$ nicht verschwindet, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar die folgende merkwürdige Gleichung unseres Kegelschnitts:

22)

$$
\begin{aligned}
&(P-Q)(x_0-x)^2\\
&+(P+Q)(y_0-\eta)^2\\
&-2R(x_0-x)(y_0-\eta)\\
&+\left\{\begin{array}{l}
\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_3-\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)]\\
+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1-\cos(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]\\
+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2-\cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)]
\end{array}\right\}(x_0-x)\\
&+\left\{\begin{array}{l}
\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_3-\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)]\\
+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1-\sin(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]\\
+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2-\sin(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)]
\end{array}\right\}(y_0-\eta)\\
&-\varrho_1\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\
&=0,
\end{aligned}
$$

oder:

23)

$$
\begin{aligned}
&(P-Q)\mathfrak{x}^2\\
&+(P+Q)\mathfrak{y}^2\\
&-2R\mathfrak{x}\mathfrak{y}\\
&-\left\{\begin{array}{l}
\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_3-\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)]\\
+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1-\cos(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]\\
+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2-\cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)]
\end{array}\right\}\mathfrak{x}\\
&-\left\{\begin{array}{l}
\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_3-\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)]\\
+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1-\sin(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]\\
+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2-\sin(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)]
\end{array}\right\}\mathfrak{y}\\
&-\varrho_1\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\
&=0.
\end{aligned}
$$

Führt man nun noch für $P$, $Q$, $R$ ihre bekannten Werthe ein, so wird diese Gleichung:

24)

$$
\begin{aligned}
&2\{\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1^2+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2^2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_3^2\}\mathfrak{X}^2\\
&+2\{\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1^2+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2^2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_3^2\}\mathfrak{Y}^2\\
&-2\{\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin 2\alpha_1+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin 2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin 2\alpha_3\}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\\
&-\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_3-\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)]\\+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1-\cos(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]\\+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2-\cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)]\end{array}\right\}\mathfrak{X}\\
&-\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_3-\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)]\\+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1-\sin(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]\\+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2-\sin(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)]\end{array}\right\}\mathfrak{Y}\\
&-\varrho_1\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\
&=0.
\end{aligned}
$$

Die vollkommene Symmetrie dieser Gleichung lässt nichts zu wünschen übrig.

## §. 4.

Wir waren bei der Entwickelung der im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Gleichungen genöthigt, den Fall $P=0$ von unserer Betrachtung vorläufig auszuschliessen; und wenn sich auch bei dem vorliegenden Gegenstande aus nahe liegenden Gründen erwarten lässt, dass diese Gleichungen ihre Gültigkeit auch noch in dem in Rede stehenden Falle behalten werden, so erfordert doch die mathematische Strenge, dass dies durch eine besondere Betrachtung ausser allem Zweifel gesetzt werde.

Verbinden wir zu dem Ende die beiden ersten der Gleichungen 8), nämlich die beiden Gleichungen:

$$\{2X_0+\varrho_1\cos(\theta-\alpha_1)\}\cos(\theta-\alpha_1)=\varepsilon\{2Y_0-\varrho_1\sin(\theta-\alpha_1)\}\sin(\theta-\alpha_1),$$

$$\{2X_0+\varrho_2\cos(\theta-\alpha_2)\}\cos(\theta-\alpha_2)=\varepsilon\{2Y_0-\varrho_2\sin(\theta-\alpha_2)\}\sin(\theta-\alpha_2),$$

mit einander, und eliminiren die Grösse $\varepsilon$ aus denselben, so erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned}&\{2X_0+\varrho_1\cos(\theta_1-\alpha_1)\}\{2Y_0-\varrho_2\sin(\theta-\alpha_2)\}\cos(\theta-\alpha_1)\sin(\theta-\alpha_2)\\&=\{2X_0+\varrho_2\cos(\theta-\alpha_2)\}\{2Y_0-\varrho_1\sin(\theta-\alpha_1)\}\cos(\theta-\alpha_2)\sin(\theta-\alpha_1);\end{aligned}$$

oder nach gehöriger Entwickelung die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&4\sin(\alpha_1-\alpha_2).X_0Y_0\\
&+2\{\varrho_1\cos(\theta-\alpha_2)\sin(\theta-\alpha_1)^2-\varrho_2\cos(\theta-\alpha_1)\sin(\theta-\alpha_2)^2\}X_0\\
&+2\{\varrho_1\sin(\theta-\alpha_2)\cos(\theta-\alpha_1)^2-\varrho_2\sin(\theta-\alpha_1)\cos(\theta-\alpha_2)^2\}Y_0\\
&-\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin\{2\theta-(\alpha_1+\alpha_2)\}\\
&=0.
\end{aligned}$$

Nach 4) ist aber, wenn man zugleich:

$$x_0-x=-\mathfrak{x},\qquad y_0-y=-\mathfrak{y}$$

setzt:

$$\begin{aligned}
X_0&=-\mathfrak{x}\cos\theta-\mathfrak{y}\sin\theta,\\
Y_0&=\ \ \mathfrak{x}\sin\theta-\mathfrak{y}\cos\theta;
\end{aligned}$$

und daher, wenn man für $X_0$, $Y_0$ diese Ausdrücke in die obige Gleichung einführt, und die Gleichung gehörig entwickelt, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}
&2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin 2\theta.\mathfrak{x}^2\\
&-2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin 2\theta.\mathfrak{y}^2\\
&-4\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos 2\theta.\mathfrak{x}\mathfrak{y}\\
&+\left\{\begin{array}{l}\varrho_1[\cos(2\theta-\alpha_2)-\cos\alpha_2\cos 2(\theta-\alpha_1)]\\-\varrho_2[\cos(2\theta-\alpha_1)-\cos\alpha_1\cos 2(\theta-\alpha_2)]\end{array}\right\}\mathfrak{x}\\
&+\left\{\begin{array}{l}\varrho_1[\sin(2\theta-\alpha_2)-\sin\alpha_2\cos 2(\theta-\alpha_1)]\\-\varrho_2[\sin(2\theta-\alpha_1)-\sin\alpha_1\cos 2(\theta-\alpha_2)]\end{array}\right\}\mathfrak{y}\\
&+\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin\{2\theta-(\alpha_1+\alpha_2)\}\\
&=0,
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
&2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin 2\theta.\mathfrak{x}^2\\
&-2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin 2\theta.\mathfrak{y}^2\\
&-4\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos 2\theta.\mathfrak{x}\mathfrak{y}\\
&+\left\{\begin{array}{l}[\varrho_1(\cos\alpha_2-\cos 2\alpha_1\cos\alpha_2)-\varrho_2(\cos\alpha_1-\cos 2\alpha_2\cos\alpha_1)]\cos 2\theta\\+[\varrho_1(\sin\alpha_2-\sin 2\alpha_1\cos\alpha_2)-\varrho_2(\sin\alpha_1-\sin 2\alpha_2\cos\alpha_1)]\sin 2\theta\end{array}\right\}\mathfrak{x}\\
&-\left\{\begin{array}{l}[\varrho_1(\sin\alpha_2+\cos 2\alpha_1\sin\alpha_2)-\varrho_2(\sin\alpha_1+\cos 2\alpha_2\sin\alpha_1)]\cos 2\theta\\-[\varrho_1(\cos\alpha_2-\sin 2\alpha_1\sin\alpha_2)-\varrho_2(\cos\alpha_1-\sin 2\alpha_2\sin\alpha_1)]\sin 2\theta\end{array}\right\}\mathfrak{y}\\
&+\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{\cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin 2\theta-\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos 2\theta\}\\
&=0.
\end{aligned}$$

Nach 14) ist nun:

$$(1+\varepsilon)P = -(1-\varepsilon)(Q\cos 2\theta + R\sin 2\theta),$$

also für $P=0$, was wir hier voraussetzen:

$$(1-\varepsilon)(Q\cos 2\theta + R\sin 2\theta) = 0.$$

Ist nun nicht $1-\varepsilon=0$, so ist

$$Q\cos 2\theta + R\sin 2\theta = 0,$$

und man kann also offenbar, insofern es sich, wie hier, nur um das Verhältniss der Grössen $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ handelt, im Obigen

$$\sin 2\theta = Q, \qquad \cos 2\theta = -R$$

setzen. Ist $1-\varepsilon=0$, so ist $\varepsilon=1$, also nach 7):

$$\pm\frac{a^2}{b^2} = 1,$$

welches nur der Fall sein kann, wenn man das obere Zeichen nimmt und $a=b$ setzt, also nur in dem Falle, wenn der Kegelschnitt ein Kreis ist. Da aber in diesem Falle eigentlich $\theta$ eine ganz willkührliche Grösse ist, so ist es auch in diesem Falle, und also ganz im Allgemeinen, verstattet, im Obigen

$$\sin 2\theta = Q, \qquad \cos 2\theta = -R$$

zu setzen, wodurch unsere obige Gleichung die folgende Form erhält:

$$\begin{aligned}
&2\sin(\alpha_1-\alpha_2)Q\mathfrak{x}^2\\
&-2\sin(\alpha_1-\alpha_2)Q\mathfrak{y}^2\\
&+4\sin(\alpha_1-\alpha_2)R\mathfrak{x}\mathfrak{y}\\
&+\left\{\begin{array}{l}[\varrho_1(\sin\alpha_2-\sin 2\alpha_1\cos\alpha_2)-\varrho_2(\sin\alpha_1-\sin 2\alpha_2\cos\alpha_1)]Q\\ -[\varrho_1(\cos\alpha_2-\cos 2\alpha_1\cos\alpha_2)-\varrho_2(\cos\alpha_1-\cos 2\alpha_2\cos\alpha_1)]R\end{array}\right\}\mathfrak{x}\\
&+\left\{\begin{array}{l}[\varrho_1(\cos\alpha_2-\sin 2\alpha_1\sin\alpha_2)-\varrho_2(\cos\alpha_1-\sin 2\alpha_2\sin\alpha_1)]Q\\ +[\varrho_1(\sin\alpha_2+\cos 2\alpha_1\sin\alpha_2)-\varrho_2(\sin\alpha_1+\cos 2\alpha_2\sin\alpha_1)]R\end{array}\right\}\mathfrak{y}\\
&+\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{Q\cos(\alpha_1+\alpha_2)+R\sin(\alpha_1+\alpha_2)\}\\
&\qquad\qquad =0.
\end{aligned}$$

Die im vorhergehenden Paragraphen gefundene Gleichung lässt sich, wie aus diesem Paragraphen ganz unmittelbar und ganz von selbst hervorgeht, auf folgende Art schreiben:

$$
\begin{aligned}
&P(P-Q)\sin(\alpha_1-\alpha_2).\mathfrak{x}^2\\
&+P(P+Q)\sin(\alpha_1-\alpha_2).\mathfrak{y}^2\\
&-2PR\sin(\alpha_1-\alpha_2).\mathfrak{x}\mathfrak{y}\\
&+\tfrac{1}{2}P\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\left\{\begin{array}{c}P\sin(\alpha_2-2\alpha_1)\\ -Q(\sin\alpha_2-\sin 2\alpha_1\cos\alpha_2)\\ +R(\cos\alpha_2-\cos 2\alpha_1\cos\alpha_2)\end{array}\right\}\\ -\varrho_2\left\{\begin{array}{c}P\sin(\alpha_1-2\alpha_2)\\ -Q(\sin\alpha_1-\sin 2\alpha_2\cos\alpha_1)\\ +R(\cos\alpha_1-\cos 2\alpha_2\cos\alpha_1)\end{array}\right\}\end{array}\right\}\mathfrak{x}\\
&+\tfrac{1}{2}P\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\left\{\begin{array}{c}P\cos(\alpha_2-2\alpha_1)\\ -Q(\cos\alpha_2-\sin 2\alpha_1\sin\alpha_2)\\ -R(\sin\alpha_2+\cos 2\alpha_1\sin\alpha_2)\end{array}\right\}\\ -\varrho_2\left\{\begin{array}{c}P\cos(\alpha_1-2\alpha_2)\\ -Q(\cos\alpha_1-\sin 2\alpha_2\sin\alpha_1)\\ -R(\sin\alpha_1+\cos 2\alpha_2\sin\alpha_1)\end{array}\right\}\end{array}\right\}\mathfrak{y}\\
&+\tfrac{1}{2}\varrho_1\varrho_2 P\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{P\cos(\alpha_1-\alpha_2)-Q\cos(\alpha_1+\alpha_2)-R\sin(\alpha_1+\alpha_2)\}\\
&\qquad=0.
\end{aligned}
$$

Lässt man nun, wie im vorhergehenden Paragraphen schliesslich geschehen, den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor $P$ weg, multiplicirt mit 2, und setzt dann $P=0$, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&2\sin(\alpha_1-\alpha_2)Q\mathfrak{x}^2\\
&-2\sin(\alpha_1-\alpha_2)Q\mathfrak{y}^2\\
&+4\sin(\alpha_1-\alpha_2)R\mathfrak{x}\mathfrak{y}\\
&+\left\{\begin{array}{l}[\varrho_1(\sin\alpha_2-\sin 2\alpha_1\cos\alpha_2)-\varrho_2(\sin\alpha_1-\sin 2\alpha_2\cos\alpha_1)]Q\\ -[\varrho_1(\cos\alpha_2-\cos 2\alpha_1\cos\alpha_2)-\varrho_2(\cos\alpha_1-\cos 2\alpha_2\cos\alpha_1)]R\end{array}\right\}\mathfrak{x}\\
&+\left\{\begin{array}{l}[\varrho_1(\cos\alpha_2-\sin 2\alpha_1\sin\alpha_2)-\varrho_2(\cos\alpha_1-\sin 2\alpha_2\sin\alpha_1)]Q\\ +[\varrho_1(\sin\alpha_2+\cos 2\alpha_1\sin\alpha_2)-\varrho_2(\sin\alpha_1+\cos 2\alpha_2\sin\alpha_1)R]\end{array}\right\}\mathfrak{y}\\
&+\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{Q\cos(\alpha_1+\alpha_2)+R\sin(\alpha_1+\alpha_2)\}\\
&\qquad=0,
\end{aligned}
$$

welche Gleichung genau mit der vorher für den Fall $P=0$ entwickelten Gleichung übereinstimmt.

Man sieht also hieraus, dass die für den Fall $P=0$ geltende Gleichung aus der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Gleichung erhalten wird, wenn man in derselben $P=0$ setzt, und

dass also diese letztere Gleichung ganz allgemeine Gültigkeit besitzt, wofür wir uns daher jetzt, wie dies immer bei wahrhaft strengen mathematischen Untersuchungen unbedingt erforderlich ist, die vollständigste Sicherheit und Gewissheit verschafft haben.

## §. 5.

Um über die Art des durch die Gleichung 22), 23) oder 24) charakterisirten Kegelschnitts zu entscheiden, wenden wir das aus der allgemeinen Theorie der Linien des zweiten Grades allgemein bekannte Kriterium an, zu welchem Behuf wir die Grösse

$$R^2-(P-Q)(P+Q)=R^2+Q^2-P^2$$

entwickeln müssen. Mittelst der Ausdrücke 12) erhalten wir leicht:

$$\begin{aligned}
&R^2+Q^2-P^2\\
&=-2\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)\{1-\cos 2(\alpha_1-\alpha_2)\}\\
&\quad-2\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{1-\cos 2(\alpha_2-\alpha_3)\}\\
&\quad-2\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\{1-\cos 2(\alpha_3-\alpha_1)\}\\
&=-4\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\
&\quad\times\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\}.
\end{aligned}$$

Dieses Product kann nur verschwinden, wenn einer seiner Factoren verschwindet, was aber nie der Fall sein kann, weil sonst immer drei der vier gegebenen Punkte in einer Geraden liegen würden; wäre insbesondere

$$\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)=0,$$

so würden, wie leicht zu zeigen ist, die drei Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ in einer Geraden liegen.

Weil also das obige Product nie verschwinden kann, so kann unser Kegelschnitt nie eine Parabel sein, wie sich nach alllem Obigen natürlich auch ganz von selbst versteht. Wenn

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\ &\times\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\}\end{aligned}\right\}>0$$

ist, so ist der Kegelschnitt im Allgemeinen eine Ellipse; wenn dagegen

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\ \times\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\}\end{array}\right\}<0$$

ist, so ist derselbe im Allgemeinen eine Hyperbel.

## §. 6.

Wenn man, was offenbar verstattet ist, $\alpha_1=0$ setzt, so wird die Gleichung 24), wie man leicht findet:

25)

$$\begin{array}{l}2\sin\alpha_2\sin\alpha_3(\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3)\mathfrak{X}^2\\ +2\{(\varrho_1-\varrho_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2\cos\alpha_3-(\varrho_1-\varrho_2\cos\alpha_2)\cos\alpha_2\sin\alpha_3\}\mathfrak{Y}^2\\ -4\sin\alpha_2\sin\alpha_3(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3)\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\\ -\sin\alpha_2\sin\alpha_3\{\varrho_1\varrho_2\sin\alpha_2+2\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)-\varrho_3\varrho_1\sin\alpha_3\}\mathfrak{X}\\ +\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2\sin\alpha_2(2\cos\alpha_2\sin\alpha_3-\sin\alpha_2\cos\alpha_3)\\ +\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_2+\alpha_3)\\ -\varrho_3\varrho_1\sin\alpha_3(2\sin\alpha_2\cos\alpha_3-\cos\alpha_2\sin\alpha_3)\end{array}\right\}\mathfrak{Y}\\ +\varrho_1\varrho_2\varrho_3\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\\ =0\end{array}$$

oder:

26)

$$\begin{array}{l}2(\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3)\mathfrak{X}^2\\ +2\{(\varrho_1-\varrho_3\cos\alpha_3)\cot\alpha_3-(\varrho_1-\varrho_2\cos\alpha_2)\cot\alpha_2\}\mathfrak{Y}^2\\ -4(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3)\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\\ -\{\varrho_1\varrho_2\sin\alpha_2+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)-\varrho_3\varrho_1\sin\alpha_3\}\mathfrak{X}\\ +\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2\sin\alpha_2(2\cot\alpha_2-\cot\alpha_3)\\ +\varrho_2\varrho_3(\sin\alpha_2\cos\alpha_3\cot\alpha_3-\cos\alpha_2\sin\alpha_3\cot\alpha_2)\\ -\varrho_3\varrho_1\sin\alpha_3(2\cot\alpha_2-\cot\alpha_3)\end{array}\right\}\mathfrak{Y}\\ +\varrho_1\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\\ =0.\end{array}$$

Diese Gleichung kann man noch weiter vereinfachen, wenn man durch den Mittelpunkt der Geraden $A_0A_1$ als Anfang ein dem Systeme der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ paralleles System der $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ legt. Dann ist:

$$\mathfrak{x} = \tfrac{1}{2}\varrho_1 + \mathfrak{x}', \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}';$$

und nach gehöriger Substitution dieser Ausdrücke für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in die Gleichung 26) erhält man mittelst leichter Rechnung die Gleichung:

26*)

$$\begin{aligned}
&2(\varrho_2 \sin\alpha_2 - \varrho_3 \sin\alpha_3)\mathfrak{x}'^2 \\
&+2\{(\varrho_1 - \varrho_3\cos\alpha_3)\cot\alpha_3 - (\varrho_1 - \varrho_2\cos\alpha_2)\cot\alpha_2\}\mathfrak{y}'^2 \\
&-4(\varrho_2\cos\alpha_2 - \varrho_3\cos\alpha_3)\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' \\
&+\{\varrho_1\varrho_2\sin\alpha_2 - 2\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3) - \varrho_3\varrho_1\sin\alpha_3\}\mathfrak{x}' \\
&-\{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2\cot\alpha_3 - \varrho_3(\varrho_1 - \varrho_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3\cot\alpha_2\}\mathfrak{y}' \\
&= 0.
\end{aligned}$$

## §. 7.

Die Coordinaten des Mittelpunktes der Geraden $A_0A_1$ sind $\frac{1}{2}\varrho_1, 0$ in dem vorher angenommenen Coordinatensysteme der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$. Setzt man diese Coordinaten für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in die Gleichung 26), so wird dieselbe:

$$\begin{aligned}
&(\varrho_2\sin\alpha_2 - \varrho_3\sin\alpha_3)\cdot\tfrac{1}{4}\varrho_1^2 - \{\varrho_1\varrho_2\sin\alpha_2 + 2\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3) - \varrho_3\varrho_1\sin\alpha_3\}\cdot\tfrac{1}{2}\varrho_1 \\
&\qquad + \varrho_1\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3) \\
&= \tfrac{1}{4}\varrho_1^2\varrho_2(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_2) - \tfrac{1}{2}\varrho_1^2\varrho_3(\sin\alpha_3 - \sin\alpha_3) \\
&\qquad - \varrho_1\varrho_2\varrho_3\{\sin(\alpha_2-\alpha_3) - \sin(\alpha_2-\alpha_3)\} \Big\} - 0,
\end{aligned}$$

also identisch $0 = 0$, woraus sich ergiebt, dass der Mittelpunkt der Geraden $A_0A_1$ in unserem Kegelschnitte liegt, oder dass dieser durch den Mittelpunkt der Geraden $A_0A_1$ geht. Dasselbe ergiebt sich noch weit leichter, eigentlich ganz unmittelbar, wenn man in der Gleichung 26*) für $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ respective 0, 0 setzt. Weil man nun jeden der vier Punkte $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ als Anfang, jede der dieselben unter einander verbindenden sechs Geraden als Axe annehmen kann; so ergiebt sich, dass unser Kegelschnitt durch die Mittelpunkte aller, die vier Punkte $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ unter einander verbindenden sechs Geraden geht.

In dem Systeme der die vier Punkte $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ unter einander verbindenden sechs Geraden heissen:

| | |
|---|---|
| $A_0A_1$, | $A_2A_3$; |
| $A_0A_2$, | $A_3A_1$; |
| $A_0A_3$, | $A_1A_2$ |

gegenüberstehende Gerade. Betrachten wir eines dieser drei Paare, hier, nach den gemachten Annahmen, am Einfachsten das erste:

$$A_0A_1, \quad A_2A_3;$$

so sind die Coordinaten der beiden Punkte

$$A_2 \text{ und } A_3$$

respective:

$$\varrho_2\cos\alpha_2, \quad \varrho_2\sin\alpha_2 \text{ und } \varrho_3\cos\alpha_3, \quad \varrho_3\sin\alpha_3;$$

also ist die Gleichung der Geraden $A_2A_3$:

$$v-\varrho_2\sin\alpha_2=\frac{\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3}{\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3}(u-\varrho_2\cos\alpha_2);$$

woraus man für die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Geraden $A_0A_1$, $A_2A_3$ leicht findet:

$$\frac{\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3}, \qquad 0.$$

Führt man diese Ausdrücke für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in die Gleichung 26) ein, so wird dieselbe:

$$\begin{aligned}
&2\varrho_2^2\varrho_3^2\sin(\alpha_2-\alpha_3)^2\\
&-\{\varrho_1\varrho_2\sin\alpha_2+2\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)-\varrho_3\varrho_1\sin\alpha_3\}\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\\
&+\varrho_1\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)(\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3)\\
=\;&2\varrho_2^2\varrho_3^2\{\sin(\alpha_2-\alpha_3)^2-\sin(\alpha_2-\alpha_3)^2\}\\
&-\varrho_1\varrho_2^2\varrho_3\{\sin\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_3)-\sin\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_3)\}\\
&+\varrho_1\varrho_2\varrho_3^2\{\sin\alpha_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)-\sin\alpha_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\}\\
&=0,
\end{aligned}$$

also identisch $0=0$, woraus sich ergiebt, dass die Durchschnittspunkte der gegenüberstehenden Geraden in unserem Kegelschnitte liegen, oder dass dieser durch die Durchschnittspunkte der drei Paare gegenüberstehender Geraden geht. Ganz dasselbe findet man, wenn man in der Gleichung 26*) für $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ respective:

$$\frac{\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3}-\tfrac{1}{2}\varrho_1, \qquad 0$$

setzt.

Wir haben daher jetzt den folgenden:

**Satz.**

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller der Kegelschnitte, welche sich durch vier feste Punkte

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3$$

legen lassen, ist ein Kegelschnitt, — und zwar nach allem Obigen natürlich immer im Allgemeinen eine Ellipse oder eine Hyperbel —, welcher jederzeit durch die sechs Mittelpunkte der sechs, die vier festen Punkte unter einander verbindenden Geraden

$$A_0A_1,\ A_0A_2,\ A_0A_3,\ A_1A_2,\ A_1A_3,\ A_2A_3$$

und durch die drei Durchschnittspunkte der drei Paare gegenüberstehender Geraden:

$$\begin{aligned} &A_0A_1, \quad A_2A_3;\\ &A_0A_2, \quad A_3A_1;\\ &A_0A_3, \quad A_1A_2 \end{aligned}$$

geht.

Wegen dieser Eigenschaft hat man unseren, durch die allgemeine Gleichung 24) charakterisirten Kegelschnitt den Kegelschnitt der neun Punkte genannt*).

§. 8.

Wir wollen jetzt die Coordinaten des Mittelpunkts des Kegelschnitts der neun Punkte bestimmen.

Setzen wir zu dem Ende der Kürze wegen:

27)

$$A=2\{\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1^2+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2^2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_3^2\},$$

$$B=2\{\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1^2+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2^2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_3^2\},$$

$$\left.\begin{aligned} C=-2\{&\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1\cos\alpha_1+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2\cos\alpha_2\\ &+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin\alpha_3\cos\alpha_3\end{aligned}\right\}$$

$$=-\{\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin2\alpha_1+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin2\alpha_3\},$$

*) „La locale dei centri delle coniche circoscritte ad un quadrigono è una conica che passa per i punti medi dei suoi sei lati, e per i punti di concorso delle tre coppie dei lati opposti. **Questa conica si dirà perciò la conica dei nove punti.**“ (Battaglini: Nota sopra alcuni questioni di Geometria. p. 7).

$$D = -\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_3-\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)]\\+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1-\cos(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]\\+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2-\cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)]\end{array}\right\},$$

$$E = -\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\cos(\alpha_1-\alpha_3)\sin\alpha_3-\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)]\\+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)[\cos(\alpha_2-\alpha_3)\sin\alpha_1-\sin(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]\\+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)[\cos(\alpha_3-\alpha_1)\sin\alpha_2-\sin(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)]\end{array}\right\},$$

$$F = -\varrho_1\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1);$$

so ist nach 24) die Gleichung des Kegelschnitts der neun Punkte:

28)

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

und nach der allgemeinen Theorie der Linien des zweiten Grades sind folglich bekanntlich:

$$\frac{BD-CE}{C^2-AB}, \qquad \frac{AE-CD}{C^2-AB}$$

die Coordinaten seines Mittelpunkts.

Führt man in diese Formeln die obigen Ausdrücke von $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ ein, so erhält man zuvörderst ohne alle Schwierigkeit:

$$\tfrac{1}{4}(C^2-AB) = -\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)$$
$$\times\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\}.$$

Für $BD-CE$ findet man das Product der Grösse:

$$-\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)$$

in die Grösse:

$$\begin{array}{l}\varrho_1\varrho_2^2\cos\alpha_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\+\varrho_1\varrho_3^2\cos\alpha_3\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\+\varrho_2\varrho_3^2\cos\alpha_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\\+\varrho_2\varrho_1^2\cos\alpha_1\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\+\varrho_3\varrho_1^2\cos\alpha_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\+\varrho_3\varrho_2^2\cos\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_3)\\-2\varrho_1\varrho_2\varrho_3\cos\alpha_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\\-2\varrho_1\varrho_2\varrho_3\cos\alpha_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\-2\varrho_1\varrho_2\varrho_3\cos\alpha_3\sin(\alpha_1-\alpha_2),\end{array}$$

welche sich auch unter der Form:

$$\varrho_1\cos\alpha_1\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)-2\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$
$$+\varrho_2\cos\alpha_2\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)-2\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$
$$+\varrho_3\cos\alpha_3\{-2\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\},$$

oder unter der Form:

$$\varrho_1\cos\alpha_1\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$
$$+\varrho_2\cos\alpha_2\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$
$$+\varrho_3\cos\alpha_3\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$
$$-3\varrho_1\varrho_2\varrho_3\{\cos\alpha_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\cos\alpha_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)+\cos\alpha_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\},$$

also, weil

$$\cos\alpha_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\cos\alpha_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)+\cos\alpha_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)=0$$

ist, unter der Form:

$$(\varrho_1\cos\alpha_1+\varrho_2\cos\alpha_2+\varrho_3\cos\alpha_3)$$
$$\times\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$

darstellen lässt. Folglich ist nach dem Obigen:

$$BD-CE$$
$$=-(\varrho_1\cos\alpha_1+\varrho_2\cos\alpha_2+\varrho_3\cos\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)$$
$$\times\{\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\},$$

also:

$$BD-CE=\tfrac{1}{4}(C^2-AB)(\varrho_1\cos\alpha_1+\varrho_2\cos\alpha_2+\varrho_3\cos\alpha_3).$$

Für $AE-CD$ findet man das Product der Grösse

$$-\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)$$

in die Grösse:

$$\begin{aligned}
&\varrho_1\varrho_2^2\sin\alpha_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\
&+\varrho_1\varrho_3^2\sin\alpha_3\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\
&+\varrho_2\varrho_3^2\sin\alpha_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\\
&+\varrho_2\varrho_1^2\sin\alpha_1\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\
&+\varrho_3\varrho_1^2\sin\alpha_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\
&+\varrho_3\varrho_2^2\sin\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_3)\\
&-2\varrho_1\varrho_2\varrho_3\sin\alpha_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\\
&-2\varrho_1\varrho_2\varrho_3\sin\alpha_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\
&-2\varrho_1\varrho_2\varrho_3\sin\alpha_3\sin(\alpha_1-\alpha_2),
\end{aligned}$$

welche sich auch unter der Form:

$$\varrho_1 \sin\alpha_1 \{\varrho_1\varrho_2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) - 2\varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2-\alpha_3) + \varrho_3\varrho_1 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$
$$+ \varrho_2 \sin\alpha_2 \{\varrho_1\varrho_2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) + \varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2-\alpha_3) - 2\varrho_3\varrho_1 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$
$$+ \varrho_3 \sin\alpha_3 \{-2\varrho_1\varrho_2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) + \varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2-\alpha_3) + \varrho_3\varrho_1 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\},$$

oder unter der Form:

$$\varrho_1 \sin\alpha_1 \{\varrho_1\varrho_2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) + \varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2-\alpha_3) + \varrho_3\varrho_1 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$
$$+ \varrho_2 \sin\alpha_2 \{\varrho_1\varrho_2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) + \varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2-\alpha_3) + \varrho_3\varrho_1 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$
$$+ \varrho_3 \sin\alpha_3 \{\varrho_1\varrho_2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) + \varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2-\alpha_3) + \varrho_3\varrho_1 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$
$$- 3\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \{\sin\alpha_1 \sin(\alpha_2-\alpha_3) + \sin\alpha_2 \sin(\alpha_3-\alpha_1) + \sin\alpha_3 \sin(\alpha_1-\alpha_2)\},$$

also, weil

$$\sin\alpha_1 \sin(\alpha_2-\alpha_3) + \sin\alpha_2 \sin(\alpha_3-\alpha_1) + \sin\alpha_3 \sin(\alpha_1-\alpha_2) = 0$$

ist, unter der Form:

$$(\varrho_1 \sin\alpha_1 + \varrho_2 \sin\alpha_2 + \varrho_3 \sin\alpha_3)$$
$$\times \{\varrho_1\varrho_2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) + \varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2-\alpha_3) + \varrho_3\varrho_1 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\}$$

darstellen lässt. Folglich ist nach dem Obigen:

$$AE - CD$$
$$= -(\varrho_1 \sin\alpha_1 + \varrho_2 \sin\alpha_2 + \varrho_3 \sin\alpha_3) \sin(\alpha_1-\alpha_2) \sin(\alpha_2-\alpha_3) \sin(\alpha_3-\alpha_1)$$
$$\times \{\varrho_1\varrho_2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) + \varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2-\alpha_3) + \varrho_3\varrho_1 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\},$$

also:

$$AE - CD = \tfrac{1}{4}(C^2 - AB)(\varrho_1 \sin\alpha_1 + \varrho_2 \sin\alpha_2 + \varrho_3 \sin\alpha_3).$$

Hiernach sind nach dem Obigen:

29)

$$\tfrac{1}{4}(\varrho_1 \cos\alpha_1 + \varrho_2 \cos\alpha_2 + \varrho_3 \cos\alpha_3), \quad \tfrac{1}{4}(\varrho_1 \sin\alpha_1 + \varrho_2 \sin\alpha_2 + \varrho_3 \sin\alpha_3)$$

die Coordinaten des Mittelpunkts des Kegelschnitts der neun Punkte.

Für $\alpha_1 = 0$ sind diese Coordinaten:

30)

$$\tfrac{1}{4}(\varrho_1 + \varrho_2 \cos\alpha_2 + \varrho_3 \cos\alpha_3), \quad \tfrac{1}{4}(\varrho_2 \sin\alpha_2 + \varrho_3 \sin\alpha_3).$$

Es ist ein bekannter, durch die gewöhnlichen Hülfsmittel der analytischen Geometrie leicht zu beweisender Satz, dass, wenn die Punkte

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

überhaupt durch die Coordinaten

$$x_0, y_0;\quad x_1, y_1;\quad x_2, y_2;\quad x_3, y_3$$

bestimmt sind, die drei Geraden, welche die Mittelpunkte der drei Paare gegenüberstehender Geraden:

$$A_0A_1,\quad A_2A_3;$$
$$A_0A_2,\quad A_3A_1;$$
$$A_0A_3,\quad A_1A_2$$

mit einander verbinden, sich jederzeit in einem und demselben, durch die Coordinaten

$$\tfrac{1}{4}(x_0+x_1+x_2+x_3),\quad \tfrac{1}{4}(y_0+y_1+y_2+y_3)$$

bestimmten Punkte schneiden, und dass die drei Verbindungslinien sich in diesem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte gegenseitig halbiren. Da nun in unserem vorliegenden Falle die Coordinaten der Punkte:

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

respective:

$$0, 0;\quad \varrho_1\cos\alpha_1,\quad \varrho_1\sin\alpha_1;\quad \varrho_2\cos\alpha_2,\quad \varrho_2\sin\alpha_2;\quad \varrho_3\cos\alpha_3,\quad \varrho_3\sin\alpha_3$$

sind; so sind die Coordinaten des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der drei Geraden, welche die Mittelpunkte der gegenüberstehenden Geraden:

$$A_0A_1,\quad A_2A_3;$$
$$A_0A_2,\quad A_3A_1;$$
$$A_0A_3,\quad A_1A_2$$

mit einander verbinden:

$$\tfrac{1}{4}(\varrho_1\cos\alpha_1+\varrho_2\cos\alpha_2+\varrho_3\cos\alpha_3),\quad \tfrac{1}{4}(\varrho_1\sin\alpha_1+\varrho_2\sin\alpha_2+\varrho_3\sin\alpha_3);$$

und dieser Durchschnittspunkt ist also nach dem Obigen der Mittelpunkt des Kegelschnitts der neun Punkte. Dies führt auf folgenden

**Satz.**

**Der Mittelpunkt des Kegelschnitts der neun Punkte ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Geraden, welche die Mittelpunkte der gegenüberstehenden Geraden:**

$$A_0A_1,\quad A_2A_3;$$
$$A_0A_2,\quad A_3A_1;$$
$$A_0A_3,\quad A_1A_2$$

mit einander verbinden.

Der Mittelpunkt des Kegelschnitts der neun Punkte kann also hiernach jederzeit leicht construirt werden, und es lassen sich daher nun offenbar eigentlich immer achtzehn Punkte, durch welche der Kegelschnitt der neun Punkte gehen muss, leicht angeben. Weil aber die drei Geraden, welche die Mittelpunkte der gegenüberstehenden Geraden mit einander verbinden, nach dem obigen Satze sich gegenseitig halbiren, so reduciren sich die in Rede stehenden achtzehn Punkte in der Wirklichkeit auf zwölf, was Alles durch Taf. IV. Fig. 1. und Taf. IV. Fig. 2. erläutert wird. Dass drei dieser zwölf Punkte auch aufgefasst werden können als die Durchschnittspunkte der beiden Geraden, welche sich in jedem Paare gegenüberstehender Geraden durch den Mittelpunkt einer jeden der beiden Geraden in einem solchen Paare parallel mit der anderen Geraden dieses Paares ziehen lassen, sind die punktirten Linien in den beiden genannten Figuren zu erläutern bestimmt, die auch mit völliger Deutlichkeit sogleich an den Tag legen werden, welche drei der zwölf Punkte hier gemeint sind. Wenn auch diese drei Punkte in dem Kegelschnitte liegen und bei der Construction desselben mit Vortheil benutzt werden, so gehören sie doch nicht dem System der durch die vier gegebenen Punkte der Lage nach bestimmten sechs Geraden an, und insofern ist also der Name: Kegelschnitt der neun (nicht zwölf) Punkte vollständig gerechtfertigt.

## §. 9.

Wenn wir die Gleichung 26), in welcher bekanntlich $\alpha_1 = 0$ gesetzt worden ist, und bei welcher also $A_0A_1$ als Axe zu Grunde liegt, differentiiren, so erhalten wir, wie auf der Stelle erhellet, die folgende Gleichung:

31)

$$\begin{aligned}
&\varrho_1\varrho_2\sin\alpha_2 + 2\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_3-\alpha_2) - \varrho_3\varrho_1\sin\alpha_3 \\
&-4(\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3)\mathfrak{x} \\
&+4(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3)\mathfrak{y} \\
-&\left\{\begin{aligned}
&\varrho_1\varrho_2\sin\alpha_2(2\cot\alpha_2-\cot\alpha_3) \\
&+\varrho_2\varrho_3(\sin\alpha_2\cos\alpha_3\cot\alpha_3-\cos\alpha_2\sin\alpha_3\cot\alpha_2) \\
&-\varrho_3\varrho_1\sin\alpha_3(2\cot\alpha_3-\cot\alpha_2) \\
&-4(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3)\mathfrak{x} \\
&+4[(\varrho_1-\varrho_3\cos\alpha_3)\cot\alpha_3-(\varrho_1-\varrho_2\cos\alpha_2)\cot\alpha_2]\mathfrak{y}
\end{aligned}\right\}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\mathfrak{x}} \\
&=0.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunkts der Geraden $A_0A_1$ in dem Systeme der $x$, $y$ durch $x_{01}$, $y_{01}$; die Coordinaten des Durchschnittspunkts der gegenüberstehenden Geraden $A_0A_1$, $A_2A_3$ durch $x_1$, $y_1$; so ist nach §. 7. bekanntlich:

$$x_{01} = \tfrac{1}{2}\varrho_1, \quad y_{01} = 0$$

und

$$x_1 = \frac{\varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\varrho_2 \sin\alpha_2 - \varrho_3 \sin\alpha_3}, \quad y_1 = 0.$$

Führt man die vorstehenden Werthe von $x_{01}$, $y_{01}$ in die Gleichung 31) ein, so erhält man mittelst leichter Rechnung:

32)

$$\frac{\partial y_{01}}{\partial x_{01}} = \frac{\varrho_1\varrho_2 \sin\alpha_2 - 2\varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \varrho_3\varrho_1 \sin\alpha_3}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2\cot\alpha_3 - \varrho_3(\varrho_1 - \varrho_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3\cot\alpha_2}$$

oder:

33)

$$\frac{\partial y_{01}}{\partial x_{01}} = \frac{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2 - \varrho_3(\varrho_1 - \varrho_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2\cot\alpha_3 - \varrho_3(\varrho_1 - \varrho_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3\cot\alpha_2},$$

oder, wenn der Kürze wegen:

34)

$$M = \varrho_2(\varrho_1 - \varrho_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2 - \varrho_3(\varrho_1 - \varrho_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3,$$

$$N = \varrho_2(\varrho_1 - \varrho_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2\cot\alpha_3 - \varrho_3(\varrho_1 - \varrho_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3\cot\alpha_2$$

gesetzt wird:

35) . . . . . $\frac{\partial y_{01}}{\partial x_{01}} = \frac{M}{N}$

Führt man in die Gleichung 31) die obigen Werthe von $x_1$, $y_1$ ein, so erhält man gleichfalls mittelst einer, keiner Schwierigkeit unterliegenden Rechnung:

36) . . . . $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{M}{N - 2M\frac{\varrho_2\cos\alpha_2 - \varrho_3\cos\alpha_3}{\varrho_2\sin\alpha_2 - \varrho_3\sin\alpha_3}},$

oder:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{M(\varrho_2\sin\alpha_2 - \varrho_3\sin\alpha_3)}{N(\varrho_2\sin\alpha_2 - \varrho_3\sin\alpha_3) - 2M(\varrho_2\cos\alpha_2 - \varrho_3\cos\alpha_3)},$$

wo der Nenner leicht auf die Form:

$$\varrho_2(\varrho_1-\varrho_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2\{(\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3)\cot\alpha_3-2(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3)\}$$

$$-\varrho_3(\varrho_1-\varrho_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3\{(\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3)\cot\alpha_2-2(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3)\},$$

oder auf die Form:

$$\varrho_2(\varrho_1-\varrho_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2\{\varrho_2\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\sin\alpha_3}-(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3)\}$$

$$-\varrho_3(\varrho_1-\varrho_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3\{\varrho_3\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\sin\alpha_2}-(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3)\}$$

gebracht wird, und folglich:

$$37)\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{\partial\mathfrak{P}_1}{\partial\mathfrak{X}_1}$$

$$=\frac{(\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3)\{\varrho_2(\varrho_1-\varrho_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2-\varrho_3(\varrho_1-\varrho_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3\}}{\left\{\begin{array}{l}\varrho_2(\varrho_1-\varrho_3\cos\alpha_3)\sin\alpha_2\{\varrho_2\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\sin\alpha_3}-(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3)\}\\ -\varrho_3(\varrho_1-\varrho_2\cos\alpha_2)\sin\alpha_3\{\varrho_3\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\sin\alpha_2}-(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3)\}\end{array}\right\}}$$

ist.

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die auf der positiven *) Seite der Geraden $A_0A_1$ liegenden Theile der Berührenden des Kegelschnitts der neun Punkte in den Punkten $(\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{01})$, $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1)$ und der Geraden $A_2A_3$ mit der von $A_0$ ausgehenden Richtung der Geraden $A_0A_1$ einschliessen, beziehungsweise durch $\varphi_{01}$, $\varphi_1$ und $\omega_{23}$; so ist bekanntlich:

$$\operatorname{tang}\varphi_{01}=\frac{\partial\mathfrak{Y}_{01}}{\partial\mathfrak{X}_{01}},\quad \operatorname{tang}\varphi_1=\frac{\partial\mathfrak{Y}_1}{\partial\mathfrak{X}_1},\quad \operatorname{tang}\omega_{23}=\frac{\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3}{\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3};$$

also nach dem Obigen:

$$\operatorname{tang}\varphi_{01}=\frac{M}{N},$$

$$\operatorname{tang}\varphi_1=\frac{\frac{M}{N}}{1-2\frac{M}{N}\cot\omega_{23}}=\frac{\operatorname{tang}\varphi_{01}}{1-2\operatorname{tang}\varphi_{01}\cot\omega_{23}},$$

woraus sich die Relation:

$$38)\ldots\ldots\ \cot\omega_{23}=\tfrac{1}{2}(\cot\varphi_{01}-\cot\varphi_1)$$

*) an sich willkührlichen.

oder

$$30) \ldots\ldots\ldots \cot\omega_{23} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_{01})}{2\sin\varphi_1 \sin\varphi_{01}}$$

ergiebt.

Durch die Winkel $\varphi_{01}$, $\varphi_1$ ist zugleich die Lage der, den aus dem bekannten Mittelpunkte nach den bekannten Punkten $(\mathfrak{X}_{01}\, \mathfrak{Y}_{01})$, $(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{Y}_1)$ des Kegelschnitts der neun Punkte gezogenen Durchmessern desselben conjugirten Durchmesser bestimmt.

Da man den Mittelpunkt und eine grössere Anzahl von Punkten des Kegelschnitts der neun Punkte kennt, so bietet zur Bestimmung der Axen dieses Kegelschnitts — auch auf dem Wege der Construction — die Lehre von den Kegelschnitten in bekannter Weise Methoden genug dar, worüber das Weitere natürlich nicht hierher gehört.

---

## Anhang.

Ich habe schon oben in §. 1. bemerkt, dass, wenn es sich bloss um den Beweis der hier zur Sprache kommenden Hauptsätze, nicht um die Aufstellung ganz allgemeiner, für jedes beliebige rechtwinklige Coordinatensystem geltender Gleichungen *) handelt, dies sich auf eine weit einfachere Weise als durch die obigen, sehr allgemeinen Entwickelungen erreichen lässt, wenn man ein gewisses specielles, im Allgemeinen schiefwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legt, dessen Axen zwei gegenüberstehende Gerade in dem Systeme der sechs, durch die vier Punkte $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ der Lage nach bestimmten Geraden sind, wie ich dies schon in dem in §. 1. angeführten Paragraphen des zweiten Theils meiner „Elemente der analytischen Geometrie" vor einer ziemlich langen Reihe von Jahren gezeigt habe. Für diejenigen, welchen dieses Buch unbekannt geblieben sein dürfte, möchte es nicht ganz ohne Interesse sein, wenn ich den betreffenden Paragraphen, ganz in seiner ursprünglichen Fas-

---

*) Solche Gleichungen aufzustellen, war, wie schon öfters erinnert, der Hauptzweck dieser Abhandlung, wobei ich immer die Gleichung 22) oder die Gleichung 24), wenn man in derselben für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ wieder $x - x_0$, $\eta - y_0$ setzt, wo $x$, $\eta$, so wie $x_0$, $y_0$, sich auf ein ganz beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen, im Auge habe; die weitere Entwickelung dieser Gleichung nach den Coordinaten $x$, $\eta$ habe ich, als keiner Schwierigkeit unterliegend, der Kürze wegen unterlassen.

sung, als einen kurzen Anhang dieser Abhandlung, wie hiermit geschieht, nachstehend beifüge.

### *Aufgabe.*

**Vier Punkte seien gegeben: man soll den Ort der Mittelpunkte aller Linien des zweiten Grades der beiden ersten Klassen, welche durch die vier gegebenen Punkte gelegt werden können, finden.**

**Auflösung.** Man nehme die durch zwei der vier gegebenen Punkte bestimmte gerade Linie als Axe der $x$, die durch die beiden anderen gegebenen Punkte bestimmte gerade Linie als Axe der $y$ an, und bezeichne, dies vorausgesetzt, die Coordinaten der vier gegebenen Punkte durch

$$\alpha, 0;\quad \alpha', 0;\quad 0, \beta;\quad 0, \beta'.$$

Ist nun

$$1) \ldots\ldots Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

die Gleichung einer beliebigen, durch die vier gegebenen Punkte gelegten Linie des zweiten Grades; so hat man die folgenden Gleichungen:

$$2) \ldots\ldots \begin{cases} A\alpha^2 + 2D\alpha + F = 0, \\ A\alpha'^2 + 2D\alpha' + F = 0, \\ B\beta^2 + 2E\beta + F = 0, \\ B\beta'^2 + 2E\beta' + F = 0. \end{cases}$$

Sind nun $x$, $y$ die Coordinaten des Mittelpunkts der durch die vier gegebenen Punkte gelegten Linie des zweiten Grades; so hat man bekanntlich die beiden folgenden Gleichungen:

$$3) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} Ax + Cy + D = 0, \\ Cx + By + E = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} A\alpha^2 + 2D\alpha + F &= 0, \\ A\alpha'^2 + 2D\alpha' + F &= 0, \\ Ax + Cy + D &= 0 \end{aligned}$$

die Grössen $A$ und $D$; so erhält man die Gleichungen

$$A\alpha\alpha' - F = 0,\quad 2D\alpha\alpha' + F(\alpha + \alpha') = 0,$$

und folglich, weil sich die dritte Gleichung auf die Form

$$2A\alpha\alpha' x + 2C\alpha\alpha' y + 2D\alpha\alpha' = 0$$

bringen lässt, die Gleichung

4) . . . . . $2\alpha\alpha' Cy + (2x - \alpha - \alpha')F = 0.$

Eliminirt man ferner aus den Gleichungen

$$B\beta^2 + 2E\beta + F = 0,$$
$$B\beta'^2 + 2E\beta' + F = 0,$$
$$Cx + By + E = 0$$

die Grössen $B$ und $E$; so erhält man die Gleichungen

$$B\beta\beta' - F = 0, \quad 2E\beta\beta' + F(\beta + \beta') = 0,$$

und folglich, weil sich die dritte Gleichung auf die Form

$$2C\beta\beta' x + 2B\beta\beta' y + 2E\beta\beta' = 0$$

bringen lässt, die Gleichung

5) . . . . . $2\beta\beta' Cx + (2y - \beta - \beta')F = 0.$

Schreibt man die Gleichungen 4) und 5) unter der Form

$$2\alpha\alpha' Cy = -(2x - \alpha - \alpha')F,$$
$$2\beta\beta' Cx = -(2y - \beta - \beta')F,$$

und dividirt dann mit der zweiten in die erste; so erhält man als Gleichung des gesuchten Orts die Gleichung

$$\frac{\alpha\alpha' y}{\beta\beta' x} = \frac{2x - \alpha - \alpha'}{2y - \beta - \beta'}$$

oder

6) . . . . . $\beta\beta' x(2x - \alpha - \alpha') = \alpha\alpha' y(2y - \beta - \beta').$

Man sieht hieraus, dass der Ort eine Linie des zweiten Grades ist.

Die Gleichung 6) wird befriedigt durch:

1. $x = 0, \quad y = 0;$
2. $x = 0, \quad y = \frac{1}{2}(\beta + \beta');$
3. $x = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha'), \quad y = 0;$
4. $x = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha'), \quad y = \frac{1}{2}(\beta + \beta').$

Der Ort geht also 1. durch den Anfang der Coordinaten, und folglich, weil man jede zwei der Linien, welche je zwei der vier gegebenen Punkte mit einander verbinden, als Coordinatenaxen annehmen kann, durch die Durchschnittspunkte der gegenüber-

stehenden Seiten und der beiden Diagonalen des durch die vier gegebenen Punkte bestimmten Vierecks. Der Ort geht ferner 2. durch den Mittelpunkt der Entfernung zweier der vier gegebenen Punkte von einander, also durch die sechs Mittelpunkte der vier Seiten und der beiden Diagonalen des durch die vier gegebenen Punkte bestimmten Vierecks. Der Ort geht endlich auch 3. durch den Durchschnittspunkt der beiden geraden Linien, welche durch den Mittelpunkt der Entfernung der in der Abscissenaxe liegenden Punkte der Ordinatenaxe, und durch den Mittelpunkt der Entfernung der in der Ordinatenaxe liegenden Punkte der Abscissenaxe parallel gezogen sind; er geht also durch die Punkte, in denen sich die geraden Linien schneiden, die gegenüberstehenden Seiten des Vierecks parallel durch die Mittelpunkte derselben gezogen sind, und durch den Durchschnittspunkt der beiden geraden Linien, welche den Diagonalen des Vierecks parallel durch deren Mittelpunkte gehen.

Um den Mittelpunkt des Orts zu finden, bringe man die Gleichung 6) auf die Form

$$\beta\beta' x^2 - \alpha\alpha' y^2 - \tfrac{1}{2}\beta\beta'(\alpha+\alpha')x + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha'(\beta+\beta')y = 0;$$

so ist, wenn wir die Coordinaten des Mittelpunkts des Orts durch $X$, $Y$ bezeichnen,

$$7) \ldots\ldots X = \tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha'), \quad Y = \tfrac{1}{2}(\beta+\beta'),$$

und der Mittelpunkt des Orts ist also der Mittelpunkt der Entfernung der Mittelpunkte zweier Gegenseiten des durch die vier gegebenen Punkte bestimmten Vierecks, oder auch der Mittelpunkt der Entfernung der Mittelpunkte der beiden Diagonalen dieses Vierecks, woraus sich auch unmittelbar der Satz ergiebt, dass die drei geraden Linien, welche die Mittelpunkte der Gegenseiten und die Mittelpunkte der beiden Diagonalen eines beliebigen Vierecks verbinden, durch einen Punkt gehen und sich gegenseitig halbiren.

# VII.

## Ueber die Gleichgewichtslage, in der sich die Mittelpunkte der einbeschriebenen Kreise eines Dreiecks zum Mittelpunkt des umschriebenen Kreises desselben befinden.

Von

Herrn *Ed. Jac. Noeggerath*,

Director der Königl. Provinzial-Gewerbeschule zu Brieg a. d. O.

---

Im 42. Bande des Archivs für Mathematik und Physik theilt der Herr Herausgeber im 3. Hefte S. 356. folgenden Satz des Herrn Professor Beltrami in Pisa mit:

> Der Mittelpunkt des um ein ebenes Dreieck beschriebenen Kreises ist der Schwerpunkt der Mittelpunkte seiner vier Berührungskreise, wenn man sich dieselben mit gleichen Gewichten beschwert denkt,

und bemerkt dabei, dass er wünsche, elementar-geometrische Beweise dieses Satzes zu erhalten. Ein solcher Beweis ergiebt sich aber einfach aus den Eigenschaften des Mittelpunktswürfels eines Dreiecks, die ich in der Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch Bd. 8. S. 394. in einem kurzen Aufsatze: „Ueber die Dreiecke, deren Ecken die Mittelpunkte der vier Berührungskreise eines gegebenen Dreiecks sind" entwickelt habe.

Es ist nämlich dort nachgewiesen worden, dass, wenn $N$ (Taf. IV. Fig. 5.) der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises eines Dreiecks $ABC$ ist, $A'$, $B'$ und $C'$ aber die Mittelpunkte der den

Ecken $A$, $B$ und $C$ beziehlich gegenüber liegenden äusseren Berührungskreise sind, und die Dreiecke $A'B'C'$, $A'B'N$, $A'C'N$ und $B'C'N$ gedacht werden, deren Eckpunkte jene Mittelpunkte sind, diese Dreiecke von Kreisen umschrieben werden, deren Radien sämmtlich einander gleich und zwar gleich dem Durchmesser $u$ des umschriebenen Kreises des gegebenen Dreiecks $ABC$ sind. Die Mittelpunkte $M$, $A''$, $B''$ und $C''$ dieser Kreise bilden mit den Mittelpunkten $N$, $A'$, $B'$ und $C'$ die Ecken eines schiefwinkligen Würfels, dessen Seitenflächen in der Ebene des Dreiecks aufeinanderfallen. Der Durchschnittspunkt $O$ der Diagonalen $MN$, $A'A''$, $B'B''$ und $C'C''$ dieses Würfels ist der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises des Dreiecks $ABC$.

Bezeichnet man mit

$r$ den Radius des inneren Berührungskreises zu Dreieck $ABC$;

$r_a$, $r_b$, $r_c$ die Radien der äusseren Berührungskreise, welche den Ecken $A$, $B$ und $C$ beziehlich gegenüber liegen;

$R = \frac{u}{2}$ den Radius des umschriebenen Kreises zu Dreieck $ABC$;

so bestimmt sich der Winkel $\varphi$, den zwei willkührlich gewählte Diagonalen $A'A''$ und $C'C''$ mit einander bilden, aus der Gleichung:

$$A''C'^2 = A''O^2 + C'O^2 - 2A''O.C'O.\mathrm{Cos}\,\varphi.$$

Nun ist aber:

$$A''C' = u = 2R,$$
$$A''O = \sqrt{R(R+2r_a)},$$
$$C'O = \sqrt{R(R+2r_c)};$$

und daher:

$$R = r_a + r_c - \sqrt{(R+2r_a)(R+2r_c)}.\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

mithin also:

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{r_a + r_c - R}{\sqrt{(R+2r_a)(R+2r_c)}}.$$

Wird die Projection von $A''O$ auf $C'O$ mit $\alpha O$ bezeichnet, so ist

$$\alpha O = A'O.\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$= (r_a + r_c - R)\sqrt{\frac{R}{R+2r_c}}.$$

In gleicher Weise folgt für die Projectionen $\beta O$ und $\gamma O$ der Strecken $B'O$ und $NO$ auf $C'O$:

$$\beta O = (r_b + r_c - R)\sqrt{\frac{R}{R+2r_c}}, \quad \gamma O = (-r + r_c - R)\sqrt{\frac{R}{R+2r_c}};$$

und daher:

$$\alpha O + \beta O + \gamma O = (r_a + r_b + r_c - r + 2r_c - 3R)\sqrt{\frac{R}{R+2r_c}}.$$

Nun ist aber:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R,$$

und deshalb:

$$\alpha O + \beta O + \gamma O = (R + 2r_c)\sqrt{\frac{R}{R+2r_c}}$$

$$= \sqrt{R(R+2r_c)}.$$

Da nun aber auch

$$C'O = \sqrt{R(R+2r_c)},$$

so folgt:

$$\alpha O + \beta O + \gamma O = C'O,$$

d. h. jede Diagonalhälfte des Mittelpunktswürfels, welche nach dem Mittelpunkt eines Berührungskreises führt, ist gleich der algebraischen Summe der Projectionen, welche die nach den Mittelpunkten der anderen Berührungskreise führenden Diagonalhälften mit jener Diagonalhälfte bilden.

Sind daher die Punkte $A'$, $B'$, $C'$ und $N$ gleich schwer belastet und betrachtet man die Normale in $O$ auf einer der Verbindungslinien $A'O$, $B'O$, $C'O$ und $NO$ als Achse, so findet man, dass die Summe der statischen Momente der Punkte $A'$, $B'$, $C'$ und $N$ für diese Achse gleich Null und daher $O$ unter den gestellten Bedingungen Schwerpunkt dieser Punkte ist*).

*) Andere Beweise des Satzes von Beltrami von den Herren C. Schmidt in Spremberg, C. Struve in Fraustadt hoffentlich im nächsten Hefte. G.

# VIII.

## Behandlung des ballistischen Problems mit Hülfe der hyperbolischen Functionen.

Von

Herrn Doctor *W. Ligowski*,

Lehrer der Mathematik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und dem See-Cadetten-Institut in Berlin.

---

Wenn der Widerstand der Luft proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit angenommen wird, so hat man zur Bestimmung der Bahn einer mit der Anfangsgeschwindigkeit $c$ unter dem Richtungswinkel $\alpha$ fortgeschossenen Kugel bekanntlich die beiden Differenzialgleichungen:

$$1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}$$

und

$$2) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \mu \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{dt},$$

wobei $g$ die Beschleunigung der Schwere und $\mu$ die Konstante des Luftwiderstandes ist.

Aus 1) ergiebt sich sofort:

$$3) \quad \frac{d^2x}{dt^2} : \frac{dx}{dt} = -\mu \frac{ds}{dt}$$

und hieraus durch Integration:

$$4) \quad \log \frac{dx}{dt} = C - \mu s.$$

Wenn für $t=0$ auch $s=0$ ist, so hat man, da $\frac{dx}{dt}$ für $t=0$, $c\cos\alpha$ wird:

5) . . . . . $C = \log c\cos\alpha,$

daher:

6) . . . . . $\log\frac{\frac{dx}{dt}}{c\cos\alpha} = -\mu s,$

und wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht:

7) . . . . . $\frac{dx}{dt} = c\cos\alpha . e^{-\mu s}.$

Setzt man für $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ die hyperbolische Function $\operatorname{Sin}\psi$ und entsprechend $\operatorname{Sin}\beta$ für $\operatorname{tg}\alpha$, so ist:

8) . . . . . $\frac{dy}{dt} = \operatorname{Sin}\psi\frac{dx}{dt}.$

Wenn $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{Sin}\psi$, so ist $\cos\varphi = \frac{1}{\operatorname{Cos}\psi}$, also auch, da

$$\frac{dx}{dt} = \cos\varphi\frac{ds}{dt}$$

ist:

9) . . . . . $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\operatorname{Cos}\psi}\cdot\frac{ds}{dt}$

und

10) . . . . . $\frac{ds}{dt} = \operatorname{Cos}\psi\frac{dx}{dt}.$

Mit Hülfe der Formeln 8) und 9) werden nun die Formeln 1) und 2):

11) . . . . . $\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\operatorname{Cos}\psi\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

und

12) . . . . . $\frac{d^2y}{dt^2} = -g-\mu\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Cos}\psi\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$

Differenziirt man Formel 8) nach $t$, so ergiebt sich:

13) . . . . . $\frac{d^2y}{dt^2} = \operatorname{Sin}\psi\frac{d^2x}{dt^2} + \operatorname{Cos}\psi\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{dx}{dt},$

und wenn man aus Formel 11) den Werth für $\frac{d^2x}{dt^2}$ in die vorstehende Gleichung einsetzt:

$$14) \ldots \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \operatorname{Cos}\psi \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Durch Verbindung der Formeln 12) und 14) erhält man nun:

$$15) \ldots\ldots\ldots \operatorname{Cos}\psi \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = -g,$$

und hieraus nach Formel 10):

$$16) \ldots\ldots\ldots \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} = -g.$$

Aus den Formeln 15) und 16) folgt:

$$17) \ldots\ldots \frac{d\psi}{dt} : \frac{ds}{dt} = -\frac{g}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = -\frac{g}{\operatorname{Cos}^2\psi \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Mit Hülfe von Formel 7) entsteht hieraus:

$$18) \ldots\ldots \operatorname{Cos}^2\psi\, d\psi = -\frac{g}{c^2 \cos^2\alpha} e^{2\mu s} ds,$$

also durch Integration:

$$19) \ldots\ldots \tfrac{1}{4}(2\psi + \operatorname{Sin} 2\psi) = C - \frac{g}{2\mu c^2 \cos^2\alpha} e^{2\mu s}.$$

Bezeichnet man die linke Seite durch $f(\psi)$ und setzt $\frac{1}{2k}$ statt $\mu$, so entsteht:

$$20) \ldots\ldots\ldots f(\psi) = C - \frac{gk}{c^2 \cos^2\alpha} e^{\frac{s}{k}}.$$

Da, für $s=0$, $\psi$ in $\beta$ übergeht, so ist:

$$f(\beta) = C - \frac{gk}{c^2 \cos^2\alpha}, \quad \text{also:} \quad C = f(\beta) + \frac{gk}{c^2 \cos^2\alpha},$$

mithin:

$$21) \ldots\ldots f(\psi) - f(\beta) = \frac{gk}{c^2 \cos^2\alpha} - \frac{gk}{c^2 \cos^2\alpha} e^{\frac{s}{k}}.$$

Setzt man den Werth von $\psi$, welcher $\psi = -\infty$ entspricht, $\gamma$, dann ist:

$$22) \ldots\ldots\ldots f(\gamma) - f(\beta) = \frac{gk}{c^2 \cos^2\alpha}.$$

Aus den Formeln 21) und 22) folgt alsdann:

$$23) \ldots\ldots\ldots f(\gamma)-f(\psi)=\frac{gk}{c^2\cos^2\alpha}e^{\frac{s}{k}}.$$

Aus der vorstehenden Gleichung ergiebt sich:

$$c\cos\alpha.e^{-\frac{s}{2k}}=\sqrt{\frac{gk}{f(\gamma)-f(\psi)}}.$$

Da nun $c\cos\alpha.e^{-\frac{s}{2k}}=c\cos\alpha.e^{-\mu s}=\frac{dx}{dt}$ ist, so ist auch:

$$24) \ldots\ldots\ldots \frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{gk}{f(\gamma)-f(\psi)}}$$

und

$$25) \ldots\ldots v=\frac{ds}{dt}=\mathfrak{Cos}\,\psi\sqrt{\frac{gk}{f(\gamma)-f(\psi)}}.$$

Nach Formel 16) ist: $\frac{dt}{d\psi}=-\frac{1}{g}\cdot\frac{ds}{dt}$. Setzt man für $\frac{ds}{dt}$ seinen Werth aus Formel 25), so entsteht:

$$26) \ldots\ldots dt=-\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,\psi d\psi}{\sqrt{f(\gamma)-f(\psi)}},$$

daher:

$$27) \ldots\ldots t=\sqrt{\frac{k}{g}}\int_{\psi}^{\beta}\frac{\mathfrak{Cos}\,\psi d\psi}{\sqrt{f(\gamma)-f(\psi)}}.$$

Durch Multiplikation der Formeln 24) und 26) erhält man:

$$28) \ldots\ldots\ldots dx=-\frac{k.\mathfrak{Cos}\,\psi d\psi}{f(\gamma)-f(\psi)},$$

und durch Integration:

$$29) \ldots\ldots\ldots x=k\int_{\psi}^{\beta}\frac{\mathfrak{Cos}\,\psi d\psi}{f(\gamma)-f(\psi)}.$$

Da $dy=\mathfrak{Sin}\,\psi dx$, so ist:

$$30) \ldots\ldots\ldots dy=-\frac{k\,\mathfrak{Sin}\,\psi\,\mathfrak{Cos}\,\psi d\psi}{f(\gamma)-f(\psi)},$$

mithin:

$$31) \ldots y=k\int_{\psi}^{\beta}\frac{\mathfrak{Sin}\,\psi\,\mathfrak{Cos}\,\psi d\psi}{f(\gamma)-f(\psi)}=\frac{k}{2}\int_{\psi}^{\beta}\frac{\mathfrak{Sin}\,2\psi d\psi}{f(\gamma)-f(\psi)}.$$

Für sehr kleine Richtungswinkel und grosse Anfangsgeschwindigkeiten sind $\psi$, $\beta$ und $\gamma$ sehr klein, so dass man für $\mathfrak{Sin}\psi$, $\mathfrak{Sin}\beta$ und $\mathfrak{Sin}\gamma$ angenähert $\psi$, $\beta$ und $\gamma$, so wie für $\mathfrak{Cos}\psi$ die Einheit setzen kann, wodurch $f(\gamma)$ und $f(\psi)$ in $\gamma$ und $\psi$ übergehen.

Aus den entwickelten Formeln ergeben sich für die obige Annahme:

$$32) \quad v = \sqrt{\frac{gk}{\gamma-\psi}},$$

$$33) \quad t = \sqrt{\frac{g}{k}} \int_{\psi}^{\beta} \frac{d\psi}{\sqrt{\gamma-\psi}} = 2\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot (\sqrt{\gamma-\psi} - \sqrt{\gamma-\beta}),$$

$$34) \quad x = k \int_{\psi}^{\beta} \frac{d\psi}{\gamma-\psi} = k \log \frac{\gamma-\psi}{\gamma-\beta},$$

$$35) \quad y = k \int_{\psi}^{\beta} \frac{\psi d\psi}{\gamma-\psi} = k(\gamma \log \frac{\gamma-\psi}{\gamma-\beta} - (\beta-\psi)).$$

Aus den Formeln 34) und 35) ergiebt sich noch durch Elimination von $\psi$:

$$36) \quad y = \gamma x - k(\gamma-\beta)(e^{\frac{x}{k}} - 1)$$

als Gleichung der Flugbahn.

Unter Voraussetzung sehr kleiner Richtungswinkel ist auch $2\psi$ sehr nahe gleich $\mathfrak{Sin}2\psi$, daher kann man alsdann für $f(\psi)$ angenähert $\frac{1}{2}\mathfrak{Sin}2\psi$ und ebenso $\frac{1}{2}\mathfrak{Sin}2\gamma$ für $f(\gamma)$ setzen. Aus den vorstehenden Formeln ergiebt sich nun:

$$37) \quad x = k \int_{\psi}^{\beta} \frac{\mathfrak{Cos}\psi d\psi}{\frac{1}{2}(\mathfrak{Sin}2\gamma - \mathfrak{Sin}2\psi)} = k \int_{\psi}^{\beta} \frac{\mathfrak{Cos}\psi d\psi}{\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)\,\mathfrak{Sin}(\gamma-\psi)}.$$

Es ist aber:

$$\frac{\mathfrak{Cos}\psi}{\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)\,\mathfrak{Sin}(\gamma-\psi)} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}2\gamma}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\gamma}{\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)} + \frac{\mathfrak{Cos}\gamma}{\mathfrak{Sin}(\gamma-\psi)}\right),$$

also:

$$38) \quad x = \frac{k}{\mathfrak{Cos}2\gamma}\left(\int_{\psi}^{\beta} \frac{\mathfrak{Sin}\gamma d\psi}{\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)} + \int_{\psi}^{\beta} \frac{\mathfrak{Cos}\gamma d\psi}{\mathfrak{Sin}(\gamma-\psi)}\right).$$

Setzt man in diese Integrale $u$ statt $e^{\psi}$, so ergiebt sich für das erste Integral:

$$\int_{\psi}^{\beta} \frac{d\psi}{\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)} = 2\operatorname{arctg}\frac{e^{\gamma+\beta}-e^{\gamma+\psi}}{1+e^{\beta+\psi+2\gamma}}.$$

**Es ist aber:**

$$\begin{aligned} e^{\gamma+\beta}-e^{\gamma+\psi} &= \mathfrak{Cos}(\gamma+\beta)-\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)+\mathfrak{Sin}(\gamma+\beta)-\mathfrak{Sin}(\gamma+\psi) \\ &= 2\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta-\psi)+2\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta-\psi) \\ &= 2\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta-\psi)\{\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)+\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)\}. \end{aligned}$$

**Ferner ist:**

$$\begin{aligned} 1+e^{\beta+\psi+2\gamma} &= 1+\mathfrak{Cos}(\beta+\psi+2\gamma)+\mathfrak{Sin}(\beta+\psi+2\gamma) \\ &= 2\mathfrak{Cos}^2\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)+2\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma) \\ &= 2\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)\{\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)+\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)\}, \end{aligned}$$

**daher auch:**

$$39)\quad \int_{\psi}^{\beta} \frac{d\psi}{\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)} = 2\operatorname{arctg}\frac{\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta-\psi)}{\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)}.$$

**In derselben Weise findet man:**

$$\begin{aligned} 40)\quad \int_{\psi}^{\beta} \frac{d\psi}{\mathfrak{Sin}(\gamma-\psi)} &= -2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tg}\frac{e^{\psi-\gamma}-e^{\beta-\gamma}}{1-e^{\beta+\psi-2\gamma}} \\ &= -2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tg}\frac{\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta-\psi)}{\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi-2\gamma)}. \end{aligned}$$

**Mit *Hülfe* der Formeln 39) und 40) wird aus Formel 38):**

41)

$$x = \frac{2k}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\{\mathfrak{Sin}\,\gamma\operatorname{arctg}\frac{\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta-\psi)}{\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)}-\mathfrak{Cos}\,\gamma\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tg}\frac{\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta-\psi)}{\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi-2\gamma)}\}.$$

**Da** $\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tg}\,u = \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}$ **ist, so ist auch:**

$$\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tg}\frac{\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta-\psi)}{\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi-2\gamma)} = \frac{1}{2}\log\frac{\mathfrak{Tg}\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)}{\mathfrak{Tg}\tfrac{1}{2}(\gamma-\psi)} = -\frac{1}{2}\log\frac{\mathfrak{Tg}\tfrac{1}{2}(\gamma-\psi)}{\mathfrak{Tg}\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)},$$

**daher auch:**

42)

$$x = \frac{k}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\{2\,\mathfrak{Sin}\,\gamma\operatorname{arctg}\frac{\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{2}(\beta-\psi)}{\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{2}(\beta+\psi+2\gamma)}+\mathfrak{Cos}\,\gamma\log\frac{\mathfrak{Tg}\tfrac{1}{2}(\gamma-\psi)}{\mathfrak{Tg}\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)}\}.$$

**Ferner hat man:**

$$43) \ldots\ldots y = k\int_{\psi}^{\beta} \frac{\sin 2\psi d\psi}{\sin 2\gamma - \sin 2\psi},$$

durch Division mit dem Nenner und Integration:

$$44) \ldots y = k(\psi - \beta) + k\sin 2\gamma \int_{\psi}^{\beta} \frac{d\psi}{\sin 2\gamma - \sin 2\psi}.$$

Führt man wieder $u$ für $e^{2\psi}$ ein, so ergiebt sich:

$$\int \frac{d\psi}{\sin 2\gamma - \sin 2\psi} = \frac{1}{2\cos 2\gamma} \log \frac{\cos 2\gamma - \sin 2\gamma + e^{2\psi}}{\cos 2\gamma + \sin 2\gamma - e^{2\psi}}$$

$$= \frac{1}{2\cos 2\gamma} \log \frac{e^{2\psi} + e^{-2\gamma}}{e^{2\gamma} - e^{2\psi}}$$

$$= \frac{1}{2\cos 2\gamma} \log \frac{e^{\gamma+\psi} + e^{-(\gamma+\psi)}}{e^{\gamma-\psi} - e^{-(\gamma-\psi)}} \cdot e^{-2\gamma}$$

$$= \frac{1}{2\cos 2\gamma} \log \frac{\cos(\gamma+\psi)}{\sin(\gamma-\psi)} e^{-2\gamma},$$

daher:

$$\int_{\psi}^{\beta} \frac{d\psi}{\sin 2\gamma - \sin 2\psi} = \frac{1}{2\cos 2\gamma} \log \frac{\cos(\gamma+\beta)}{\cos(\gamma+\psi)} \cdot \frac{\sin(\gamma-\psi)}{\sin(\gamma-\beta)}$$

und

$$45) \quad y = k\{\tfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2\gamma \log \frac{\cos(\gamma+\beta)}{\cos(\gamma+\psi)} \cdot \frac{\sin(\gamma-\psi)}{\sin(\gamma-\beta)} - (\beta-\psi)\}.$$

Für sehr kleine Werthe von $\psi$, $\beta$ und $\gamma$ ergeben sich aus den Formeln 43) und 45) sofort die in den Formeln 34) und 35) für $x$ und $y$ gefundenen Ausdrücke.

Für den Werth von $v$ erhält man unter der gemachten Voraussetzung:

46)

$$v = \cos\psi \sqrt{\frac{gk}{\tfrac{1}{2}(\sin 2\gamma - \sin 2\psi)}} = \cos\psi \sqrt{\frac{gk}{\cos(\gamma+\psi)\sin(\gamma-\psi)}}.$$

Der Ausdruck für $\psi$ wird etwas complicirter, es ist nämlich:

47)

$$t=\sqrt{\frac{k}{g}}\int_{\psi}^{\beta}\frac{\mathfrak{Cos}\,\psi d\psi}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{Sin}2\gamma-\mathfrak{Sin}2\psi)}}=\sqrt{\frac{2k}{g}}\int_{\psi}^{\beta}\frac{\mathfrak{Cos}\,\psi d\psi}{\sqrt{\mathfrak{Sin}2\gamma-\mathfrak{Sin}2\psi}}.$$

Setzt man in diese Formel für $\mathfrak{Cos}\,\psi$ seinen Werth

$$\frac{1}{2}(e^{\psi}+e^{-\psi})$$

ein, so entsteht:

48) $$t=\sqrt{\frac{2k}{g}}\left(\int_{\psi}^{\beta}\frac{e^{\psi}d\psi}{\sqrt{\mathfrak{Sin}2\gamma-\mathfrak{Sin}2\psi}}+\int\frac{e^{-\psi}d\psi}{\sqrt{\mathfrak{Sin}2\gamma-\mathfrak{Sin}2\psi}}\right).$$

Wenn in das erste Integral $\sqrt{u}$ statt $e^{\psi}$ gesetzt wird, so erhält man:

$$\int\frac{e^{\psi}d\psi}{\sqrt{\mathfrak{Sin}2\gamma-\mathfrak{Sin}2\psi}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^2 2\gamma-(u-\mathfrak{Sin}2\gamma)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{1-\left(\frac{e^{2\psi}-\mathfrak{Sin}2\gamma}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{2e^{\psi}}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\sqrt{\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)\,\mathfrak{Sin}(\gamma-\psi)},$$

und daher:

49) $$\int_{\psi}^{\beta}\frac{e^{\psi}d\psi}{\sqrt{\mathfrak{Sin}2\gamma-\mathfrak{Sin}2\psi}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\arcsin\frac{2e^{\psi}}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\sqrt{\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)\,\mathfrak{Sin}(\gamma-\psi)}\right.$$

$$\left.-\arcsin\frac{2e^{\beta}}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\sqrt{\mathfrak{Cos}(\gamma+\beta)\,\mathfrak{Sin}(\gamma-\beta)}\right\}.$$

Behandelt man das zweite Integral in ähnlicher Weise, indem man $e^{-\psi}=\sqrt{u}$ setzt, so ergiebt sich:

50) $$\int_{\psi}^{\beta}\frac{e^{-\psi}d\psi}{\sqrt{\mathfrak{Sin}2\gamma-\mathfrak{Sin}2\psi}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\mathfrak{Arc\,Sin}\frac{2e^{-\psi}}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\sqrt{\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)\,\mathfrak{Sin}(\gamma-\psi)}\right.$$

$$\left.-\mathfrak{Arc\,Sin}\frac{2e^{-\beta}}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\sqrt{\mathfrak{Cos}(\gamma+\beta)\,\mathfrak{Sin}(\gamma-\beta)}\right\}.$$

Mithin aus den Formeln 48), 49) und 51):

$$51)\quad t=\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot\left\{\begin{array}{l}\arcsin\dfrac{2e^{\psi}}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\sqrt{\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)\,\mathfrak{Sin}(\gamma-\psi)}\\ -\arcsin\dfrac{2e^{\beta}}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\sqrt{\mathfrak{Cos}(\gamma+\beta)\,\mathfrak{Sin}(\gamma-\beta)}\\ +\operatorname{Arc}\mathfrak{Sin}\dfrac{2e^{-\psi}}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\sqrt{\mathfrak{Cos}(\gamma+\psi)\,\mathfrak{Sin}(\gamma-\psi)}\\ -\operatorname{Arc}\mathfrak{Sin}\dfrac{2e^{-\beta}}{\mathfrak{Cos}\,2\gamma}\sqrt{\mathfrak{Cos}(\gamma+\beta)\,\mathfrak{Sin}(\gamma-\beta)}\end{array}\right\}.$$

Auch diese Formel giebt für sehr kleine Werthe von $\psi$, $\beta$ und $\gamma$ den früher für $t$ gefundenen Ausdruck wieder.

## IX.

## Die Gleichung zwischen den Seiten des Fünf-, Sechs- und Zehnecks.

Von

Herrn Director Dr. *Heinen*

an der Realschule zu Düsseldorf.

Für den im 42sten Theile S. 193. dieses Archivs behandelten Satz lässt sich auch ohne das von Herrn Schmidt dort aufgestellte interessante Lemma ein einfacher Beweis geben.

Ist nämlich (Taf. IV. Fig. 4.) $AB=f$ die ganze, $AD$ die halbe Seite des Fünfecks, $AC=z$ die ganze, $AF$ die halbe Seite des Zehnecks, $M$ der Mittelpunkt und $CE=2r$ der Durchmesser des Kreises, so ist:

$$AD^2=\frac{f^2}{4}=CD.DE,\quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

und, da $MFA$ und $MDA$ rechte Winkel sind, also $F$, $D$ auf einem über $AM$ beschriebenen Halbkreise liegen,

$$CA.CF = CD.CM,$$

also:

$$\frac{z^2}{2} = CD.r.$$

Aber für die Seite $z$ gilt auch die Gleichung:

$$z^2 = r(r-z), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

also ist $\frac{r-z}{2} = CD$, mithin $DE = r + r - CD = r + \frac{r+z}{2}$; folglich ist:

$$\frac{f^2}{4} = \left(\frac{r-z}{2}\right)\left(\frac{r+z}{2} + r\right) = \frac{r^2-z^2}{4} + \frac{r(r-z)}{2},$$

oder wegen (2):

$$f^2 = r^2 + z^2.$$

Gewöhnlich beweise ich den Satz in einer anderen Weise, welche sich an die Construction des Zehnecks unmittelbar anschliesst und nicht weniger einfach ist. Ist nämlich auf $MC$ das Stück $MG = z$ abgeschnitten, so ist bekanntlich $AG = MG = AC$, mithin $D$ die Mitte von $CG$, also:

$$CD = \frac{CG}{2} = \frac{r-z}{2},$$

$$MD = \frac{MC + MG}{2} = \frac{r+z}{2},$$

$$DE = MD + ME = \frac{r+z}{2} + r,$$

und die Substitution der Werthe von $CD$ und $DE$ in (1) gibt dann mittelst (2) wieder sofort die gesuchte Gleichung.

Anmerkung. In einem gedruckten Schreiben (an Professor Gerling zu dessen 50jähriger Doctorpromotion. Cassel. 1862.) hat Herr Rector Dr. Grebe nachgewiesen, dass die Richtigkeit des obigen Satzes an einem regulären Dodekaeder oder Ikosaeder fast unmittelbar in die Augen springt; sollte er aber deshalb in der Planimetrie nicht „seine Heimath" haben, „ein Fremdling" sein? *)

*) M. s. was ich über diese Ansicht des Herrn Dr. Grebe in Theil XL. S. 127. und S. 128. mir zu bemerken erlaubt habe, was Herr Director Heinen wohl zufällig übersehen hat. G.

# X.

# Miscellen.

## Ueber einen geometrischen Satz vom Dreieck.

Von dem Herausgeber.

In der schönen Abhandlung: „Intorno alle coniche di nove punti e ad alcune quistioni che ne dipendono. Nota del Prof. Eugenio Beltrami. 1863. 4°.“, aus welcher ich schon in Thl. XLII. S. 354.—S. 356. einen bemerkenswerthen geometrischen Satz mitgetheilt habe, hat Herr Professor Eugenio Beltrami in Pisa aus einem allgemeineren Satze von den Kegelschnitten den folgenden Elementarsatz vom ebenen Dreieck abgeleitet:

Wenn man durch die drei Spitzen eines Dreiecks drei beliebige parallele Gerade legt und dann durch dieselben Spitzen drei Gerade zieht, welche mit den, die Winkel des Dreiecks halbirenden Geraden (nach entgegengesetzten Seiten hin) dieselben Winkel einschliessen, wie die entsprechenden Parallelen: so schneiden sich diese drei letzteren Geraden jederzeit in **einem** Punkte, welcher auf der Peripherie des dem Dreieck umschriebenen Kreises liegt.

Um, wie den früheren vorher erwähnten, auch diesen Satz, zu dessen Erläuterung Taf. IV. Fig. 3. — in welcher $AO$, $BO$, $CO$ die Linien sind, von denen die Winkel des Dreiecks $ABC$ halbirt werden, — dient, nach der aus meiner Abhandlung Theil XXXVI. Nr. XVIII. bekannten, so fruchtbaren, schon oft von mir angewandten Methode zu beweisen, schicke ich zuerst die folgende einfache, allgemeine analytisch-geometrische Betrachtung voraus.

Die Gleichung einer durch einen gewissen Punkt, der als Anfang der Coordinaten angenommen werden mag, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, gehenden Geraden sei:

1) . . . . . $\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$ *).

Die Gleichungen zweier anderen, durch denselben Punkt gehenden Geraden seien:

2) . . . . . $\frac{x}{\cos\alpha'} = \frac{y}{\sin\alpha'}$, $\frac{x}{\cos\alpha''} = \frac{y}{\sin\alpha''}$.

Auf den Theilen dieser beiden Geraden, denen die Winkel $\alpha'$, $\alpha''$ entsprechen, nehme man zwei Punkte $P'$, $P''$ an, welche von dem Anfange der Coordinaten gleich weit entfernt sind; so sind, wenn $r$ diese einander gleichen Entfernungen bezeichnet, die Coordinaten der Punkte $P'$ und $P''$ respective:

$$r\cos\alpha', \quad r\sin\alpha' \text{ und } r\cos\alpha'', \quad r\sin\alpha'';$$

und die Coordinaten des Mittelpunkts der Geraden $P'P''$ sind also:

$$\tfrac{1}{2}r(\cos\alpha' + \cos\alpha''), \quad \tfrac{1}{2}r(\cos\alpha'' + \sin\alpha'').$$

Sollen nun die durch die Winkel $\alpha'$, $\alpha''$ bestimmten Theile der Geraden 2) mit dem durch den Winkel $\alpha$ bestimmten Theile der Geraden 1) nach entgegengesetzten Seiten hin gleiche Winkel einschliessen; so muss der vorhergehende Mittelpunkt in der Geraden 1) liegen, und es muss folglich die Gleichung:

$$\frac{\tfrac{1}{2}r(\cos\alpha' + \cos\alpha'')}{\cos\alpha} = \frac{\tfrac{1}{2}r(\sin\alpha' + \sin\alpha'')}{\sin\alpha},$$

also die Gleichung:

$$\frac{\cos\alpha' + \cos\alpha''}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha' + \sin\alpha''}{\sin\alpha}$$

Statt finden. Aus dieser Gleichung folgt auf der Stelle:

$$\sin\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha' = \cos\alpha\sin\alpha'' - \sin\alpha\cos\alpha'',$$

also:

$$\sin(\alpha - \alpha') = \sin(\alpha'' - \alpha).$$

Folglich ist, wenn $n$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

---

*) Ich schreibe die Gleichung der Geraden hier und im Folgenden absichtlich in dieser und nicht in der sonst üblichen, natürlich an sich auch völlig richtigen Weise: $y = x\,\mathrm{tang}\,\alpha$. Der Winkel $\alpha$ bezieht sich auf die eine der beiden Richtungen der Geraden und mag auf bekannte Weise von 0 bis 360° gezählt sein, so wie auch alle übrigen vorkommenden Winkel.

$$\alpha'' - \alpha = \begin{cases} 2n\pi + (\alpha - \alpha') \\ (2n+1)\pi - (\alpha - \alpha') \end{cases}$$

wie aus der allgemeinen Theorie der Kreisfunctionen *) bekannt ist; also:

$$\alpha'' = \begin{cases} 2n\pi + (2\alpha - \alpha'), \\ (2n+1)\pi + \alpha'. \end{cases}$$

Offenbar ist nun die zweite Gleichung

$$\alpha'' = (2n+1)\pi + \alpha'$$

im Allgemeinen nicht zulässig, weil ja dann $\alpha''$ nur von $\alpha'$, gar nicht von $\alpha$ abhängig sein würde, und man kann daher im Allgemeinen nur

$$\alpha'' = 2n\pi + (2\alpha - \alpha')$$

setzen, woraus sich sogleich die Gleichungen:

3) . . . $\sin\alpha'' = \sin(2\alpha - \alpha'), \quad \cos\alpha'' = \cos(2\alpha - \alpha')$

ergeben.

Rücksichtlich der vorher ausgeschlossenen Gleichung:

$$\alpha'' = (2n+1)\pi + \alpha'$$

möge vollständiger Deutlichkeit wegen noch bemerkt werden, dass man in derselben, weil $\alpha'$, $\alpha''$ positiv und nicht grösser als $2\pi$ sind, nur $n = 0$ und $n = -1$ setzen kann, wodurch sich

$$\alpha'' = \alpha' \pm \pi$$

ergiebt. Hieraus sieht man, dass in diesem Falle die durch die Winkel $\alpha'$, $\alpha''$ bestimmten Theile der Geraden 2) einander direct entgegengesetzt sind, so dass also, wie sich mittelst einer einfachen Betrachtung ergiebt, nur

$$\alpha' = \alpha \mp \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\alpha'' = \alpha \pm \tfrac{1}{2}\pi$$

oder

$$\alpha' = \alpha \mp \tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{oder} \qquad \alpha' = \alpha \mp \tfrac{3}{2}\pi$$
$$\alpha'' = \alpha \mp \tfrac{3}{2}\pi \qquad\qquad \alpha'' = \alpha \mp \tfrac{1}{2}\pi,$$

also:

*) M. s. etwa meine Supplemente zum mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 623. unter 32. I.

$$\alpha' + \alpha'' = 2\alpha \quad \text{oder} \quad \alpha' + \alpha'' = 2\alpha \mp 2\pi,$$

folglich:

$$\alpha'' = 2\alpha - \alpha' \quad \text{oder} \quad \alpha'' = 2\alpha - \alpha' \mp 2\pi$$

sein kann. In beiden Fällen ist aber:

$$\sin\alpha'' = \sin(2\alpha - \alpha'), \quad \cos\alpha'' = \cos(2\alpha - \alpha')$$

ganz wie in 3), welche Gleichungen demnach jedenfalls ganz allmein gültig sind.

Nach dieser vorläufigen allgemeinen analytisch-geometrischen Betrachtung, die durchaus nicht unmittelbar hierher, sondern mehr in das Gebiet der analytischen Geometrie im Allgemeinen gehört, und hier nur grösserer Deutlichkeit wegen, so einfach die Sache auch an sich ist, in der obigen völlig allgemeinen Darstellung aufgenommen worden ist, gehen wir nun zu dem Beweise des Satzes von Herrn E. Beltrami selbst über.

Durch die Ecken $A$, $B$, $C$ des Dreiecks $ABC$ denken wir uns drei einander parallele Gerade gelegt, deren auf der positiven Seite von $AB$ (m. s. über alle hier vorkommende Bestimmungen und Bezeichnungen die oben angeführte Abhandlung in Thl. XXXVI.) liegende Theile mit der Richtung $AB$ den $180^0$ nicht übersteigenden Winkel $\theta$ einschliessen. Die mit den, die Winkel des Dreiecks $ABC$ halbirenden Geraden $AO$, $BO$, $OC$ nach den entgegengesetzten Seiten hin dieselben Winkel wie die in Rede stehenden Theile der durch die Ecken des Dreiecks gelegten Parallelen einschliessenden, von $A$, $B$, $C$ ausgehenden Geraden mögen mit der Richtung $AB$ die auf gewöhnliche Weise von 0 bis $360^0$ gezählten Winkel $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ einschliessen, und $\alpha$ mag für die Geraden $AO$, $BO$, $OC$ dieselbe Bedeutung behalten wie bei der obigen vorläufigen analytisch-geometrischen Betrachtung im Allgemeinen.

Für die Gerade $AO$ ist offenbar

$$\alpha = \tfrac{1}{2}A, \quad 2\alpha = A;$$

folglich nach 3):

$$\sin\theta_1 = \sin(A - \theta), \quad \cos\theta_1 = \cos(A - \theta).$$

Für die Gerade $BO$ ist offenbar:

$$\alpha = A + C + \tfrac{1}{2}B = 180^0 - \tfrac{1}{2}B, \quad 2\alpha = 360^0 - B;$$

also nach 3):

$$\sin\theta_2 = \sin\{360^0 - (B+\theta)\} = -\sin(B+\theta),$$
$$\cos\theta_2 = \cos\{360^0 - (B+\theta)\} = \cos(B+\theta).$$

Für die Gerade $OC$ ist offenbar:

$$\alpha = A + \tfrac{1}{2}C, \quad 2\alpha = 2A + C = 180^0 + (A-B);$$

folglich nach 3):

$$\sin\theta_3 = \sin\{180^0 + (A-B-\theta)\} = -\sin(A-B-\theta),$$
$$\cos\theta_3 = \cos\{180^0 + (A-B-\theta)\} = -\cos(A-B-\theta).$$

Nach Thl. XXXVI. S. 326. §. 2., wo man die Coordinaten der Punkte $A$, $B$, $C$ angegeben findet, sind die Gleichungen der durch diese Punkte gehenden, durch die Winkel $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ bestimmten Geraden:

$$\frac{x}{\cos\theta_1} = \frac{y}{\sin\theta_1},$$
$$\frac{x - 2R\sin C}{\cos\theta_2} = \frac{y}{\sin\theta_2},$$
$$\frac{x - 2R\cos A\sin B}{\cos\theta_3} = \frac{y - 2R\sin A\sin B}{\sin\theta_3};$$

oder:

$$y = x\,\mathrm{tang}\,\theta_1,$$
$$y = (x - 2R\sin C)\,\mathrm{tang}\,\theta_2,$$
$$y - 2R\sin A\sin B = (x - 2R\cos A\sin B)\,\mathrm{tang}\,\theta_3);$$

also nach dem Vorstehenden:

4)

$$y = x\,\mathrm{tang}\,(A-\theta),$$
$$y = -(x - 2R\sin C)\,\mathrm{tang}\,(B+\theta),$$
$$y - 2R\sin A\sin B = (x - 2R\cos A\sin B)\,\mathrm{tang}\,(A-B-\theta).$$

Aus den beiden ersten dieser drei Gleichungen bestimme man $x$, $y$, um die Coordinaten des Durchschnittspunktes der durch diese beiden Gleichungen charakterisirten Geraden zu finden. Zu dem Ende ist zuvörderst:

$$x\,\mathrm{tang}\,(A-\theta) = -(x - 2R\sin C)\,\mathrm{tang}\,(B+\theta),$$

also:

$$x\{\mathrm{tang}\,(A-\theta) + \mathrm{tang}\,(B+\theta)\} = 2R\sin C\,\mathrm{tang}\,(B+\theta),$$

$$\frac{x\sin(A+B)}{\cos(A-\theta)\cos(B+\theta)} = \frac{x\sin C}{\cos(A-\theta)\cos(B+\theta)} = 2R\sin C\,\mathrm{tang}(B+\theta);$$

folglich, wenn man dies zugleich mit der ersten der drei Gleichungen 4) verbindet:

$$5) \quad \begin{cases} x = 2R\cos(A-\theta)\sin(B+\theta), \\ y = 2R\sin(A-\theta)\sin(B+\theta). \end{cases}$$

Führt man diese Ausdrücke von $x$, $y$ in die dritte der Gleichungen 4) ein, so wird dieselbe:

$$\{\sin(A-\theta)\sin(B+\theta) - \sin A\sin B\}\cos(A-B-\theta)$$
$$= \{\cos(A-\theta)\sin(B+\theta) - \cos A\sin B\}\sin(A-B-\theta),$$

$$\sin(B+\theta)\{\sin(A-\theta)\cos(A-B-\theta) - \cos(A-\theta)\sin(A-B-\theta)\}$$
$$= \sin B\{\sin A\cos(A-B-\theta) - \cos A\sin(A-B-\theta)\},$$

$$\sin(B+\theta)\sin B = \sin B\sin(B+\theta).$$

Da dies eine Identität ist, so schneiden sich die durch die drei Gleichungen 4) charakterisirten Geraden in einem Punkte, welches der erste Theil des zu beweisenden Satzes war.

Nach Thl. XXXVI. S. 329. 2) sind die Coordinaten des Mittelpunkts des um das Dreieck $ABC$ beschriebenen Kreises:

$$R\sin C, \quad R\cos C.$$

Die Formeln 5) kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$x = R\{\sin(A+B) + \sin(B-A+2\theta)\},$$
$$y = R\{\cos(B-A+2\theta) - \cos(A+B)\};$$

also:

$$x = R\{\sin C + \sin(2\theta - A + B)\},$$
$$y = R\{\cos C + \cos(2\theta - A + B)\};$$

folglich:

$$x - R\sin C = R\sin(2\theta - A + B),$$
$$y - R\cos C = R\cos(2\theta - A + B);$$

also:

$$(x - R\sin C)^2 + (y - R\cos C)^2 = R^2,$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei durch die Gleichungen 4) charakterisirten Geraden in der Peripherie des um das Dreieck $ABC$ beschriebenen Kreises, dessen Halbmesser bekanntlich $R$ ist, liegt, welches der zweite Theil des zu beweisenden Satzes war.

Der Satz ist also jetzt vollständig bewiesen.

Ich werde anderen, namentlich rein-geometrischen, Beweisen des obigen Beltrami'schen Satzes sehr gern eine Stelle im Archiv einräumen, wenn man sie mir mitzutheilen die Güte hat, und erlaube mir zur Einsendung von Beweisen dieser oder auch anderer Art aufzufordern. Selbst den obigen Beweis zu suchen und hier mitzutheilen, hielt ich mich für verpflichtet, um mich von der völligen Richtigkeit des Satzes noch auf einem anderen Wege, als von dem Herrn Erfinder geschehen, zu versichern, bevor ich zur Einsendung von Beweisen aufzufordern glaubte mir erlauben zu dürfen, ein Verfahren, welches ich nach Möglichkeit in ähnlichen Fällen immer festzuhalten suche.

---

## Ueber eine stereometrische Aufgabe.

Von dem Herausgeber.

Das nun schon ziemlich alte, aber nach meiner Meinung keineswegs veraltete Buch:

> Niedere und höhere praktische Stereometrie von Wilhelm Hossfeld, Herzoglich Sachsen-Meiningischen Forstkommissar, Lehrer an der Forstakademie und Sekretair der Forstsocietät zu Dreissigacker. Leipzig 1812. 4°.

enthält Vieles, was auch jetzt noch zur Benutzung bei'm stereometrischen Unterrichte empfohlen zu werden verdient. Dass in diesem unter Mathematikern wohl wenig bekannten Buche S. 93. — S. 100. schon der Name Obelisk und Betrachtungen obeliskenartiger Körper, so wie Anwendungen derselben zur leichten Berechnung anderer Körper, vorkommen, habe ich mir schon einmal zu bemerken erlaubt*). Jetzt will ich aus demselben eine leichte Aufgabe entlehnen und hier mittheilen, die ich mich nicht erinnere, anderwärts schon gefunden zu haben**), die aber prak-

---

*) Thl. XXXVI. S. 504.

**) T. Mayer's praktische Stereometrie kann ich jetzt gerade nicht nachsehen. Bei Mittheilungen wie die vorliegende in dem Archiv, die nicht der Wissenschaft, sondern nur dem Unterrichte dienen sollen, kommt es aber, wie ich schon oft bemerkt habe, auch gar nicht darauf an, ob sie sich in ähnlicher Weise nicht schon anderwärts finden, wenn sie nur überhaupt wenig bekannt sind.

sich wichtig ist und bei'm Unterrichte als Uebungsaufgabe benutzt zu werden verdient, indem sie auch eine für erste Anfänger lehrreiche Anwendung des binomischen Lehrsatzes zur Entwickelung einer für die Praxis brauchbaren Näherungsformel darbietet.

## Aufgabe.

In welcher Höhe über der unteren oder grösseren Grundfläche eines abgestumpften Kegels muss der Halbmesser oder Durchmesser, oder die Peripherie eines Queerschnitts dieses Kegels gemessen werden, wenn dieser Queerschnitt die Grundfläche eines Cylinders von gleicher Höhe und gleichem Inhalt mit dem Kegel sein soll, der Kegel also wie ein Cylinder von dieser Höhe und Grundfläche sich soll berechnen lassen?

Auflösung. In Taf. IV. Fig. 6. sei $ABCD$ der abgestumpfte Kegel, die Halbmesser seiner oberen und unteren Grundfläche seien $r$ und $R$, und $h$ sei die Höhe. Die gesuchte Höhe des Queerschnitts über der unteren Grundfläche sei $x$, und $y$ sei der Halbmesser dieses Queerschnitts. Das auf den beiden Grundflächen senkrecht stehende Axen-Trapez des abgestumpften Kegels sei $ABCD$. Durch $D$ denke man sich mit der Axe $MN$ des Kegels die Parallele $DE$ und die Höhe $DF$ des Kegels gezogen; dann hat man offenbar die Proportion:

$$R-r : y-r = h : h-x,$$

aus welcher

$$R-r : R-y = h : x,$$

und hieraus

$$y = R - \frac{(R-r)x}{h}$$

folgt. Der Inhalt des abgestumpften Kegels ist bekanntlich:

$$\tfrac{1}{3}h\pi(R^2 + Rr + r^2),$$

so dass man also nach den Bedingungen der Aufgabe die Gleichung

$$\tfrac{1}{3}h\pi(R^2 + Rr + r^2) = hy^2\pi,$$

und hieraus

$$y = \sqrt{\frac{R^2 + Rr + r^2}{3}}$$

hat, welches, mit dem Obigen verbunden, unmittelbar zu der Gleichung:

$$R-\frac{(R-r)x}{h}=\sqrt{\frac{R^2+Rr+r^2}{3}}$$

führt, aus der sich sogleich:

$$x=\frac{h}{R-r}\left\{R-\sqrt{\frac{R^2+Rr+r^2}{3}}\right\}$$

ergiebt, womit die Aufgabe gelöst ist.

Statt der Halbmesser $R$ und $r$ kann man natürlich auch die Durchmesser $D$ und $d$ der unteren und oberen Grundfläche in diese Formel einführen, wodurch man:

$$x=\frac{h}{D-d}\left\{D-\sqrt{\frac{D^2+Dd+d^2}{3}}\right\}$$

erhält.

Setzen wir jetzt:

$$u=D+d,\quad v=D-d;$$

so ist:

$$2D=u+v,\quad 2d=u-v;$$

also:

$$4(D^2+Dd+d^2)$$
$$=(u+v)^2+(u+v)(u-v)+(u-v)^2$$
$$=3u^2+v^2=3(D+d)^2+(D-d)^2,$$

und folglich:

$$\frac{D^2+Dd+d^2}{3}=\left(\frac{D+d}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2,$$

also nach dem Obigen:

$$x=\frac{h}{D-d}\left\{D-\sqrt{\left(\frac{D+d}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2}\right\},$$

oder:

$$x=\frac{h}{D-d}\left\{D-\frac{D+d}{2}\sqrt{1+\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2}\right\}.$$

Weil die Grösse

$$\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2$$

stets kleiner als die Einheit ist, so ist die Anwendung des Bino-

nischen Lehrsatzes zur Entwickelung der Wurzelgrösse in eine Reihe verstattet, wodurch man:

$$\sqrt{1+\tfrac{1}{3}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2} = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2 - \frac{1}{2.4}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2\right\}^2 + \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2\right\}^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2\right\}^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

also:

$$x = \frac{h}{D-d}\left\{\frac{D-d}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{D+d}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2 + \frac{1}{2.4}\cdot\frac{D+d}{2}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2\right\}^2 - \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{D+d}{2}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2\right\}^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{D+d}{2}\cdot\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2\right\}^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\},$$

oder:

$$x = \tfrac{1}{3}h\left\{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{D-d}{D+d} + \frac{1}{2.4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^3 - \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^7 - \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$

erhält.

Wenn der abgestumpfte Kegel, wie dies meistens in der Praxis der Fall ist, wenig von einem Cylinder abweicht, so wird man mit grosser Annäherung:

$$x = \tfrac{1}{3}h\left(1 - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{D-d}{D+d}\right)$$

setzen können, mittelst welcher Formel sich $x$ leicht berechnen lässt.

Für die rohere Praxis giebt Hossfeld die Regel, dass man den Queerschnitt des Kegels nicht in der Mitte, sondern etwas unter der halben Höhe messen müsse. Am Einfachsten wird man in dieser Höhe immer den Umfang $p$ des Queerschnitts messen; dann ist $\frac{p^2}{4\pi}$ sein Inhalt, und folglich $\frac{p^2 h}{4\pi}$ der Inhalt des Kegels.

Man kann aus dem Vorstehenden auch die folgende bekannte Formel für den Inhalt des abgestumpften Kegels ableiten. Nach dem Obigen ist:

$$y = R - \frac{(R-r)x}{h},$$

folglich:

$$2y = D - \frac{(D-d)x}{h},$$

und da nun nach dem Obigen ferner:

$$\frac{(D-d)x}{h} = D - \frac{D+d}{2}\sqrt{1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2}$$

ist, so ist:

$$2y = \frac{D+d}{2}\sqrt{1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2},$$

also:

$$y = \frac{D+d}{4}\sqrt{1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2},$$

folglich der Inhalt des Kegels:

$$h\pi\left(\frac{D+d}{4}\right)^2\left\{1+\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2\right\}$$

$$= h\pi\left\{\left(\frac{D+d}{4}\right)^2+\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{D-d}{4}\right)^2\right\}.$$

Das Weitere überlassen wir dem Leser.

Von dem Herausgeber.

Dass die Sehne des sechsten Theils der Peripherie gleich dem Halbmesser ist, kann man anders als auf die gewöhnliche einfache Weise auch auf folgende Art beweisen. In Taf. II. Fig. 1. sei $AD$ die Sehne des dritten, also $BD$ die Sehne des sechsten Theils der Peripherie. Fällt man von $D$ auf $AB$ des Perpendikel $DE$, so ist offenbar $DE=AD$. Nun ist:

$$2\Delta ABD = AD.BD,$$

$$2\Delta ABD = AB.\tfrac{1}{2}DE = \tfrac{1}{2}AB.DE = r.AD;$$

also:

$$AD.BD = r.AD, \quad BD = r;$$

wie behauptet wurde.

Hieraus ist nun auch:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2,$$

also:

$$AD = r\sqrt{3}.$$

Zur Abwechslung kann man ja bei'm Unterrichte auch einmal dieses Verfahren anwenden.

---

## Ueber die Beschreibung des regulären Fünfecks und Zehnecks in den Kreis.

Von dem Herausgeber.

Es scheint mir eine nicht ganz uninteressante Bemerkung zu sein, dass sich aus denselben Principien, aus denen in dem Aufsatze Thl. XLII. Nr. XLIV. die Beschreibung des regulären Siebzehnecks und Vierunddreissigecks in den Kreis abgeleitet worden ist, auch die Beschreibung des regulären Fünfecks und Zehnecks in den Kreis ableiten lässt, welches zu zeigen der Zweck der folgenden Zeilen ist.

In der Weise, wie aus Taf. II. Fig. 2. von selbst ersichtlich ist, denke man sich den mit dem Halbmesser $r$ beschriebenen Kreis in fünf gleiche Theile getheilt. Dann ist nach Thl. XLII. Nr. XLIV. 5) *):

*) Ich beziehe mich hier immer auf die genannte Abhandlung und schliesse Alles eng an dieselbe an.

$$OA_1 . A_0A_1 = r . A_0A_2,$$
$$OA_2 . A_0A_2 = r . A_0A_1;$$

also, wenn man multiplicirt und aufhebt was sich aufheben lässt:

1) . . . . . $OA_1 . OA_2 = r^2.$

Bezeichnen wir nun wieder wie a. a. O. die halbe Peripherie durch $p$, und nehmen als Maasseinheit für alle Bogen den fünften Theil der Peripherie, setzen also:

2) . . . . . $p = 2\frac{1}{2},$

so ist, indem man zuvördest bemerkt, dass, wie klar vor Augen liegt:

$$\text{Arc } OA_1 + \text{Arc } OA_2 < p$$

ist:

$$p - \text{Arc } OA_1 + \text{Arc } OA_2 = 2\tfrac{1}{2} - (2\tfrac{1}{2} - 1) + (2\tfrac{1}{2} - 2)$$
$$= 2\tfrac{1}{2} - 1,$$
$$p - \text{Arc } OA_1 - \text{Arc } OA_2 = 2\tfrac{1}{2} - (2\tfrac{1}{2} - 1) - (2\tfrac{1}{2} - 2)$$
$$= 2\tfrac{1}{2} - 2;$$

also offenbar:

$$p - \text{Arc } OA_1 + \text{Arc } OA_2 = \text{Arc } OA_1,$$
$$p - \text{Arc } AO_1 - \text{Arc } OA_2 = \text{Arc } OA_2.$$

Folglich ist nach Thl. XLII. Nr. XLIV. 1), 2):

3) . . . . . $OA_1 . OA_2 = r.(OA_1 - OA_2).$

Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung 1), so erhält man auf der Stelle die Gleichung:

$$OA_1 - OA_2 = r,$$

und hat also jetzt zwischen $OA_1, OA_2$ die beiden Gleichungen:

4) . . . . . $OA_1 - OA_2 = r, OA_1 . OA_2 = r^2;$

mittelst welcher $OA_1$ und $OA_2$ bestimmt werden können.

Offenbar ist $OA_1$ die Sehne von $\frac{2}{10}$ der Peripherie und $OA_2$ die Sehne von $\frac{1}{10}$ der Peripherie, so dass sich aus der ersten der beiden vorhergehenden Gleichungen ergiebt, dass die Differenz zwischen den Sehnen von $\frac{2}{10}$ und $\frac{1}{10}$ der Peripherie dem Radius des Kreises gleich ist; wogegen nach der zweiten Gleichung das Product dieser beiden Sehnen oder das zwischen ihnen enthaltene Rechteck dem Quadrate des Halbmessers des Kreises gleich ist.

Bezeichnen wir die Sehne $OA_2$ von $\frac{1}{10}$ der Peripherie oder die Seite des regulären Zehnecks durch $x$, die Sehne $A_0A_1$ von $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ der Peripherie oder die Seite des regulären Fünfecks durch $y$, die Sehne $OA_1$ von $\frac{1}{10}$ der Peripherie durch $z$; so haben wir nach 4), indem wir zugleich beachten, dass $A_0OA_1$ ein rechtwinkliges Dreieck ist, zwischen $x$, $y$, $z$ die drei folgenden Gleichungen:

5) . . . . . $z-x=r$, $zx=r^2$, $y^2+z^2=4r^2$.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$z=r+x, \quad x(r+x)=r^2, \quad x^2=r^2-rx=r(r-x);$$

wie bekannt. Ferner folgt aus denselben beiden Gleichungen:

$$x=z-r, \quad z(z-r)=r^2, \quad z^2=r^2+rz=r(r+z).$$

Aus beiden Gleichungen folgt weiter:

$$x^2+z^2=(z-x)^2+2zx=r^2+2r^2=3r^2,$$

also, wenn man diese Gleichung von der dritten der Gleichungen 5) subtrahirt:

$$y^2-x^2=r^2,$$

wie bekannt und im Archiv neuerlich (auch in diesem Hefte. Nr. IX.) einigemal besprochen worden ist.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich unmittelbar die folgende Construction der Sehnen von $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $\frac{3}{10}$ der Peripherie. In Taf. II. Fig. 3. ziehe man zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser $AB$ und $DE$ des zu theilenden Kreises und beschreibe über dessen Radius $BC=r$ als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt $M$ ist. Hierauf lege man durch $D$ und $M$ eine diesen letzteren Kreis in $F$ und $G$ schneidende Gerade, beschreibe aus $D$ als Mittelpunkt mit $DF$ und $DG$ als Halbmessern Kreisbogen, welche den zu theilenden Kreis in $H$ und $J$ schneiden, und ziehe die Sehnen $DH$, $DJ$, $HJ$, $EJ$; so ist $DH$ die Sehne von $\frac{1}{10}$, $DJ$ die Sehne von $\frac{3}{10}$, $HJ=EJ$ die Sehne von $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. Die Richtigkeit dieser Construction erhellet mittelst des Obigen auf der Stelle, wenn man nur überlegt, dass

$$DG-DF=FG=r, \quad DG.DF=CD^2=r^2$$

ist.

Weil sich die Construction des regulären Vielecks von $3=2^1+1$, von $5=2^2+1$ und von $17=2^4+1$ Seiten in den Kreis ganz aus denselben ganz elementaren Principien herleiten lässt (M. s.,

ausser dem Vorstehenden, Thl. XLII. Nr. XLIV.); so ist freilich wohl etwas kühne Frage entgegentreten: ob aus ben elementaren Principien nicht vielleicht ein elementa weis des berühmten allgemeinen Satzes abgeleitet werde dass, wenn $2^\alpha+1$ eine Primzahl ist, die Theilung des K $2^\alpha+1$ gleiche Theile sich immer bloss mittelst Lösung tischer Gleichungen oder durch die gerade Linie und de ausführen lässt? Ich habe diese Frage eine „kühne“ vielleicht hilft man mir aber und bietet mir die Möglichl dieselbe im Archive zu beantworten, was jedenfalls ein Gewinn für die Wissenschaft sein würde.

---

Von dem Herausgeber.

Von dem folgenden Satze kann man öfters, z. B. in de von den Asymptoten der Hyperbel, vortheilhaften Gebrauch

Wenn $x$ in's Unendliche wächst, so nähert s Grösse $x-\sqrt{x^2-1}$ der Null, und kann der Null b nahe gebracht werden, wenn man nur $x$ gross nimmt.

Um dies zu beweisen, lasse man $\mu$ eine beliebige Grösse bezeichnen und nehme $x$ grösser als $\frac{1+\mu^2}{2\mu}$, so d

$$x > \frac{1+\mu^2}{2\mu}$$

ist. Dann ist, weil

$$(1+\mu^2)-2\mu = (1-\mu)^2, \text{ also } (1+\mu^2) > 2\mu$$

und folglich

$$\frac{1+\mu^2}{2\mu} > 1$$

ist, auch $x > 1$. Aus der Ungleichung

$$x > \frac{1+\mu^2}{2\mu}$$

folgt nun nach und nach:

$$1+\mu^2 < 2\mu x,$$
$$-2\mu x + \mu^2 < -1,$$
$$x^2 - 2\mu x + \mu^2 < x^2 - 1,$$

$$(x-\mu)^2 < x^2-1,$$
$$x-\mu < \sqrt{x^2-1},$$
$$x-\sqrt{x^2-1} < \mu;$$

wodurch der Satz bewiesen ist, da man sich $\mu$ beliebig nahe bei Null angenommen denken kann, und womit auch der vorhergehende Schluss von

$$(x-\mu)^2 < x^2-1$$

auf

$$x-\mu < \sqrt{x^2-1}$$

von selbst gerechtfertigt ist, weil man sich jedenfalls immer $\mu<1$ angenommen denken kann, wo dann auch $\mu^2<1$, also, wenn man auf beiden Seiten $\mu^2$ addirt, $2\mu^2 < 1+\mu^2$, $\frac{1+\mu^2}{2\mu} > \mu$, folglich nach dem Obigen $x>\mu$, und daher $x-\mu$ positiv ist, wie es sein muss, wenn der erwähnte Schluss richtig sein soll. Je kleiner $\mu$ angenommen wird, desto grösser wird $x > \frac{1+\mu^2}{2\mu}$.

Um hievon eine Anwendung auf die Theorie der Hyperbel zu machen, sei $\alpha$ der halbe Asymptotenwinkel, so ist

$$x\sin\alpha = y\cos\alpha$$

die Gleichung der einen der beiden Asymptoten, welche wir hier, was vollkommen genügt, allein betrachten wollen. Ist nun $(uv)$ ein beliebiger Punkt der Hyperbel und $P$ das von diesem Punkte auf die in Rede stehende Asymptote gefällte, gehörig als positiv oder negativ betrachtete Perpendikel, so ist bekanntlich *):

$$P = v\cos\alpha - u\sin\alpha.$$

Weil $(uv)$ ein Punkt der Hyperbel ist, so ist

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2 - \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1,$$

woraus

$$v = \pm\frac{b}{a}\sqrt{u^2-a^2}$$

folgt. Also ist nach dem Vorhergehenden:

*) M. s. Thl. XXXVIII. S. 398. Nr. 6), worauf ich wegen des Zeichens, mit welchem das Perpendikel zu nehmen ist, ganz besonders verweise.

$$P = \pm \frac{b}{a}\sqrt{u^2-a^2}.\cos\alpha - u\sin\alpha = -(u\sin\alpha \mp \frac{b}{a}\sqrt{u^2-a^2}.\cos\alpha)$$

$$= -(u\,\mathrm{tang}\,\alpha \mp \frac{b}{a}\sqrt{u^2-a^2})\cos\alpha,$$

und folglich, weil bekanntlich $\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{b}{a}$ ist:

$$P = -\frac{b}{a}(u \mp \sqrt{u^2-a^2})\cos\alpha, \text{ oder } P = -b\left\{\frac{u}{a} \mp \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1}\right\}\cos\alpha,$$

wobei wir des Folgenden wegen bemerken, dass nach dem Obigen für das obere und untere Zeichen $v$ respective positiv und negativ ist. Nimmt man nun $u$ positiv an und lässt es in's Unendliche wachsen, so nimmt nach dem vorher bewiesenen Satze die Grösse

$$\frac{u}{a} - \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1}$$

in's Unendliche ab, die Grösse

$$\frac{u}{a} + \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1}$$

nimmt dagegen offenbar in's Unendliche zu. Nimmt man aber $u$ negativ an und lässt seinen absoluten Werth in's Unendliche wachsen, so nimmt der absolute Werth der Grösse

$$\frac{u}{a} - \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1}$$

offenbar in's Unendliche zu, dagegen nimmt nach dem oben bewiesenen Satze der absolute Werth der Grösse

$$\frac{u}{a} + \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1}$$

in's Unendliche ab. Was hieraus unmittelbar für $P$ folgt, braucht an diesem Orte nicht weiter erläutert zu werden, und auch die fernere Anwendung auf die Hyperbel kann füglich ganz dem Leser überlassen bleiben.

---

Ich will zu dem Vorhergehenden noch bemerken, dass man $u$, $v$ aus $P$ finden kann. Aus der oben gefundenen Gleichung

$$P = -b\left\{\frac{u}{a} \mp \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1}\right\}\cos\alpha$$

folgt nämlich:

$$\frac{P}{b} + \frac{u}{a}\cos\alpha = \pm\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 - 1}.\cos\alpha,$$

also, wenn man quadrirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\cos\alpha^2 + \left(\frac{P}{b}\right)^2 = -2\frac{P}{b}\cdot\frac{u}{a}\cos\alpha,$$

woraus sich

$$u = -\frac{a(P^2 + b^2\cos\alpha^2)}{2bP\cos\alpha}$$

oder

$$u = -\frac{P^2 + b^2\cos\alpha^2}{2P\sin\alpha}, \quad 2u\sin\alpha = -P - \frac{b^2}{P}\cos\alpha^2$$

ergiebt; und weil nun nach dem Obigen

$$v = \frac{P + u\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$v = \frac{P^2 - b^2\cos\alpha^2}{2P\cos\alpha}, \quad 2v\cos\alpha = P - \frac{b^2}{P}\cos\alpha^2;$$

woran sich noch andere Bemerkungen würden knüpfen lassen, indem man z. B. in diese Formeln noch

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

einführen könnte.

Durch die vorstehenden einfachen Formeln wird man Punkte $(uv)$ der Hyperbel bestimmen können, in denen dieselbe sich ihren Asymptoten bis auf eine gegebene Grösse $P$ nähert, was praktisch von Nutzen sein kann.

---

Von dem Herausgeber.

Die Formel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C$$

lässt sich so darstellen:

$$\cos c = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) + \tfrac{1}{2}\cos(a+b) + \tfrac{1}{2}\cos\{C+(a-b)\} + \tfrac{1}{2}\cos\{C-(a-b)\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cos\{C+(a+b)\} - \tfrac{1}{2}\cos\{C-(a+b)\},$$

welche Formel bequem ist, wenn man keine trigonometrische Logarithmentafel, sondern die sogenannten natürlichen Linien oder Functionen gebraucht.

---

Sehr leicht elementar zu beweisender Satz von der Parabel.

Der Winkel, unter welchem sich zwei confocale Parabeln schneiden, ist halb so gross wie der Winkel, den ihre beiden Axen mit einander bilden. (Siebeck in Crelle's Journal. Band LV. S. 239.)

---

## Druckfehler.

Thl. VI. S. 127. Z. 11. (vom Anfange der Abhandlung Nr. XX. an) werde statt „T. II. Paris. 1825. p. 349." gesetzt: „T. I. Paris. 1825. p. 349."

---

**Fehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln.**

N°. 13. Taf. II. S. 442. Diff. zwischen log sin 39°48′30″ und 40″ statt 353 lies 253.

„ 14. „ „ „ „ „ „ log sin 39°48′40″ und 50″ statt 352 lies 252.

---

# XI.

## Elementare Ableitung der Haupteigenschaften der Kettenlinien.

Von

Herrn *Heinrich Gretschel*,

Lehrer der Mathematik an der Handelslehranstalt in Leipzig.

1. Es seien in Taf. V. Fig. 1. $A$, $B$, $C$, $D$, ...., $P$, .... Eckpunkte eines in vertikaler Ebene gelegenen Polygones, dessen zwei Endpunkte befestigt sind. In den Eckpunkten sind Gewichte aufgehängt, und zwar mögen die in $B$, $C$, $D$, ...., $P$, .... befestigten Gewichte $p_1$, $p_2$, $p_3$, ...., $p_n$, .... heissen. Durch diese Gewichte werden die an sich gewichtslosen Seiten des Polygons *gespannt*; $q_0$, $q_1$, $q_2$, .... mögen die Spannungen in den Seiten $AB$, $BC$, $CD$, .... sein. Sind endlich noch $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... die Winkel, welche die genannten Seiten mit der horizontalen Geraden $X'X$ einschliessen, so müssen für den Fall des Gleichgewichtes die folgenden Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{ll} q_1\cos\alpha_1 = q_0\cos\alpha_0, & q_1\sin\alpha_1 - q_0\sin\alpha_0 = p_1, \\ q_2\cos\alpha_2 = q_1\cos\alpha_1, & q_2\sin\alpha_2 - q_1\sin\alpha_1 = p_2, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ q_n\cos\alpha_n = q_{n-1}\cos\alpha_{n-1}, & q_n\sin\alpha_n - q_{n-1}\sin\alpha_{n-1} = p_n. \end{array}\right\} \quad (a)$$

Addirt man jedes der beiden Gleichungssysteme, so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$q_n\cos\alpha_n = q_0\cos\alpha_0, \quad q_n\sin\alpha_n - q_0\sin\alpha_0 = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

Wir lassen jetzt die Polygonseiten alle verschwindend klein werden, wodurch die Belastung eine stetige wird. $\alpha_n$, wofür wir $\tau$

schreiben wollen, ist dann der Winkel, welchen die geometrische Tangente an den Punkt $P$ der in Rede stehenden Curve, in welche das Polygon übergeht, mit $X'X$ einschliesst; $q_n$, wofür wir $q$ schreiben, ist die Spannung in $P$. Wir wollen ferner annehmen, der Winkel $\alpha_0$ sei Null, also $A$ der tiefste Punkt der Curve, und die Summe der Belastungen vom tiefsten Punkte $A$ bis $P$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$, soll mit $p$ bezeichnet werden. Die beiden obigen Gleichungen gehen unter diesen Voraussetzungen in die nachstehenden über:

$$q\cos\tau = q_0, \quad q\sin\tau = p. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Die erste dieser Gleichungen drückt aus, dass die horizontale Componente der Spannung überall gleich gross ist. Die zweite sagt uns, dass die vertikale Componente der Spannung in einem Punkte gleich ist der gesammten Belastung von diesem Punkte bis zum tiefsten Punkte oder Scheitel $A$.

2. Wir wollen jetzt annehmen, die Belastung sei gleichmässig über die ganze Linie vertheilt; ist $k$ die Belastung der Längeneinheit und $s$ der Bogen vom Scheitel $A$ (Taf. V. Fig. 2.) bis zum Punkte $P$, so geht die zweite der Gleichungen (1) in

$$q\sin\tau = ks$$

über. Dividirt man diese Gleichung mit der ersten der Gleichungen (1) und bezeichnet dabei $\frac{q_0}{k}$ mit $m$, so erhält man das Resultat:

$$\tan\tau = \frac{s}{m}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die geometrische Tangente im Punkte $P$ mit der Achse $X'X$ bildet, ist also proportional dem Bogen zwischen dem Scheitel und $P$.

Die durch diese Eigenschaft definirte Linie ist die gemeine Kettenlinie. Sie stellt die Form vor, welche ein an seinen Endpunkten befestigter, überall gleich schwerer, vollkommen biegsamer, aber nicht dehnbarer Faden annimmt.

Aus der Gleichung (2) folgt zunächst noch:

$$\sin\tau = \frac{s}{\sqrt{m^2 + s^2}}. \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Lassen wir nun in Taf. V. Fig. 2. $s = AP$ um das verschwindend kleine Stück $PP' = \sigma$ wachsen, so wächst die Ordinate $y = MP$ um das Stück $M''P' = \eta$, die Abscisse um $MM' = \xi$, und es ist:

$$\frac{\eta}{\sigma} = \sin\tau = \frac{s}{\sqrt{s^2+m^2}}.$$

Construiren wir jetzt (Taf. V. Fig. 3.) ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $OA = m$ und $OS = s$, so wird die Hypotenuse $AS = \sqrt{m^2+s^2}$. Lassen wir $OS = s$ um das Stück $SS' = \sigma$ wachsen, so wächst die Hypotenuse um das Stück $S'S'' = \varepsilon$, wenn $AS'' = AS$ gemacht ist. Es ist nun aus der Figur einleuchtend, dass der Grenzwerth des Bruches

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \sin OAS = \frac{s}{\sqrt{s^2+m^2}},$$

also gleich $\frac{\eta}{\sigma}$ ist. Daraus folgt aber $\varepsilon = \eta$, d. h. für einen und denselben verschwindend kleinen Zuwachs $\sigma$ von $s$ wächst $y$ in Taf. V. Fig. 2. um dasselbe Stück wie $AS = \sqrt{m^2+s^2}$ in Taf. V. Fig. 3. Legen wir nun in Taf. V. Fig. 2. die Abscissenachse $X'X$ so, dass die Ordinate des Scheitels $A$ $OA = m$ ist, so ist für $s = 0$ gleichzeitig $y = m$ und $AS = m$, und da beide Grössen nach dem Vorhergehenden gleich schnell wachsen, so ist allgemein:

$$y = \sqrt{m^2+s^2}, \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

wofür man mit Berücksichtigung der Gleichung (2) auch setzen kann:

$$y = m\sec\tau. \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Die Gleichung (2) selbst geht unter Benutzung des aus (4) sich ergebenden Werthes

$$s = \sqrt{y^2-m^2}$$

über in

$$\tan\tau = \frac{\sqrt{y^2-m^2}}{m}. \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung findet man die Tangente, wenn man um den Fusspunkt $M$ der Ordinate $MP$ (Taf. V. Fig. 4.) mit dem Halbmesser $m$ einen Kreis schlägt und an diesen von $P$ aus die Tangente $PT$ legt, welche zugleich die Kettenlinie in $P$ berührt.

Das Stück $PT$ dieser Tangente ist stets gleich dem Bogen $AP = s$.

Ist $N$ der Punkt, in welchem die Normale des Punktes $P$ die Abscissenachse trifft, so ist $PN = y\sec\tau$, d. h. unter Berücksichtigung von (5):

$$PN = \frac{y^2}{m}. \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

3. Sehr leicht lässt sich auch der Werth $\varrho$ des **Krümmungshalbmessers** im Punkte $P$ ermitteln. Sind nämlich, wie in Taf. V. Fig. 2., $P$ und $P'$ zwei um das verschwindend kleine Bogenstück $\sigma$ entfernte Curvenpunkte und ist $\omega$ der Winkel, welchen ihre Normalen einschliessen, so ist:

$$\varrho \tan \omega = \sigma.$$

Nun ist aber $\omega = \tau' - \tau$, wo $\tau'$ und $\tau$ die Winkel bedeuten, welche die Tangenten in $P$ und $P'$ mit $X'X$ bilden. Zufolge (2) aber ist:

$$\tan \tau = \frac{s}{m}, \quad \text{also} \quad \tan \tau' = \frac{s+\sigma}{m},$$

mithin:

$$\tan \omega = \tan(\tau' - \tau) = \frac{\tan \tau' - \tan \tau}{1 + \tan \tau' . \tan \tau} = \frac{m\sigma}{m^2 + (s+\sigma)s}.$$

Hiernach wird:

$$\varrho = \frac{\sigma}{\tan \omega} = \frac{m^2 + (s+\sigma)s}{m},$$

d. h. wenn man zur Grenze $\sigma = 0$ übergeht:

$$\varrho = \frac{m^2 + s^2}{m} = \frac{y^2}{m}. \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

(vergl. Gleichung (4))

Es ist also der Krümmungshalbmesser gleich der Normale $PN$.

4. Um die **Fläche** zwischen der Kettenlinie, der Abscissen- und Ordinatenachse und einer beliebigen Ordinate zu finden, denken wir uns dieselbe in lauter solche Streifen wie $MPP'M'$ in Taf. V. Fig. 2. zertheilt. Statt eines solchen Streifens nehmen wir aber das Rechteck $MPM''M' = y\xi$; da $\xi = \sigma \cos \tau$ ist, so ist dieses Flächenelement $= y\sigma \cos \tau$. Setzt man in diesen Ausdruck den Werth $y = m \sec \tau$ (Gl. (5)), so geht derselbe über in $m\sigma$. Die Summe aller Flächenstreifen ist daher gleich $m$mal der Summe aller $\sigma$, d. h. gleich $ms$. Da die Summe der hierbei vernachlässigten Dreiecke $PM''P'$ sich unbegrenzt der Null nähert, wenn man die Anzahl der Streifen unendlich gross werden lässt, so ist demnach:

$$\text{Fläche } OAPM = ms = OA.\text{Bogen } AP. \quad \ldots (9)$$

5. Vergrössern wir jede Ordinate $y$ der Kettenlinie um den Bogen $s$, so erhalten wir eine Curve, welche durch die Gleichung

$$z = y + s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

charakterisirt ist, wo $z$ die neue Ordinate bedeutet. Lässt man jetzt $x$ um das verschwindend kleine Stück $\xi$ wachsen, so wächst $y$ um $\eta$ und $s$ um $\sigma$, und wenn man den Zuwachs von $z$ mit $\zeta$ bezeichnet, so ist:

$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{\eta}{\xi} + \frac{\sigma}{\xi},$$

wofür man, wegen $\frac{\eta}{\xi} = \tan\tau$, $\frac{\sigma}{\xi} = \sec\tau$ setzen kann:

$$\frac{\zeta}{\xi} = \tan\tau + \sec\tau,$$

oder mit Benutzung von (2) und (5):

$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{s}{m} + \frac{y}{m} = \frac{z}{m}.$$

Nennt man den Winkel, welchen die trigonometrische Tangente des zur Abscisse $x$ gehörigen Curvenpunktes mit der Abscissenachse einschliesst, $v$, so ist:

$$\frac{\zeta}{\xi} = \tan v,$$

und sonach:

$$\tan v = \frac{z}{m}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Weil die Subtangente den Werth $z\cot v$ hat, so ist für unsere Curve

$$\text{Subtangente} = m. \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Aus dieser Eigenschaft, dass die Subtangente constant ist, lässt sich leicht eine Beziehung zwischen $x$ und $z$, also die Gleichung der Curve ableiten. Aus

$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{z}{m}$$

folgt nämlich:

$$\zeta = z\frac{\xi}{m},$$

und nennt man $z + \zeta$ kurz $z'$, so ist:

$$z' = z\left(1 + \frac{\xi}{m}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Theilen wir jetzt eine beliebige Abscisse $x$ in $n$ gleich grosse Theile $\xi$, wobei wir uns $n$ über alle Grenzen gross denken wollen, nennen die zu $0, \xi, 2\xi, \ldots, n\xi$ gehörigen Ordinaten $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$, so ist nach (13):

$$z_1 = z_0(1 + \frac{\xi}{m}),$$

$$z_2 = z_1(1 + \frac{\xi}{m}) = z_0(1 + \frac{\xi}{m})^2,$$

u. s. w.

$$z_n = z_0(1 + \frac{\xi}{m})^n.$$

Nun ist $z_n = z$, $z_0 = m$, $\xi = \frac{x}{n}$; wir können sonach setzen:

$$z = m(1 + \frac{\frac{x}{m}}{n})^n, \quad n = \infty. \ldots\ldots\ldots (14)$$

Für $x = m$ ergiebt sich $z_m = m(1 + \frac{1}{n})^n$, $n = \infty$. Bezeichnet man den Grenzwerth von $(1 + \frac{1}{n})^n$ kurz mit $e$, so wird $z_m = me$, und die Grösse $e$ hat eine einfache geometrische Bedeutung. Da nämlich für $x = m$ Abscisse und Subtangente gleich gross sind, so ist:

$$\tan v_m = e,$$

also $e$ die trigonometrische Tangente des Winkels $v_m$, welchen die vom Coordinaten-Anfange an die Curve gelegte Tangente mit der Abscissenachse einschliesst. In Taf. V. Fig. 5., wo die ausgezogene Linie unsere Curve, die gestrichelte aber die Kettenlinie repräsentirt, ist $OM = m$, daher $MP = me$ und $\tan v_m = e$. Der Werth von $e$, aus der Formel $(1 + \frac{1}{n})^n$ entwickelt, ist bekanntlich 2,7182818...., und daher $v_m = 69^0\,48'\,8'',89$. Da man ferner

$$(1 + \frac{\frac{x}{m}}{n})^n = [(1 + \frac{\frac{1}{mn}}{\frac{x}{mn}})^{\frac{mn}{x}}]^{\frac{x}{m}}$$

setzen kann, und da $\frac{mn}{x}$ gleichfalls eine unendliche Grösse ist, so ist dieser ganze Ausdruck gleich $e^{\frac{x}{m}}$, und die Formel (14) geht daher in

$$z = me^{\frac{x}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

über. Die durch diese Gleichung bestimmte Curve ist die logarithmische Linie. Der den negativen Abscissen entsprechende Theil dieser Curve wird erhalten, wenn man den vom Scheitel $A$ der Kettenlinie aus gerechneten Bogen der letzteren von der Ordinate derselben subtrahirt, mit anderen Worten, wenn man für ein negatives $x$ auch $s$ negativ rechnet. Daher ist:

$$y - s = me^{-\frac{x}{m}}.$$

Addirt man die beiden Gleichungen

$$y + s = me^{\frac{x}{m}} \text{ und } y - s = me^{-\frac{x}{m}},$$

so erhält man die Gleichung der Kettenlinie:

$$y = \frac{m}{2}(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}). \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

6. Es wurde oben in Bezug auf Taf. V. Fig. 4. bemerkt, dass das Stück $PT$ der Tangente an die Kettenlinie so gross ist wie der Bogen $AP$. Daraus folgt, dass $T$ die Evolvente der Kettenlinie beschreibt, wenn $P$ sich auf letzterer bewegt. $TP$ ist hiernach die Normale der Evolvente, $P$ der Krümmungsmittelpunkt, $TM$ die Tangente. Da letztere der Construction in Taf. V. Fig. 4. zufolge immer den Werth $m$ hat, so ist die Evolvente eine Tractorie; ihre Gestalt giebt die ausgezogene Linie in Taf. V. Fig. 6. an.

Man kann leicht eine Beziehung zwischen der Ordinate $y$ von $P$ (Taf. V. Fig. 4.) und der Ordinate $TQ = z$ des entsprechenden Punktes der Tractorie finden. Ist nämlich $TN$ parallel zur Achse der $x$, so ist:

$$MN \,.\, MP = MT,$$

d. h.

$$zy = m^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Ebenso lässt sich leicht die Tangente des Winkels $TMQ = v$ finden, den die geometrische Tangente der Tractorie mit der Achse der $x$ einschliesst. Es ist nämlich (Taf. V. Fig. 4.):

$$\tan v = \frac{TQ}{MQ} = \frac{z}{\sqrt{m^2 - z^2}}. \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Lässt man nun $OQ = x$ um ein verschwindend kleines Stück $QR = \xi$ wachsen, so nimmt $z$ um das verschwindend kleine Stück $\zeta$ ab, und es ist:

$$\frac{\xi}{\zeta} = \tan v = \frac{z}{\sqrt{m^2 - z^2}},$$

woraus folgt:

$$\xi z = \zeta \sqrt{m^2 - z^2}.$$

Diese Gleichung hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Schlägt man nämlich in Taf. V. Fig. 6. um $O$ einen Kreis mit dem Halbmesser $OA = m$, legt durch $T$ und den Nachbarpunkt $S$ einestheils die Ordinaten $TQ$ und $SR$, anderntheils die zur $x$-Achse parallelen Geraden $TF$ und $SG$, welche den Kreis in $H$ und $K$ schneiden, so ist $QR = \xi$, $QT = z$, mithin annähernd $\xi z = QTSR$; ferner ist $GF = \zeta$, $FH = \sqrt{m^2 - z^2}$, mithin näherungsweise $\zeta \sqrt{m^2 - z^2} = FHKG$. Es gilt also die Gleichung

$$QTSR = FHKG \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

mit um so grösserer Genauigkeit, je kleiner $QR = \xi$ genommen wird. Denkt man sich die ganze Fläche $OATQ$ in solche schmale Streifen zerlegt wie $QTSR$ und construirt zu jedem solchen Streifen den entsprechenden Streifen der Kreisfläche, so ergiebt sich durch Addition:

$$\text{Fläche } OATQ = \text{Fläche } AHF,$$

und mithin ist die asymptotische Fläche zwischen der Tractorie, der Linie $OA$ und der positiven $x$-Achse so gross als der Viertelkreis $OAL$.

7. Wir verlassen jetzt die Voraussetzung der vorigen Nummern, dass die Last gleichmässig über die ganze Linie verbreitet sei, und setzen dafür voraus, dass die Belastung über die Horizontalprojection der Linie gleichmässig verbreitet sei; wir setzen also in der zweiten Gleichung (1) $p = kx$, so dass die Gleichungen (1) in die folgenden übergehen:

$$q \cos \tau = q_0, \quad q \sin \tau = kx,$$

aus denen

$$\tan \tau = \frac{x}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

folgt, wenn man $\frac{q_0}{k} = m$ setzt. Lässt man $x$ um die verschwindend kleine Grösse $\xi$ wachsen, so wachse die zugehörige Ordinate $y$ um das Stück $\eta$; dann ist:

$$\tan \tau = \frac{\eta}{\xi}, \quad \text{mithin} \quad \eta = \frac{x}{m} \xi.$$

Wir theilen jetzt die Abscisse $x$ in $n$ gleich grosse Theile $\xi$, bezeichnen mit $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$, ...., $\eta_n$ die zu $x_1=\xi$, $x_2=2\xi$, $x_3=3\xi$, ...., $x_n=n\xi=x$ gehörigen Werthe von $\eta$. Dann bestehen der vorigen Gleichung $\eta=\frac{x}{m}\xi$ zufolge die Gleichungen

$$\eta_1=\frac{\xi}{m}\cdot\xi,\quad \eta_2=\frac{2\xi}{m}\cdot\xi,\quad \eta_3=\frac{3\xi}{m}\cdot\xi,\ldots,\quad \eta_n=\frac{n\xi}{m}\cdot\xi.$$

Setzt man ferner voraus, dass für $x=0$ auch $y=0$ ist, so ist:

$$y=\eta_1+\eta_2+\eta_3+\ldots+\eta_n,$$

d. h.

$$y=\frac{\xi^2}{m}(1+2+3+\ldots+n)=\frac{\xi^2 n(n+1)}{2m},$$

oder, wenn man $n\xi=x$ setzt:

$$y=\frac{x^2}{2m}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

welche Formel für $n=\infty$ in

$$y=\frac{x^2}{2m}$$

übergeht. Man sieht hieraus, dass die Linie für diesen Fall eine Parabel mit vertikaler Achse ist. Daraus folgt, dass, wenn die Fahrbahn einer Kettenbrücke im Vergleich zur Last der Kette sehr gross ist, diese letztere annäherungsweise als eine parabolische betrachtet werden darf.

8. Zum Schlusse betrachten wir den für die Praxis wichtigsten Fall, dass die Fahrbahn gleichmässig schwer oder die angehängte Last der Horizontal-Projection der Kette proportional, und dass ferner der Querschnitt der Spannung proportional ist. Man nennt bekanntlich die so entstehende Linie die Kettenbrückenlinie von gleicher Spannung, weil die auf die Einheit des Querschnittes wirkende Spannung bei ihr überall gleich ist.

Wir denken uns die ganze Linie in kleine Elemente $\sigma$ zerlegt, deren horizontale und vertikale Projectionen wir wie früher mit $\xi$ und $\eta$ bezeichnen. Nennen wir P das an der horizontalen Länge 1 befestigte Gewicht der Fahrbahn, so ist $P\xi$ das am Elemente $\sigma$ befestigte Gewicht. Ist ferner $k$ der Querschnitt, welcher der Spannung 1 entspricht, und $q_n$ die Spannung in dem von uns betrachteten Elemente, so ist dessen Querschnitt $kq_n$, und wenn

noch $\theta$ das Gewicht der Volumeneinheit der Kette bedeutet, so ist das Gewicht des Elementes $\theta k q_n \sigma$. Sonach wirkt auf das Element in vertikaler Richtung die Last

$$P\xi + \theta k q_n \sigma.$$

In Uebereinstimmung mit der in den Gleichungen (a) am Eingange der Nummer 1. angewandten Bezeichnung nennen wir den Winkel zwischen unserem Elemente $\sigma$ und der Horizontalen $\alpha_n$ und haben dann:

$$\sigma = \xi \sec \alpha_n,$$

weshalb der Ausdruck für die auf das Element wirkende Last auch in der Form

$$(P + \theta k q_n \sec \alpha_n)\xi$$

geschrieben werden kann. Diese Last wollen wir uns im Anfangspunkte des Elementes wirksam denken und ihn in die letzte der Gleichungen (a) statt $p_n$ einsetzen; dieselbe geht dadurch über in:

$$q_n \sin \alpha_n - q_{n-1} \sin \alpha_{n-1} = (P + \theta k q_n \sec \alpha_n)\xi.$$

Aus der ersten der Gleichungen (1) folgt aber:

$$q_n = q_0 \sec \alpha_n, \quad q_{n-1} = q_0 \sec \alpha_{n-1};$$

man erhält daher die Gleichung:

$$q_0(\tan \alpha_n - \tan \alpha_{n-1}) = (P + \theta k q_0 + \theta k q_0 \tan^2 \alpha_n)\xi,$$

statt deren wir schreiben:

$$\xi = \frac{\mu\varepsilon(\tan \alpha_n - \tan \alpha_{n-1})}{1 + \varepsilon^2 \tan^2 \alpha}, \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

wo abkürzungsweise

$$\frac{q_0}{\sqrt{\theta k q_0 (P + \theta k q_0)}} = \mu, \quad \sqrt{\frac{\theta k q_0}{P + \theta k q_0}} = \varepsilon \quad \ldots (22)$$

gesetzt ist.

Es sei nun in Taf. V. Fig. 7. um $O$ ein Kreis mit dem Halbmesser $OA = \mu$ geschlagen und in $A$ eine Tangente an denselben gelegt. Auf dieser denke man sich von $A$ aus die Grössen $\mu\varepsilon \tan \alpha$ abgetragen, welche den einzelnen Bogenelementen unserer Curve entsprechen, vom tiefsten Punkte der Curve angefangen, für welchen $\alpha_0 = 0$ ist. Es sei insbesondere:

(23)

$AD = \mu\varepsilon \tan \alpha_{n-1}$, $AE = \mu\varepsilon \tan \alpha_n$, also $DE = \mu\varepsilon(\tan \alpha_n - \tan \alpha_{n-1})$.

Verbinden wir $D$ und $E$ mit $O$, so ist:

$$\tan EOA = \varepsilon \tan \alpha_n \quad \text{oder} \quad \tan \frac{AE}{\mu} = \varepsilon \tan \alpha_n. \quad \ldots (24)$$

Ziehen wir jetzt $EF$ senkrecht zu $OE$, so ist, insofern man die kleine Linie $BC$ als eine zu $OC$ senkrechte Gerade betrachten kann,

$$BC = \frac{EF.OC}{OE},$$

oder, wenn man statt $\frac{OC}{OE}$ seinen Werth $\cos EOA$ und statt $EF$ den Werth $DE.\cos DEF = DE.\cos EOA$ einsetzt,

$$BC = DE.\cos^2 EOA = \frac{DE}{1+\varepsilon^2 \tan^2 \alpha_n}.$$

Schreiben wir jetzt noch statt $DE$ den in (23) angegebenen Werth, so erhalten wir:

$$BC = \frac{\mu\varepsilon(\tan \alpha_n - \tan \alpha_{n-1})}{1+\varepsilon^2 \tan^2 \alpha_n} = \xi.$$

Da nun $AC$ die Summe aller $\xi$ ist, so ist $AC = x$, und statt der zweiten Gleichung (24) können wir nun schreiben, wenn wir noch $\tau$ statt $\alpha_n$ setzen,

$$\tan \frac{x}{\mu} = \varepsilon \tan \tau. \quad \ldots (25)$$

In dieser Gleichung setzen wir wie früher:

$$\tan \tau = \frac{\eta}{\xi},$$

und erhalten nun:

$$\varepsilon \frac{\eta}{\xi} = \tan \frac{x}{\mu}. \quad \ldots (26)$$

Zieht man nun in Taf. V. Fig. 7., wo $OA = \mu$, $AB = x$, $BC = \xi$ ist, $GD$ senkrecht auf $OD$, so ist:

$$\tan \frac{x}{\mu} = \tan DOA = \tan GDE = \frac{GE}{GD},$$

$$GE = \mu\left(\sec \frac{x+\xi}{\mu} - \sec \frac{x}{\mu}\right), \quad GD = \xi \sec \frac{x}{\mu},$$

mithin:

$$\tan \frac{x}{\mu} = \mu \frac{\sec \frac{x+\xi}{\mu} - \sec \frac{x}{\mu}}{\xi \sec \frac{x}{\mu}}.$$

Statt der Gleichung (26) schreiben wir daher die folgende:

$$\varepsilon\eta = \mu \frac{\sec\frac{x+\xi}{\mu} - \sec\frac{x}{\mu}}{\sec\frac{x}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

Wir wollen jetzt

$$\sec\frac{x}{\mu} = s, \quad \sec\frac{x+\xi}{\mu} - \sec\frac{x}{\mu} = \sigma \quad \ldots\ldots (28)$$

setzen, wo $\sigma$ einen verschwindend kleinen Zuwachs von $s$ bezeichnet, der dem Zuwachse $\xi$ von $x$ entspricht. Die Gleichung (27) geht durch diese Substitution in

$$\frac{\varepsilon}{\mu}\eta = \frac{\sigma}{s}$$

über. Denken wir uns nun $\eta$ als Abscisse und $s$ als Ordinate eines Punktes $P$ einer Curve, so ist:

$$\frac{\sigma}{\eta} = \tan\tau,$$

wo $\tau$ den Winkel bedeutet, den die geometrische Tangente an den Punkt $P$ mit der Abscissenachse bildet, und die auf der Abscissenachse gerechnete Subtangente ist:

$$s\cot\tau = s\frac{\eta}{\sigma} = \frac{\mu}{\varepsilon},$$

also constant. Wir haben aber in Nummer 5. gefunden, dass eine Curve mit constanter Subtangente eine logarithmische Linie ist, und nach den dortigen Untersuchungen müsste

$$s = \frac{\mu}{\varepsilon} e^{\frac{\varepsilon}{\mu}y}$$

die Gleichung derselben sein. Setzen wir in diese Gleichung statt $s$ seinen Werth $\sec\frac{x}{\mu}$, so geht sie über in:

$$\sec\frac{x}{\mu} = \frac{\mu}{\varepsilon} e^{\frac{\varepsilon}{\mu}y},$$

oder, wenn man die in Bezug auf die Basis $e$ genommenen Logarithmen mit $l$ bezeichnet:

$$y = \frac{\mu}{\varepsilon} l\frac{\varepsilon}{\mu}\sec\frac{x}{\mu}.$$

Für $x=0$ wird bei der jetzigen Annahme der Coordinatenachsen $y=\frac{\mu}{\varepsilon}l\frac{\varepsilon}{\mu}$, und dieses ist der kleinste Werth von $y$. Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem tiefsten Punkte, so muss $y$ um die angegebene Grösse vermindert werden, und man hat dann:

$$y=\frac{\mu}{\varepsilon}l\frac{\varepsilon}{\mu}\sec\frac{x}{\mu}-\frac{\mu}{\varepsilon}l\frac{\varepsilon}{\mu}$$

oder

$$y=\frac{\mu}{\varepsilon}l\sec\frac{x}{\mu},$$

d. i., wenn man statt $\mu$ und $\varepsilon$ ihre Werthe aus (22) einsetzt:

$$y=\frac{1}{\theta k}l\sec\left(\frac{x}{q_0}\cdot\sqrt{\theta k q_0(\mathrm{P}+\theta k q_0)}\right), \quad \ldots \quad (29)$$

welches die übliche Form der Kettenbrückenlinie ist.

Die Grössen $\theta$ und P sind in der Praxis unmittelbar gegeben, desgleichen die Grösse $k$, welche von der Festigkeit des Materials bestimmt wird, da $k$ gleich dem Querschnitt für die Spannung 1 ist. Ist nun $2a$ die Entfernung der beiden Endpunkte der Kette, $b$ ihre Höhe, so findet man $q_0$ aus der Gleichung

$$b=\frac{1}{\theta k}l\sec\left(\frac{a}{q_0}\sqrt{\theta k q_0(\mathrm{P}+\theta k q_0)}\right),$$

wodurch alle in (29) vorkommenden Constanten gegeben sind. Um nun den Querschnitt $Q$ für jede Abscisse $x$ zu finden, hat man die Gleichungen

$$Q=kq, \quad q=q_0\sec\tau, \quad \tan\tau=\frac{1}{\varepsilon}\tan\frac{x}{\mu},$$

wo $q$ die Spannung bedeutet. Hieraus folgt:

$$Q=kq_0\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon^2}\tan^2\frac{x}{\mu}}.$$

# XII.

## Die harmonischen Reihen.

Von

Herrn Dr. *Josef Knar*,

Professor der Mathematik zu Graz.

(Fortsetzung und Schluss von Thl. XLI. Hft. 3. Nr. XXVIII.)

---

### §. 83.

In dem bisherigen Theile dieses Aufsatzes sind die Eigenschaften der harmonischen Reihen erster Ordnung und der ihnen zugehörigen Konstanten, so wie die hierauf sich gründenden Summirungen anderer unendlicher Reihen, mit solcher Ausführlichkeit und so vollständig vorgetragen worden, als es thunlich erschien, um nicht in allzu grosse Weitläufigkeit zu verfallen, und insbesondere möglich war, ohne dabei die Kenntniss der harmonischen Reihen höherer Ordnungen theilweise schon vorauszusetzen. In dieser letzten Beziehung wird die noch erforderliche Ergänzung am gehörigen Orte nachgetragen werden. Nunmehr muss zur genaueren Betrachtung der harmonischen Reihen höherer Ordnungen übergegangen werden, um ihre besonderen Eigenschaften und die hievon abhängenden Reihensummirungen kennen zu lernen, da in den §§. 4.—9. nur die, allen Ordnungen der harmonischen Reihen gemeinschaftlich zukommenden, einfachsten Gesetze nachgewiesen worden sind, welche natürlich allen weiteren Untersuchungen hierüber zur Grundlage dienen müssen.

Hiebei wird man bestätiget finden, was bereits früherhin angedeutet wurde, dass zwischen den Eigenschaften der harmonischen Reihen der ersten und jenen der höheren Ordnungen, wenn gleich nur selten eine vollkommene Uebereinstimmung, doch durchgängig eine unverkennbare Analogie vorhanden sei, welche sich gleichsam von selbst als Leitfaden darbietet, um

darnach die letzteren in der nämlichen Ordnung abzuhandeln, wie diess bei den ersteren bereits geschehen ist. Hingegen in Bezug auf die Art der Behandlung des Gegenstandes wird von nun an ein auffallender Unterschied eintreten. Es soll nämlich künftighin der Gebrauch der Differenzialrechnung nicht mehr mit gleicher Beflissenheit vermieden werden, wie diess bisher der Fall war; vielmehr wird dieselbe fast in allen Fällen als das leichteste und kürzeste Hilfsmittel angewendet werden, um die in der Folge noch aufzustellenden Gesetze aus den im Vorhergehenden bereits gefundenen abzuleiten, was um so unbedenklicher geschehen kann, da es bei den harmonischen Reihen höherer Ordnungen, wie man sogleich sehen wird, kaum ausführbar sein dürfte, die genannte Rechnung ganz zu entbehren, wenigstens sicherlich nicht, ohne dadurch in ungemein grosse Weitläufigkeit zu gerathen.

## §. 84.

Die harmonischen Reihen höherer Ordnungen stehen sowohl unter einander, als auch mit jenen der ersten Ordnung in sehr einfachen, nur durch die Differenzialrechnung darstellbaren, Verbindungen. Denn durch das Differenziren der Gleichung

$$\overset{n}{S}_{(a|d)^r} = \frac{1}{a^r} + \frac{1}{(a+d)^r} + \frac{1}{(a+2d)^r} + \ldots + \frac{1}{(a+(n-1)d)^r},$$

wenn dabei nicht $n$, sondern $a$ als veränderlich betrachtet wird, erhält man:

$$\frac{\partial \overset{n}{S}_{(a|d)^r}}{\partial a} = -\frac{r}{a^{r+1}} - \frac{r}{(a+d)^{r+1}} - \frac{r}{(a+2d)^{r+1}} - \ldots - \frac{r}{(a+(n-1)d)^{r+1}},$$

oder

$$\text{I.} \quad \frac{\partial \overset{n}{S}_{(a|d)^r}}{\partial a} = -r \cdot \overset{n}{S}_{(a|d)^{r+1}},$$

woraus umgekehrt, wenn darin zugleich $r-1$ anstatt $r$ gesetzt wird,

$$\text{II.} \quad \overset{n}{S}_{(a|d)^r} = -\frac{1}{r-1} \cdot \frac{\partial \overset{n}{S}_{(a|d)^{r-1}}}{\partial a}$$

folgt. Nimmt man ferner in dieser letzten Gleichung anstatt $r$ nach und nach

$$r-1,\quad r-2,\quad r-3,\ldots,\quad r-r_1+1$$

an, und substituirt die hiedurch sich ergebenden Resultate stets in den nächst vorhergehenden, so wird man im allgemeinen

$$\text{III.}\quad \overset{n}{S}_{(a|d)^r} = \frac{(-1)^{r_1}}{(r-1)(r-2)\ldots(r-r_1)} \cdot \frac{\partial^{r_1} \overset{n}{S}_{(a|d)^{r-r_1}}}{\partial a^{r_1}}$$

und insbesondere, wenn $r_1 = r-1$ gesetzt wird,

$$\text{IV.}\quad \overset{n}{S}_{(a|d)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{\partial^{r-1} \overset{n}{S}_{a|d}}{\partial a^{r-1}}$$

finden.

Diese Gleichungen, in welchen, wie man sieht, nicht nur $r$ vermöge der bereits in §. 2. aufgestellten Voraussetzung, sondern auch $r_1$ als Wiederholungszeiger der Differenzirungen nothwendig eine additive ganze Zahl bedeuten muss, gelten für jeden beliebigen noch so grossen Werth von $n$, nur muss derselbe ebenfalls eine additive ganze Zahl sein. Stellt man sich nun $n$ unendlich wachsend vor und geht bei dieser Voraussetzung auf die Gränzen über, so ergeben sich folgende für die unendlichen harmonischen Reihen höherer Ordnungen geltende Gleichungen:

$$\text{V.}\quad S_{(a|d)^r} = -\frac{1}{r-1} \cdot \frac{\partial S_{(a|d)^{r-1}}}{\partial a},$$

$$\text{VI.}\quad S_{(a|d)^r} = \frac{(-1)^{r_1}}{(r-1)(r-2)\ldots(r-r_1)} \cdot \frac{\partial^{r_1} S_{(a|d)^{r-r_1}}}{\partial a^{r_1}},$$

$$\text{VII.}\quad S_{(a|d)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{\partial^{r-1} S_{a|d}}{\partial a^{r-1}}.$$

Mit Hilfe der hier gefundenen Gleichungen könnte unmittelbar jede harmonische, endliche oder unendliche, Reihe höherer Ordnung aus einer der nächst niedrigeren, oder einer beliebig niedrigeren bis herab zur ersten Ordnung durch Differenziren abgeleitet werden, wenn man im Stande wäre, eine der letztbezeichneten Reihen durch einen allgemeinen analytischen Ausdruck als Funktion von $a$ darzustellen. Leider ist diess ent-

weder nicht möglich, oder doch bis jetzt noch Niemandem gelungen.

Die nämlichen Gleichungen liessen sich durch Umkehrung ihrer Auflösung auch gebrauchen, um jede harmonische Reihe aus einer anderen von höherer Ordnung mittelst Integration herzuleiten. Da aber hievon wohl noch weniger eine nutzbare Anwendung zu machen sein dürfte, würde es auch ganz überflüssig sein, die diesfälligen Formeln ausdrücklich herzusetzen.

Noch darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass insbesondere der Gleichung VII. nur eine formale Bedeutung in dem bereits in §. 9. erklärten Sinne zukomme, weil $\underset{a|d}{S}$ eine divergente Reihe darstellt, und als solche eigentlich keine Summe besitzt.

## §. 85.

Die harmonischen Reihen höherer Ordnungen stehen auch mit den harmonischen Konstanten und in Folge dessen mit den Funktionen $\Pi z$ und $\Gamma z$ in einem besonderen, durch die Differenzialrechnung erkennbaren Zusammenhange. Differenzirt man nämlich die Gleichung I. des §. 15. in Bezug auf die Veränderliche $a$, so erhält man vermöge I. in §. 84.:

$$\frac{\partial \underset{a|d}{C}}{\partial a} = \lim \frac{\partial \overset{n}{\underset{a|d}{S}}}{\partial a} = -\lim \overset{n}{\underset{(a|d)^2}{S}} = -\underset{(a|d)^2}{S},$$

woraus durch wiederholte Differenzirung

$$\text{I.} \quad \frac{\partial^r \underset{|d}{C}}{\partial a^r} = (-1)^r . r! . \underset{(a|d)^{r+1}}{S}$$

und durch Umkehrung der Auflösung, wenn zugleich $r-1$ anstatt $r$ gesetzt wird,

$$\text{II.} \quad \underset{(a|d)^r}{S} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{\partial^{r-1} \underset{a|d}{C}}{\partial a^{r-1}}$$

sich ergibt.

Substituirt man in dieser letzten Gleichung anstatt $\underset{a|d}{C}$ noch die Werthe aus I. und III. des §. 27., so findet man ferner:

$$\text{III.} \quad \underset{(a|d)^r}{S} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \cdot \frac{\partial^r l\Pi \frac{a-d}{d}}{\partial a^r}$$

und auch

$$\text{IV.}\quad \underset{(a|d)^r}{S} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\cdot\frac{\partial^r l\Gamma\frac{a}{d}}{\partial a^r},$$

durch welche letzteren Gleichungen unmittelbar der Werth von $\underset{(a|d)^r}{S}$ aus den Funktionen $\Pi\frac{a-d}{d}$ oder $\Gamma\frac{a}{d}$, und auch umgekehrt, hergeleitet werden könnte.

Man wird sich leicht überzeugen, dass die vorstehenden Gleichungen auch auf III. des §. 25. durch Differenziren für $a$ zum Vorschein kommen.

## §. 86.

Vermittelst der Gleichungen des §. 85. vermag man zwar eben so wenig, als durch jene des §. 84., die Summe $\underset{(a|d)^r}{S}$ für bestimmte Werthe von $a$ und $d$ mit Hilfe der gewöhnlichen, bereits seit längerer Zeit in die Analysis eingeführten Funktionsformen durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen; jene gewähren aber dadurch einen sehr erheblichen Nutzen, weil man vermöge derselben sich in den Stand gesetzt findet, aus einer jeden zwischen den harmonischen Konstanten bestehenden Gleichung durch ein- oder mehrmaliges Differenziren derselben eine andere zwischen harmonischen Reihen höherer Ordnungen abzuleiten und auf solche Art die Eigenschaften der ersteren auf die letzteren zu übertragen. Durch dieses Verfahren wird das Auffinden der Eigenschaften der harmonischen Reihen höherer Ordnungen ganz ungemein erleichtert und die gesammte Lehre von denselben fast nur in eine Reihe von Schlussfolgerungen verwandelt, die mit Hilfe der Differenzialrechnung aus den bereits bekannten Eigenschaften der harmonischen Konstanten sich ziehen lassen.

Begreiflicher Weise können die auf dem eben bezeichneten Wege sich ergebenden Eigenschaften der harmonischen Reihen höherer Ordnungen nicht sämmtlich von gleicher Wichtigkeit sein. So z. B. erhält man aus den Gleichungen der §§. 18—22. durch das Differenziren derselben für $a$ nur wieder die bereits in §. 9. aufgestellten Formeln, welche nicht wiederholt zu werden brauchen, und auch aus den Formeln des §. 23. findet man nur Summirungen, welche genauer betrachtet als identische Gleichungen erkannt

werden, die kaum einer näheren Erörterung werth sein dürften, weshalb sie hier mit Stillschweigen übergangen werden sollen.

## §. 87.

Die Gleichung I. des §. 26., die bei Berechnung der harmonischen Konstanten so häufig angewendet wurde, gibt, wenn sie nach §. 86. behandelt wird, auch für die harmonischen Reihen höherer Ordnungen ein Resultat von bedeutender Wichtigkeit. Wird die bemerkte Gleichung $(r-1)$mal für die Veränderliche $a$ differenzirt, so erhält man

$$\frac{\partial^{r-1} \underset{a|d}{C}}{\partial a^{r-1}} - \frac{\partial^{r-1} \underset{d-a|d}{C}}{\partial a^{r-1}} = \frac{\pi}{d} \cdot \frac{\partial^{r-1} \operatorname{cotang} \frac{a\pi}{d}}{\partial a^{r-1}}.$$

Nun ist vermöge I. in §. 85.:

$$\frac{\partial^{r-1} \underset{a|d}{C}}{\partial a^{r-1}} = (-1)^{r-1} \cdot (r-1)! \cdot \underset{(a|d)^r}{S}$$

und

$$\frac{\partial^{r-1} \underset{d-a|d}{C}}{\partial a^{r-1}} = (-1)^{r-1} \cdot \frac{\partial^{r-1} \underset{d-a|d}{C}}{(\partial(d-a))^{r-1}} = (r-1)! \underset{(d-a|d)^r}{S}.$$

Werden daher diese Werthe substituirt und zugleich das Ganze durch $(-1)^{r-1} \cdot (r-1)!$ dividirt, so findet man die für alle harmonischen Reihen höherer als der ersten Ordnung giltige Gleichung:

$$\text{I.} \quad \underset{(a|d)^r}{S} + (-1)^r \cdot \underset{(d-a|d)^r}{S} = \frac{(-1)^{r-1} \cdot \pi}{d(r-1)!} \cdot \frac{\partial^{r-1} \operatorname{cotang} \frac{a\pi}{d}}{\partial a^{r-1}}.$$

Hiebei ist sogleich in die Augen fallend, dass diese Gleichung rücksichtlich der Vorzeichen ihrer Glieder eine etwas verschiedene Gestalt annimmt, je nachdem darin $r$ eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeutet, welcher Umstand, wie man sehen wird, einen nicht unerheblichen Einfluss auf die künftighin daraus abzuleitenden Folgerungen ausübt. Desshalb wird es am angemessensten sein, die beiden bezeichneten Fälle schon gegenwärtig von einander zu unterscheiden, und für jeden derselben eine abgesonderte Formel aufzustellen, um sich späterhin stets bestimmt darauf berufen zu können. Man erhält demnach, je nachdem man in I. entweder $2r$ oder $2r+1$ anstatt $r$ setzt, die beiden Gleichungen:

$$\text{II.}\quad \underset{(a|d)^{2r}}{S} + \underset{(d-a|d)^{2r}}{S} = -\frac{\pi}{d(2r-1)!}\cdot\frac{\partial^{2r-1}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a^{2r-1}}$$

und

$$\text{III.}\quad \underset{(a|d)^{2r+1}}{S} - \underset{(d-a|d)^{2r+1}}{S} = \frac{\pi}{d(2r)!}\cdot\frac{\partial^{2r}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a^{2r}}.$$

## §. 88.

Um die eben gefundenen Formeln bequem anwenden zu können, ist es nothwendig, die Differenzialquotienten von $\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}$ auf möglichst einfache Weise darzustellen. Diess hat nicht die geringste Schwierigkeit, so lange $r$ nur klein ist, wird aber desto mühsamer, je grösser $r$ ist. Zur Erleichterung dieser Arbeit lassen sich verschiedene rekurrente Ableitungsregeln aufstellen, durch deren Hilfe man allmälig zu immer höheren Werthen von $r$ überzugehen im Stande ist. Die einfachste dieser Regeln, oder wenigstens diejenige, bei welcher das einfachste Ableitungsgesetz Statt findet, dürfte folgende sein:

Setzt man zur Verkürzung der Ausdrücke

$$\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d} = p,$$

so lassen sich die vier ersten Differenzialquotienten in die Formen bringen:

$$\frac{\partial\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a} = -\frac{\pi}{d}(p^2+1),$$

$$\frac{\partial^2\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a^2} = \frac{\pi^2}{d^2}(p^2+1).2p,$$

$$\frac{\partial^3\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a^3} = -\frac{\pi^3}{d^3}(p^2+1)(6p^2+2),$$

$$\frac{\partial^4\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a^4} = \frac{\pi^4}{d^4}(p^2+1)(24p^3+16p).$$

**Hier erkennt man auf der Stelle das Vorhandensein bestimmter Gesetze rücksichtlich der Form der Differenzialquotienten, insbesondere, dass jeder derselben den Faktor $p^2+1$ enthalte. Setzt man nun demgemäss, es sei für irgend einen Werth von $r$**

$$\text{I.}\quad \frac{\partial^r \operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a^r}$$

$$=(-1)^r.\frac{\pi^r}{d^r}.(p^2+1)[A_1p^{r-1}+A_2p^{r-3}+A_3p^{r-5}+A_4p^{r-7}+\ldots]$$

**bereits bekannt, so findet man daraus durch nochmaliges Differenziren:**

$$\text{II.}\quad \frac{\partial^{r+1} \operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a^{r+1}}$$

$$=(-1)^{r+1}.\frac{\pi^{r+1}}{d^{r+1}}(p^2+1)\left[\begin{array}{c}(r+1)A_1p^r+(r-1)(A_1+A_2)p^{r-2}\\+(r-3)(A_2+A_3)p^{r-4}+(r-5)(A_3+A_4)p^{r-6}+\ldots.\end{array}\right].$$

**Diese Formel zeigt zur allmäligen Entwicklung der nach einander folgenden Differenzialquotienten eine so leichte Ableitungsregel, dass es ganz überflüssig sein würde, letztere auch noch mit Worten ausgedrückt hieher zu setzen.**

Allerdings würde es wünschenswerth sein, wenn man im Stande wäre, durch einen nicht allzu verwickelten independenten Ausdruck jeden einzelnen Differenzialquotienten für sich allein darzustellen, ohne dabei die Kenntniss der vorhergehenden schon voraussetzen zu müssen. Leider ist ein solcher Ausdruck bisher nicht gefunden worden. Wohl aber ist es möglich, für die vorhin mit $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ bezeichneten Koeffizienten independente Formeln aufzustellen, die freilich nicht einfach genug sind, um einen bedeutenden Nutzen zu gewähren, jedoch schon deshalb hier mitgetheilt zu werden verdienen, damit Anderen, welche sich vielleicht mit diesem Gegenstande beschäftigen wollen, die nicht ganz geringe Mühe der eigenen Aufsuchung erspart werde. Es ist nämlich:

$$A_1=r!,\quad A_2=\frac{r!(r-2)}{3}.\quad A_3=\frac{r!(r-4)(5r-13)}{90},$$

$$A_4=\frac{r!(r-6)(35r^2-273r+502)}{5670},$$

$$A_5=\frac{r!(r-8)(175r^3-2730r^2+13589r-21306)}{340200}.$$

Diese Formeln, deren Giltigkeit für jeden Werth von r m Hilfe des rekurrenten Gesetzes auf die gewöhnliche Art sich leicl erweisen lässt, reichen hin, um durch dieselben jeden einzelne Differenzialquotienten von cotang $\frac{a\pi}{d}$ bis einschliesslich $r=10$ i dependent auszudrücken, so dass man erst von $r=11$ angefang genöthiget ist, zur obigen rekurrenten Ableitung seine Zuflue zu nehmen.

## §. 89.

Noch muss wegen eines späterhin davon zu machenden G brauches ein anderer Weg kurz gezeigt werden, auf welche ebenfalls die Differenzialquotienten von cotang $\frac{a\pi}{d}$ wenigstens fi einige besondere Werthe von $a$ und $d$ sich bestimmen lasse

Vermöge der Taylor'schen Reihe ist

$$\operatorname{cotang}\left(\frac{a\pi}{d}+x\right)=\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}+\frac{\partial\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{1.\partial\frac{a\pi}{d}}.x+\frac{\partial^2\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{2\left(\partial\frac{a\pi}{d}\right)^2}.x^2$$

$$+\frac{\partial^3\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{3!\left(\partial\frac{a\pi}{d}\right)^3}.x^3+\ldots.$$

oder

$$\operatorname{cotang}\left(\frac{a\pi}{d}+x\right)=\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}+\frac{d}{1.\pi}.\frac{\partial\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a}x+\frac{d^2}{2\pi^2}.\frac{\partial^2\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a^2}x^2+$$

$$+\frac{d^3}{3!\pi^3}.\frac{\partial^3\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a^3}x^3+\ldots.,$$

Ist man im Stande, die Funktion $\operatorname{cotang}\left(\frac{a\pi}{d}+x\right)$ entwed allgemein, oder doch für irgend welche besondere Werthe von und $d$ in eine nach steigenden Potenzen von $x$ mit ganzen E ponenten geordnete Reihe zu entwickeln, ohne dabei die Kenr niss der bezeichneten Differenzialquotienten bereits voraussetz zu müssen, und nimmt man an, dass die Koeffizienten dieser Reil $C$, $C_1$, $C_2$, $C_3$,.... seien, so hat man

$$\operatorname{cotang}\left(\frac{a\pi}{d}+x\right)=C+C_1.x+C_2.x^2+C_3.x^3+\ldots.$$

Durch das Zusammenhalten eben dieses und des vorhergehenden Werthes ergibt sich dann sogleich:

$$\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}=C,\quad \frac{\partial\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a}=\frac{\pi}{d}.C_1,\quad \frac{\partial^2\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a^2}=\frac{2\pi^2}{d^2}.C_2,\ldots$$

und allgemein:

$$\text{I.}\quad \frac{\partial^r\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{d}}{\partial a^r}=\frac{r!\,\pi^r}{d^r}.C_r,$$

so dass aus jedem bekannten Koeffizienten $C_r$ auch der Werth des entsprechenden Differenzialquotienten leicht hervorgeht.

Ohne hierüber in eine umständliche allgemeine Erörterung sich einzulassen, genügt es zum gegenwärtigen Zwecke, nur zwei besondere Fälle zu betrachten, in welchen die erklärte Methode ohne Anstand sich anwenden lässt, und auf welche später noch Bezug genommen werden soll.

Sei zuerst $a=1$ und $d=2$. Unter diesen Voraussetzungen hat man:

$$\operatorname{cotang}\left(\frac{a\pi}{d}+x\right)=\operatorname{cotang}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{tang}x,$$

und daher vermöge der bekannten, durch die Bernoulli'schen Zahlen ausgedrückten Reihe für $\operatorname{tang}x$:

$$\operatorname{cotang}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{2^2(2^2-1)B_1}{2!}.x-\frac{2^4(2^4-1)B_2}{4!}.x^3$$
$$-\frac{2^6(2^6-1)B_3}{6!}.x^5-\ldots.$$

Hier sieht man, dass

$$C=0,\quad C_1=-\frac{2^2(2^2-1)B_1}{2!},\quad C_2=0,\quad C_3=-\frac{2^4(2^4-1)B_2}{4!},\ldots.$$

allgemein

$$C_{2r}=0\quad\text{und}\quad C_{2r-1}=-\frac{2^{2r}(2^{2r}-1)B_r}{(2r)!}$$

ist, woraus vermöge I., wenn darin für $d$ sogleich der angenommene konstante Werth 2 gesetzt wird,

$$\text{II.}\quad \frac{\partial^{2r}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{2}}{\partial a^{2r}}=0$$

und $$\frac{\partial^{2r-1}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{2}}{\partial a^{2r-1}}=\frac{(2r-1)!\,\pi^{2r-1}.C_{2r-1}}{2^{2r-1}}=-\frac{(2^{2r}-1)B_r\pi^{2r-1}}{r}$$

folgt. Man sieht wohl, dass diese Gleichungen keineswegs für jeden Werth von $a$, sondern nur für $a=1$ gelten, was darin nach den erfolgten Differenzirungen substituirt werden muss.

Wird zweitens $a=1$ und $d=4$ gesetzt, so findet man

$$\operatorname{cotang}\left(\frac{a\pi}{d}+x\right)=\operatorname{cotang}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sec 2x-\operatorname{tang}2x.$$

Hierin können nun anstatt $\sec 2x$ und $\operatorname{tang}2x$ die entwickelten Reihen eingeführt werden, deren eine eben vorhin angewendet, die andere aber, nämlich für die Sekante, hier bisher noch nicht gebraucht wurde. Bei dieser letzteren ist es nothwendig, eine bestimmte, nicht leicht einer Verwechslung unterliegende Bezeichnung für die sogenannten Sekantenkoeffizienten zu besitzen, an welcher sie überall, wo sie späterhin wieder vorkommen sollten, unzweideutig erkannt werden können, ohne einer neuen Erklärung zu bedürfen. In Berücksichtigung des Umstandes, dass diese Koeffizienten zu Ehren ihres ersten Entdeckers ganz füglich mit dem Namen „Euler'sche Zahlen" belegt werden könnten, sollen hier zur Bezeichnung derselben die Buchstaben $E$, $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$,.... gewählt werden, so dass künftighin stets

$$E=1,\ E_1=1,\ E_2=5,\ E_3=61,\ E_4=1385,\ E_5=50521$$

sein wird, die Berechnung der späteren Werthe aber durch die bekannte rekurrente Regel

$$E_n=\binom{2n}{2}.E_{n-1}-\binom{2n}{4}.E_{n-2}+\binom{2n}{6}.E_{n-3}-\binom{2n}{8}.E_{n-4}+\ldots$$

ohne Schwierigkeit weiter geführt werden kann.

Diess vorausgesetzt, hat man demnach:

$$\operatorname{cotang}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=E+E_1.\frac{2^2.x^2}{2!}+E_2.\frac{2^4.x^4}{4!}+E_3.\frac{2^6.x^6}{6!}+E_4.\frac{2^8.x^8}{8!}+\ldots$$
$$-\frac{2^3(2^2-1)B_1}{2!}.x-\frac{2^7(2^4-1)B_2}{4!}.x^3-\frac{2^{11}(2^6-1)B_3}{6!}.x^5$$
$$-\frac{2^{15}(2^8-1)B_4}{8!}.x^7-\ldots.$$

Die Vergleichung der Koeffizienten dieser Reihe mit den früher durch $C$, $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, .... bezeichneten zeigt, dass

$$C=E,\quad C_1=-\frac{2^3(2^2-1)B_1}{2!},\quad C_2=E_1\cdot\frac{2^2}{2!},\quad C_3=-\frac{2^7(2^4-1)B_2}{4!},$$

$$C_4=E_2\cdot\frac{2^4}{4!},$$

und allgemein

$$C_{2r}=E_r\cdot\frac{2^{2r}}{(2r)!},\quad C_{2r-1}=-\frac{2^{4r-1}(2^{2r}-1)B_r}{(2r)!}$$

sei, woraus dann vermöge I., wenn zugleich anstatt $d$ der angenommene konstante Werth 4 gesetzt wird,

III. $$\frac{\partial^{2r}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{4}}{\partial a^{2r}}=\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}}\cdot E_r \text{ und } \frac{\partial^{2r-1}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{4}}{\partial a^{2r-1}}=-\frac{(2^{2r}-1)B_r\pi^{2r-1}}{r}$$

folgt, wieder unter der Voraussetzung, dass nach den vollzogenen Differenzirungen für $a$ der Werth 1 angenommen wird.

Nach dieser kurzen Betrachtung einiger bestimmter Differenziale, deren Nutzen sich erst später herausstellen wird, soll nun wieder zu dem eigentlich hier zu behandelnden Gegenstande zurückgekehrt werden.

## §. 90.

Bereits in §. 9. ist darauf hingewiesen worden, dass die harmonischen Reihen höherer Ordnungen stets konvergent sind, mit alleiniger Ausnahme des Falles, wenn unter den Gliedern der Reihe eines mit dem Nenner 0 behaftet vorkommt, von welchem letzteren Falle hier nicht weiter gehandelt zu werden braucht. Desshalb kann die Summe einer jeden sowohl endlichen, als auch unendlichen harmonischen Reihe einer höheren als der ersten Ordnung stets durch die gewöhnliche Addition einer gehörigen Anzahl ihrer ersten Glieder entweder vollkommen genau, oder doch näherungsweise so genau, als man es verlangen mag, gefunden werden. Allein dieses Verfahren ist wegen der langsamen Abnahme der Glieder bei solchen Reihen nur dann leicht und kurz ausführbar, wenn die Anzahl der Glieder eine endliche und zugleich nicht besonders gross ist; sobald hingegen diese Anzahl bedeutend gross oder gar unendlich wird, gilt hier ganz das nämliche, was in §. 10. bezüglich der zur ersten Ordnung gehörigen harmonischen Reihen angeführt

wurde. Es müssen daher hier eben solche Umformungen vo nommen werden wie dort, durch welche man in den Stand ges werden soll, den Werth der endlichen oder unendlichen Reih allen Fällen mittelst einer mässigen Anzahl ihrer Glieder ohne allzu grosse Weitläufigkeit darzustellen.

Zu einer solchen Umformung gelangt man ganz leicht auf in §. 86. bezeichneten Wege, indem man die Gleichung II. §. 10., wenn darin $a$ als veränderlich betrachtet wird, $(r-1)$ differenzirt. Hiedurch erhält man nämlich unmittelbar

$$\frac{\partial^{r-1}\overset{n}{S}_{a|d}}{\partial a^{r-1}} = \frac{\partial^{r-1}C_{a|d}}{\partial a^{r-1}} + (-1)^r \left\{ \begin{array}{c} \frac{(r-2)!}{d(a+nd)^{r-1}} + \frac{(r-1)!}{2(a+nd)^r} + \frac{r!\,B_1 d}{2(a+nd)^{r+1}} \\ - \frac{(r+2)!\,B_2 d^3}{4!(a+nd)^{r+3}} + \frac{(r+4)!\,B_3 d^5}{6!(a+nd)^{r+5}} \\ - \frac{(r+6)!\,B_4 d^7}{8!(a+nd)^{r+7}} + \ldots \end{array} \right.$$

und wenn hierin aus IV. in §. 84. und I. in §. 85. die Werthe s stituirt werden, und man überdiess durchgängig mit $(-1)^{r-1}.(r-$ dividirt, ergibt sich die zu dem angeführten Zwecke tauglic Gleichung:

$$\text{I.}\quad \overset{n}{S}_{(a|d)^r} = S_{(a|d)^r} - \frac{1}{(r-1)\,d(a+nd)^{r-1}} - \frac{1}{2(a+nd)^r}$$

$$- \frac{\binom{r}{1}B_1 d}{2(a+nd)^{r+1}} + \frac{\binom{r+2}{3}B_2 d^3}{4(a+nd)^{r+3}} - \frac{\binom{r+4}{5}B_3 d^5}{6(a+nd)^{r+5}} + \frac{\binom{r+6}{7}B_4 d^7}{8(a+nd)^{r+7}} -$$

und hieraus ferner durch Versetzung der Glieder:

$$\text{II.}\quad S_{(a|d)^r} = \overset{n}{S}_{(a|d)^r} + \frac{1}{(r-1)\,d(a+nd)^{r-1}} + \frac{1}{2(a+nd)^r}$$

$$+ \frac{\binom{r}{1}B_1 d}{2(a+nd)^{r+1}} - \frac{\binom{r+2}{3}B_2 d^3}{4(a+nd)^{r+3}} + \frac{\binom{r+4}{5}B_3 d^5}{6(a+nd)^{r+5}} - \frac{\binom{r+6}{7}B_4 d^7}{8(a+nd)^{r+7}} +$$

## §. 91.

Die gliederweise Vergleichung der eben gefunde Formel I. mit II. in §. 10. bestätiget schon in den diessfälli ersten Gliedern dasjenige, was bereits in §. 3. vorläufig beme wurde, nämlich dass den harmonischen Reihen höherer Ordn

es nicht eben so, wie diess bei jenen der ersten Ordnung der Fall war, eigenthümliche konstante Zahlen zugehören, dass vielmehr deren Stelle bei den höheren Ordnungen durch die Summen der unendlichen Reihen selbst vertreten wird. Der ganze weitere Verlauf der Untersuchung wird die gleiche Stellvertretung der harmonischen Konstanten durch die Summen der unendlichen harmonischen Reihen höherer Ordnungen zeigen. Desshalb ist es wünschenswerth, diese Summen in der Folge bei ihrem häufigen Vorkommen auch durch eine möglichst kurze Benennung bezeichnen zu können, wozu hiemit der Ausdruck: harmonische Summen gewählt wird, der stets nur in dem eben angegebenen Sinne gebraucht werden soll.

Geht man bei fortschreitender Vergleichung der beiden vorhin bezeichneten Formeln auf die zweiten Glieder über, so zeigt sich, dass an der Stelle des in §. 10. vorhandenen transzendenten, nämlich logarithmischen, Gliedes in §. 90. ein algebraisches zum Vorscheine gekommen ist. Hiezu gesellt sich noch der Umstand, dass auch die Gleichung VI. des §. 9., welche bei den so eben mit dem Namen der harmonischen Summen belegten Reihen als Stellvertreterin der für die harmonischen Konstanten geltenden Formel I. des §. 22. angesehen werden kann, nicht eben so wie diese letztern einen Logarithmus enthält. Da man auf solche Art keine mit einem logarithmischen Ausdrucke behaftete Gleichung zwischen harmonischen Summen kennt, dient diess zur Erklärung des in der Folge auffallend hervortretenden Unterschiedes, dass die Logarithmen weder bei der Berechnung der harmonischen Summen, noch auch bei der Summirung anderer Reihen, welche ausschliesslich von jenen abhängen, irgend einen Einfluss besitzen, während sie doch bei den harmonischen Konstanten und den Reihensummirungen, die sich auf letztere zurückführen lassen, eine nicht unwichtige Rolle spielen.

Die fernere vergleichweise Betrachtung aller auf die beiden ersten noch folgenden Glieder in den Formeln I. des §. 90. und II. des §. 10. gibt sogleich zu erkennen, dass der ganze weitere Verlauf der unendlichen Reihe II. in §. 10. nichts anderes sei, als ein besonderer Fall von I. in §. 90., der daraus hervorgeht, wenn darin $r=1$ angenommen wird. Desshalb müssen die in §. 12. angeführten Bemerkungen über die Beschaffenheit und den Gebrauch, der von den Formeln des §. 10. gemacht werden kann, auch dem vollen Umfange nach von den Formeln des §. 90. gelten, ohne dass es nöthig sein wird, jene hier vollständig zu wiederholen. Man ist demnach im Stande, mit Hilfe von

II. in §. 90. den Werth einer jeden harmonischen Summe, und sobald diese als bekannt voraus gesetzt werden darf, durch die Formel I. auch die Summe $\overset{n}{S}_{(a|d)^r}$ so genau, als man es verlangt, ohne allzu grosse Weitläufigkeit zu bestimmen, welche Werthe auch $a$, $d$ und $r$ haben, und wie gross auch $n$ sein möge.

## §. 92.

Die eben erklärte oder eigentlich nur angedeutete Methode zur Berechnung der harmonischen Summen für bestimmt gegebene Werthe von $a$ und $d$ ist zwar auch dann anwendbar, wenn $a$ oder $d$ irrationale oder komplexe Zahlen sein sollten; sie ist jedoch in solchen Fällen wenig bequem wegen der dabei Statt findenden Vermengung der rationalen und irrationalen oder der reellen und imaginären Bestandtheile der Formeln. Um die erforderliche Arbeit etwas zu verkürzen, lassen sich, wenn $d$ als rational oder reell angenommen wird und entweder $a=\alpha\pm\sqrt{\beta}$ oder $a=\alpha\pm\beta.i$ ist, auch für die harmonischen Summen solche Formeln aufstellen, in welchen die rationalen und irrationalen, oder die reellen und imaginären Glieder von einander bereits getrennt erscheinen und daher auch abgesondert berechnet werden können, wie diess in den §§. 13. und 14. für die harmonischen Konstanten geleistet worden ist. Man braucht zu diesem Behufe nur die Formeln II. und V. des §. 13., wie auch III. und IV. des §. 14, für die Veränderliche $a$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, für die Veränderliche $\alpha$ $(r-1)$mal zu differenziren. Hiedurch erhält man sogleich:

$$\text{I.}\quad \underset{(\alpha\pm\sqrt{\beta}|d)^r}{S} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\left[\frac{\partial^{r-1}M}{\partial\alpha^{r-1}}\mp\frac{\partial^{r-1}N}{\partial\alpha^{r-1}}\cdot\sqrt{\beta}\right]$$

und

$$\text{II.}\quad \underset{(\alpha\pm\beta i|d)^r}{S} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left[\frac{\partial^{r-1}P}{\partial\alpha^{r-1}}\mp\frac{\partial^{r-1}Q}{\partial\alpha^{r-1}}\cdot\beta i\right],$$

wo $M$, $N$, $P$, $Q$ die nämlichen Werthe bedeuten, wie sie in §. 13. und §. 14. angesetzt sich befinden.

Durch die wirkliche Ausführung der hier nur angezeigten Differenzirungen werden diese Formeln allerdings etwas weitläufig, ohne dass jedoch eine andere Schwierigkeit dabei Statt findet,

als die Länge der Arbeit mit sich bringt. Desshalb kann die weitere Auseinandersetzung um so füglicher hier übergangen werden, als ohnehin in der Folge kein bestimmter Gebrauch davon gemacht werden soll.

## §. 93.

Nach den bisher vorgenommenen allgemeinen Erörterungen muss nunmehr zur wirklichen Berechnung der harmonischen Summen für bestimmte Werthe von $a$ und $d$ übergegangen und dabei zugleich dahin getrachtet werden, die gegenseitigen Beziehungen kennen zu lernen, welche zwischen den harmonischen Summen sowohl untereinander, als auch möglicher Weise mit den üblichen analytischen Funktionen in ähnlicher Weise Statt finden dürften, wie diess bei den harmonischen Konstanten der Fall war, wobei jedoch, um jede irgend vermeidliche Weitläufigkeit hinten zu halten, die Berechnung nur auf additive ganze Zahlen $a$ und $d$ beschränkt bleiben soll, da hieraus ohnehin die harmonischen Summen für alle anderen rationalen Werthe von $a$ oder $d$ abgeleitet werden können.

Bei der auf solche Art beschränkten Berechnung soll dann genau die nämliche Ordnung beobachtet werden, welche in §. 30. für die harmonischen Konstanten vorgeschrieben wurde, ohne dass es nöthig sein wird, das dort Gesagte hier nochmals zu wiederholen.

Ferner muss auch hier auf den Unterschied zwischen denjenigen harmonischen Summen, deren Werth bei Einhaltung der eben festgesetzten Ordnung nicht anders, als nur durch Hilfe unendlicher Reihen berechnet werden kann, und jenen, welche sich entweder analytisch im Sinne des § 53. darstellen, oder auf andere vorher bereits berechnete harmonische Summen zurückführen lassen, aufmerksam gemacht werden. Erstere sollen primäre, die letzteren aber sekundäre harmonische Summen benannt werden.

Endlich wird man ohne ausführlichere Erörterung sehen, dass bei jeder einzelnen Differenz nur solche harmonische Summen einer besonderen Berechnung bedürfen, deren Anfangszahlen kleiner als die Differenz sind, und zugleich mit der letzteren einen Faktor gemeinschaftlich haben, weil aus den eben bezeichneten alle übrigen harmonischen Summen vermöge der Formeln des §. 9. ohne Schwierigkeit sich ergeben.

## §. 94.

Wird nun mit dem einfachsten Falle, nämlich $d=1$, begonnen, wobei für jede Ordnung $r$ nur die einzige Summe $S_{(1|1)^r}$ einer besonderen Berechnung bedarf, so kann natürlich von einer Zurückführung auf andere harmonische Summen nicht die Rede sein, sondern nur gefragt werden, ob und in welchen Fällen man im Stande sei, diese harmonische Summe durch die üblichen Funktionsformen mittelst eines geschlossenen Ausdruckes darzustellen?

Zur Beantwortung dieser Frage für die geraden Ordnungen kann die Gleichung I. des §. 26. dienen. Setzt man nämlich darin $a=1-x$ und $d=1$, so geht sie in

$$C_{1-x|1} - C_{x|1} = \pi \operatorname{cotang}(1-x)\pi = -\pi \operatorname{cotang}\pi x,$$

oder, weil

$$C_{x|1} = C_{1+x|1} + \frac{1}{x}$$

ist, in

$$C_{1-x|1} - C_{1+x|1} = \frac{1}{x} - \pi \operatorname{cotang}\pi x,$$

oder endlich, wenn hierin anstatt $\operatorname{cotang}\pi x$ die bekannte Reihenentwickelung gesetzt wird, in

$$C_{1-x|1} - C_{1+x|1} = \frac{2^2 B_1 \pi^2}{2!}.x + \frac{2^4 B_2 \pi^4}{4!}.x^3 + \frac{2^6 B_3 \pi^6}{6!}.x^5 + \frac{2^8 B_4 \pi^8}{8!}.x^7 + \ldots$$

über. Wird nun diese Gleichung $(2r-1)$mal für $1+x$, oder, was einerlei ist, für $x$ als Veränderliche differenzirt, so ergibt sich daraus unmittelbar:

$$(2r-1)!.\ S_{(1-x|1)^{2r}} + (2r-1)!.\ S_{(1+x|1)^{2r}} = \frac{(2r-1)!\,2^{2r} B_r \pi^{2r}}{(2r)!} + \frac{(2r+1)!\,2^{2r+2} B_{r+1} \pi^{2r+2}}{2!.(2r+2)!}.x^2 + \ldots.;$$

folglich ist:

$$S_{(1-x|1)^{2r}} + S_{(1+x|1)^{2r}} = \frac{2^{2r} B_r \pi^{2r}}{(2r)!} + \frac{2^{2r+2} B_{r+1} \pi^{2r+2}}{2!(2r+2).(2r-1)!}.x^2 + \frac{2^{2r+4} B_{r+2} \pi^{2r+4}}{4!(2r+4).(2r-1)!}.x^4 + \ldots.,$$

woraus man für $x=0$

$$S_{(1|1)^{2r}} + S_{(1|1)^{2r}} = \frac{2^{2r} B_r \pi^{2r}}{(2r)!}$$

und daher

$$1. \quad S_{(1|1)^{2r}} = \frac{2^{2r-1} B_r \pi^{2r}}{(2r)!}$$

erhält.

Diese Gleichung, welche, wie man sieht, die merkwürdigen zuerst von Johann Bernoulli gefundenen Summirungen der geraden Potenzen der reziproken natürlichen Zahlen ausdrückt, zeigt, dass der Werth der harmonischen Summe $S_{(1|1)^r}$ für jede gerade Ordnung $r$ analytisch mit Hilfe von $\pi$ und der Bernoulli'schen Zahlen, welche bekanntlich rationale Brüche sind, sich darstellen lasse, und daher $S_{(1|1)^{2r}}$ jederzeit eine sekundäre harmonische Summe sei.

Leider ist man weder auf dem vorhergehend betretenen, noch auf irgend einem anderen Wege bisher im Stande gewesen, auch die ungeraden Potenzen der reziproken natürlichen Zahlen oder in der hier eingeführten Bezeichnung die Werthe von $S_{(1|1)^{2r+1}}$ ebenfalls analytisch auszudrücken, sondern dieselben können nur mit Hilfe von unendlichen Reihen, wie z. B. die in §. 90. angeführten, berechnet, und somit muss $S_{(1|1)^{2r+1}}$ stets als primäre harmonische Summe angesehen werden.

Die numerische Berechnung der Werthe von $S_{(1|1)^r}$, sowohl für gerade als für ungerade $r$, hat Euler bis $r=16$, dann Legendre bis $r=35$ ausgeführt, letzterer auf 16 Dezimalstellen, wobei er zugleich einige bei Euler unterlaufene Verstösse verbessert hat. Oettinger hat diese Rechnung bis $r=40$ in 16 und zuweilen noch mehreren Dezimalstellen ausgedehnt. Demnach können diese Werthe zu jedem davon zu machenden Gebrauche mit mehr als hinreichender Genauigkeit für bekannt angenommen werden, ohne den schon bekannten Rechnungen irgend etwas Neues hinzufügen zu müssen. Da übrigens hier in der Folge bei den einzelnen Rechnungen überhaupt nicht weiter, als bis einschliesslich der vierten Ordnung der harmonischen Summen, vorgeschritten werden soll, mögen der Vollständigkeit wegen die Werthe von $S_{(1|1)^r}$ bis $r=4$ hier noch Platz finden. Es ist nämlich:

$$S_{(1|1)^2} = \frac{2B_1\pi^2}{2!} = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}644934066848\,2264,$$

$$S_{(1|1)^3} = 1{,}202056903159\,5943,$$

$$S_{(1|1)^4} = \frac{2^3B_2\pi^4}{4!} = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}082323233711\,1382.$$

## §. 95.

Im zweiten Falle, wenn $d=2$ angenommen wird, ist in Folge des in §. 93. Gesagten für jede Ordnung nur die einzige Summe $S_{(1|2)^r}$ besonders zu bestimmen. Zu diesem Behufe ergibt sich aus der Gleichung VI. des §. 9., wenn darin $a=1$, $d=2$ und $n=2$ gesetzt wird,

$$S_{(1|2)^r} + S_{(2|2)^r} = S_{(1|1)^r},$$

woraus

$$S_{(1|2)^r} = S_{(1|1)^r} - S_{(2|2)^r} = S_{(1|1)^r} - \frac{1}{2^r}\cdot S_{(1|1)^r}$$

oder

$$\text{I.} \quad S_{(1|2)^r} = \frac{2^r-1}{2^r}\cdot S_{(1|1)^r}$$

folgt.

Man sieht, dass die harmonischen Summen $S_{(1|2)^r}$ in allen Fällen sekundär sind, mag $r$ gerade oder ungerade sein, weil sie stets auf $S_{(1|1)^r}$ zurückgeführt werden können. In dem besonderen Falle, wenn der Ordnungsexponent gerade sein sollte, kann in I. noch ferner $2r$ anstatt $r$ gesetzt, und dann anstatt $S_{(1|1)^{2r}}$ der Werth aus I. in §. 94. substituirt werden. Dadurch erhält man:

$$\text{II.} \quad S_{(1|2)^{2r}} = \frac{(2^{2r}-1)B_r\pi^{2r}}{2.(2r)!},$$

woraus man sieht, dass auch diese harmonischen Summen mit Hilfe von $\pi$ und der Bernoulli'schen Zahlen analytisch sich ausdrücken lassen.

Noch verdient hier bemerkt zu werden, dass die eben gefun-

dene Summenformel auch auf einem anderen Wege, unabhängig von I. in §. 94., hätte abgeleitet werden können. Setzt man nämlich in II. des §. 87. $a=1$ und $d=2$, so ergibt sich:

$$\underset{(1|2)^{2r}}{S} + \underset{(1|2)^{2r}}{S} = -\frac{\pi}{2.(2r-1)!}\cdot\frac{\partial^{2r-1}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{2}}{\partial a^{2r-1}},$$

und folglich ist

$$\underset{(1|2)^{2r}}{S} = -\frac{\pi}{4.(2r-1)!}\cdot\frac{\partial^{2r-1}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{2}}{\partial a^{2r-1}},$$

*unter* der Voraussetzung, dass hier nach Ausführung der Differenzirungen für $a$ der Werth 1 angenommen wird. Unter der gleichen Bedingung ist aber vermöge II. in §. 89.:

$$-\frac{\partial^{2r-1}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{2}}{\partial a^{2r-1}} = -\frac{(2^{2r}-1)\,B_r\,\pi^{2r-1}}{r}$$

gefunden worden, was nur in der unmittelbar vorhergehenden Gleichung substituirt zu werden braucht, um sogleich obige Formel II. zu erhalten.

Für die drei niedrigsten Ordnungen findet man, wenn in II. $r=1$ und $r=2$, hingegen in I. $r=3$ angenommen wird:

$$\underset{(a|2)^3}{S} = \frac{(2^2-1)\,B_1\,\pi^2}{2.2!} = \frac{\pi^2}{8} = 1{,}2337\,0055\,0136\,1698,$$

$$\underset{(1|2)^3}{S} = \frac{2^3-1}{2^3}\cdot\underset{(1|1)^3}{S} = \frac{7}{8}\cdot\underset{(1|1)^3}{S} = 1{,}0517\,9979\,0264\,6450,$$

$$\underset{(1|2)^4}{S} = \frac{(2^4-1)\,B_2\,\pi^4}{2.4!} = \frac{\pi^4}{96} = 1{,}0146\,7803\,1604\,1921.$$

## §. 96.

Für die Differenz $d=3$ müssen nach §. 93. die zwei Summen $\underset{(1|3)^r}{S}$ und $\underset{(2|3)^r}{S}$ bestimmt werden. Zu diesem Zwecke erhält man aus VI. in §. 9., wenn darin $a=1$, $d=1$ und $m=3$ gesetzt wird,

$$\underset{(1|3)^r}{S} + \underset{(2|3)^r}{S} + \underset{(3|3)^r}{S} = \underset{(1|1)^r}{S},$$

woraus

$$\underset{(1|3)^r}{S} + \underset{(2|3)^r}{S} = \underset{(1,1)^r}{S} - \underset{(3,3)^r}{S}$$

oder

$$\text{I.} \quad \underset{(1|3)^r}{S} + \underset{(2|3)^r}{S} = \frac{3^r - 1}{3^r} \cdot \underset{(1|1)^r}{S}$$

folgt. Wird nun zuerst hierin $2r$ anstatt $r$ und dann noch ferner anstatt $\underset{(1|1)^{2r}}{S}$ der Werth aus I. in §. 94. substituirt, so hat man für die geraden Ordnungen:

$$\underset{(1|3)^{2r}}{S} + \underset{(2|3)^{2r}}{S} = \frac{2^{2r-1}(3^{2r}-1)\,B_r\,\pi^{2r}}{(2r)!\,.\,3^{2r}}.$$

Ferner ergibt auch die Gleichung II. des §. 87., wenn darin $a = 1$, $d = 3$ gesetzt wird:

$$\underset{(1|3)^{2r}}{S} + \underset{(2|3)^{2r}}{S} = -\frac{\pi}{3.(2r-1)!} \cdot \frac{\partial^{2r-1} \operatorname{cotang} \frac{a\pi}{3}}{\partial a^{2r-1}},$$

unter der Bedingung, dass darin zuletzt $a = 1$ angenommen wird. Durch die Vergleichung dieser beiden Werthe wird man zwar zu dem bemerkenswerthen Schlusse berechtigt, dass für $a = 1$

$$\frac{\partial^{2r-1} \operatorname{cotang} \frac{a\pi}{3}}{\partial a^{2r-1}} = -\frac{2^{2r-2}(3^{2r}-1)\,B_r\,\pi^{2r-1}}{3^{2r-1}\,.\,r}$$

sein müsse, man wird jedoch hiedurch nicht in den Stand gesetzt, jede der zwei harmonischen Summen $\underset{(1|3)^{2r}}{S}$ und $\underset{(2|3)^{2r}}{S}$ abgesondert bestimmen zu können. Desshalb muss die eine von ihnen, nämlich $\underset{(1|3)^{2r}}{S}$, als eine primäre anerkannt werden, deren Werth man nur mittelst einer unendlichen Reihe zu berechnen vermag, die andere hingegen ist eine sekundäre, welche durch die Gleichung

$$\text{II.} \quad \underset{(3,3)^{2r}}{S} = \frac{2^{2r-1}(3^{2r}-1)\,B_r\,\pi^{2r}}{(2r)!\,.\,3^{2r}} - \underset{(1|3)^{2r}}{S}$$

auf die primäre $\underset{(1|3)^{2r}}{S}$ zurückgeführt werden kann.

Wird zweitens der Ordnungsexponent als ungerade angenommen, und dafür $2r+1$ gesetzt, so geht die Gleichung I. in

$$\underset{(1|3)^{2r+1}}{S} + \underset{(2|3)^{2r+1}}{S} = \frac{3^{2r+1}-1}{3^{2r+1}} \cdot \underset{(1|1)^{2r+1}}{S}$$

über; ferner ergibt sich aus III. in §. 87.:

$$\underset{(1|3)^{2r+1}}{S} - \underset{(2|3)^{2r+1}}{S} = \frac{\pi}{3.(2r)!} \cdot \frac{\partial^{2r} \operatorname{cotang} \frac{a\pi}{3}}{\partial a^{2r}},$$

wo in dem Differenziale zuletzt $a=1$ gesetzt werden muss.

Aus diesen zwei Gleichungen erhält man sogleich:

$$\text{III.} \quad \underset{(1|3)^{2r+1}}{S} = \frac{3^{2r+1}-1}{2.3^{2r+1}} \cdot \underset{(1|1)^{2r+1}}{S} + \frac{\pi}{6.(2r)!} \cdot \frac{\partial^{2r} \operatorname{cotang} \frac{a\pi}{3}}{\partial a^{2r}}$$

und

$$\text{IV.} \quad \underset{(2|3)^{2r+1}}{S} = \frac{3^{2r+1}-1}{2.3^{2r+1}} \cdot \underset{(1|1)^{2r+1}}{S} + \frac{\pi}{6.(2r)!} \cdot \frac{\partial^{2r} \operatorname{cotang} \frac{a\pi}{3}}{\partial a^{2r}}.$$

Demnach sind diese harmonischen Summen beide sekundär, indem ihre Werthe auf die primäre Summe $\underset{(1|1)^{2r+1}}{S}$ sich zurückführen lassen.

Man sieht hieraus, dass der Vorzug, welcher bei den Differenzen 1 und 2 den geraden Ordnungen vor den ungeraden zugekommen ist, dass nämlich die ersteren Summen analytisch ausgedrückt werden können, nicht aber die letzteren, bei der Differenz 3 nicht ferner Statt findet. Hiebei sind vielmehr beide diese Abtheilungen von Ordnungen vollkommen einander gleich gehalten, indem jede zur Differenz 3 gehörige Summe entweder selbst eine primäre ist, oder doch die Kenntniss einer anderen primären zu ihrer Berechnung erfordert.

Man wird Gelegenheit finden, die gleiche Beobachtung auch bei den ferner in Betracht zu ziehenden grösseren Differenzen ebenfalls anzustellen, was hier vorläufig nur angemerkt wird, um späterhin nicht nochmals darauf zurückkommen zu müssen.

Für die kleinsten Ordnungen 2, 3, 4 findet man, wenn in I. $r=1$ und $r=2$, in III. und IV. $r=1$ gesetzt, und zugleich bemerkt wird, dass vermöge §. 88. für $a=1$

$$\frac{\partial^2 \operatorname{cotang} \frac{a\pi}{3}}{\partial a^2} = \frac{\pi^2}{3^2} \cdot \left(\tfrac{1}{3}+1\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8\pi^2\sqrt{3}}{81}$$

ist, folgende numerische Werthe:

$$\underset{(1|3|^3}{S} = 1{,}12173301393633438,$$

$$\underset{(2|3)^3}{S} = \frac{4\pi^3}{27} - \underset{(1|3)^3}{S} = 0{,}34043060103985 75,$$

$$\underset{(1|3)^3}{S} = \frac{13}{27}\cdot\underset{(1|1)^3}{S} + \frac{2\pi^3\sqrt{3}}{243} = 1{,}02078004443336 31,$$

$$\underset{(2|3)^3}{S} = \frac{13}{27}\cdot\underset{(1,1)^3}{S} - \frac{2\pi^3\sqrt{3}}{243} = 0{,}13675023268328 32,$$

$$\underset{(1|3)^4}{S} = 1{,}00449344767873 01,$$

$$\underset{(2|3)^4}{S} = \frac{8\pi^4}{729} - \underset{(1|3)^4}{S} = 0{,}06446776880140 64.$$

## §. 97.

Bei der Differenz $d = 4$ sind gleichfalls nur zwei harmonische Summen, nämlich $\underset{(1|4)^r}{S}$ und $\underset{(3|4)^r}{S}$, besonders zu berechnen, wozu sich aus VI. in §. 9., wenn darin $a = 1$, $d = 2$, $m = 2$ angenommen wird, im allgemeinen die Gleichung

$$\text{I.} \quad \underset{(1|4)^r}{S} + \underset{(3|4)^r}{S} = \underset{(1|2)^r}{S}$$

ergibt. Für die geraden Ordnungen insbesondere erhält man daraus, wenn $2r$ anstatt $r$ und dann aus §. 95. II. der Werth substituirt wird,

$$\underset{(1|4)^{2r}}{S} + \underset{(3|4)^{2r}}{S} = \frac{(2^{2r}-1)\,B_r\pi^{2r}}{2.(2r)!}.$$

Nebst der eben gefundenen erhält man aus II. in §. 85. noch die fernere Gleichung

$$\underset{(1|4)^{2r}}{S} + \underset{(3|4)^{2r}}{S} = -\frac{\pi}{4.(2r-1)!}\cdot\frac{\partial^{2r-1}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{4}}{\partial a^{2r-1}},$$

wenn darin zuletzt $a = 1$ gesetzt wird. Aus diesen zwei Gleichungen folgt zwar, dass für $a = 1$

$$-\frac{\pi}{4.(2r-1)!}\cdot\frac{\partial^{2r-1}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{4}}{\partial a^{2r-1}} = \frac{(2^{2r}-1)\,B_r\pi^{2r}}{2.(2r)!}$$

sein müsse, was mit dem in §. 89. III. gefundenen Resultate vollkommen übereinstimmt, man ist jedoch nicht im Stande, hieraus die beiden harmonischen Summen $S_{(1|4)^{2r}}$ und $S_{(3|4)^{2r}}$ abgesondert zu bestimmen. Demnach, da eine weitere von diesen wesentlich verschiedene Gleichung nicht bekannt ist, muss $S_{(1|4)^{2r}}$ als eine primäre harmonische Summe betrachtet werden, woraus dann $S_{(3|4)^{2r}}$ als sekundär durch die Gleichung

$$\text{II.} \quad S_{(3|4)^{2r}} = \frac{(2^{2r}-1)\,B_r.\pi^{2r}}{2.(2r)!} - S_{(1|4)^{2r}}$$

leicht gefunden wird.

Für die ungeraden Ordnungen geht die obige Gleichung I., wenn darin $2r+1$ anstatt $r$ und dann ferner aus I. in §. 95. der Werth gesetzt wird, in

$$S_{(1|4)^{2r+1}} + S_{(3|4)^{2r+1}} = \frac{2^{2r+1}-1}{2^{2r+1}} . S_{(1|1)^{2r+1}}$$

über. Hiezu kommt aus III. in §. 87. für $a=1$, $d=4$ die fernere Gleichung

$$S_{(1|4)^{2r+1}} - S_{(3|4)^{2r+1}} = \frac{\pi}{4.(2r)!} . \frac{\partial^{2r} \operatorname{cotang} \frac{a\pi}{4}}{\partial a^{2r}},$$

wenn darin zuletzt $a=1$ angenommen wird. Unter der nämlichen Voraussetzung ist aber vermöge III. in §. 89.

$$\frac{\partial^{2r} \operatorname{cotang} \frac{a\pi}{4}}{\partial a^{2r}} = \frac{\pi^{2r}}{2^{2r}} . E_r$$

gefunden worden, durch welche Substitution die letzte Gleichung sich in

$$S_{(1|4)^{2r+1}} - S_{(3|4)^{2r+1}} = \frac{\pi^{2r+1}.E_r}{2^{2r+2}.(2r)!}$$

verwandelt. Aus dieser und der nächst vorhergehenden Gleichung erhält man demnach:

$$\text{III.} \quad S_{(1|4)^{2r+1}} = \frac{2^{2r+1}-1}{2^{2r+2}} . S_{(1|1)^{2r+1}} + \frac{E_r.\pi^{2r+1}}{2^{2r+3}.(2r)!}$$

und

$$\text{IV.}\quad \underset{(3|4)^{2r+1}}{S} = \frac{2^{2r+1}-1}{2^{r+2}} \cdot \underset{(1|1)^{2r+1}}{S} - \frac{E_r \cdot \pi^{2r+1}}{2^{2r+3} \cdot (2r)!}.$$

Für die kleinsten Ordnungen 2, 3, 4 ergeben sich durch wirkliche Berechnung folgende Resultate:

$$\underset{(1|4)^2}{S} = 1{,}0748330721567014,$$

$$\underset{(3|4)^2}{S} = \frac{\pi^2}{8} - \underset{(1|4)^2}{S} = 0{,}1588674779794684,$$

$$\underset{(1|4)^3}{S} = \frac{7}{16} \cdot \underset{(1|1)^3}{S} + \frac{\pi^3}{64} = 1{,}0103729682620072,$$

$$\underset{(3|4)^3}{S} = \frac{7}{16} \cdot \underset{(1|1)^3}{S} - \frac{\pi^3}{64} = 0{,}0414268220026378,$$

$$\underset{(1|4)^4}{S} = 1{,}0018112916726487,$$

$$\underset{(3|4)^4}{S} = \frac{\pi^4}{96} - \underset{(1|4)^4}{S} = 0{,}0128667399315434.$$

## §. 98.

Es ist einleuchtend, dass man durch weiteres Fortschreiten auf dem bisher betretenen Wege allmälig auch für alle grösseren Differenzen die Werthe der zugehörigen harmonischen Summen, mögen sie nun primäre oder sekundäre sein, bestimmen und die zwischen denselben Statt findenden wechselseitigen Beziehungen, so weit sie aus den bisher bekannten Gleichungen sich ableiten lassen, auffinden könne. Hier mag es jedoch genügen, zu den bereits ausgeführten Rechnungen noch die Betrachtung der zur Differenz 6 gehörigen harmonischen Summen hinzu zu fügen, hauptsächlich aus dem Grunde, weil die Kenntniss derselben nothwendig ist, um auch solche Reihen behandeln zu können, die zwar rücksichtlich der numerischen Werthe ihrer Glieder nach der Differenz 3 fortschreiten, aber wegen Abwechslung der Vorzeichen der letzteren eigentlich zur Differenz 6 gehören. Auch wird sich zeigen, dass bei dieser Differenz ohnehin keine neue primäre Summe zu den früheren hinzu kommt.

Für $d=6$ bedürfen nur die beiden harmonischen Summen $\underset{(1|6)^r}{S}$ und $\underset{(5|6)^r}{S}$ einer eigenen Berechnung. Hiezu erhält man aus VI. in §. 9. die Gleichungen:

$$S_{(1|6)^r} + S_{(4|6)^r} = S_{(1|3)^r} \quad \text{und} \quad S_{(2|6)^r} + S_{(5|6)^r} = S_{(2|3)^r},$$

aus welchen sogleich

$$S_{(1|6)^r} = S_{(1|3)^r} - S_{(4|6)^r} = S_{(1|3)^r} - \frac{1}{2^r} \cdot S_{(2|3)^r}$$

und

$$S_{(5|6)^r} = S_{(2|3)^r} - S_{(2|6)^r} = S_{(2|3)^r} - \frac{1}{2^r} \cdot S_{(1|3)^r}$$

gefunden wird. Werden nun hierin die geraden und ungeraden Ordnungen von einander unterschieden und zugleich aus §. 96. anstatt $S_{(1|3)^{2r}}$ und $S_{(2|3)^{2r}}$ die Werthe substituirt, so zeigt sich, dass für die geraden Ordnungen:

$$\text{I.} \quad S_{(1|6)^{2r}} = \frac{2^{2r}+1}{2^{2r}} \cdot S_{(1|3)^{2r}} - \frac{(3^{2r}-1)\,B_r\,\pi^{2r}}{2.3^{2r}.(2r)!},$$

$$\text{II.} \quad S_{(5|6)^{2r}} = \frac{2^{2r-1}(3^{2r}-1)\,B_r\,\pi^{2r}}{3^{2r}.(2r)!} - \frac{(2^{2r}+1)}{2^{2r}} \cdot S_{(1|3)^{2r}},$$

für die ungeraden Ordnungen hingegen:

$$\text{III.} \quad S_{(1|6)^{2r+1}} = \frac{(2^{2r+1}-1)(3^{2r+1}-1)}{2^{2r+2}.3^{2r+1}} \cdot S_{(1|1)^{2r+1}} + \frac{(2^{2r+1}+1)\,\pi}{2^{2r+2}.3.(2r)!} \cdot \frac{\partial^{2r}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{3}}{\partial a^{2r}},$$

$$\text{IV.} \quad S_{(5|6)^{2r+1}} = \frac{(2^{2r+1}-1)(3^{2r+1}-1)}{2^{2r+2}.3^{2r+1}} \cdot S_{(1|1)^{2r+1}} - \frac{(2^{2r+1}+1)\,\pi}{2^{2r+2}.3.(2r)!} \cdot \frac{\partial^{2r}\operatorname{cotang}\frac{a\pi}{3}}{\partial a^{2r}}$$

sei, wo aber nach verrichteter Differenzirung noch $a=1$ angenommen werden muss. Für die drei einfachsten Fälle findet man durch Ausführung der Rechnungen:

$$S_{(1|6)^2} = \frac{5}{4} \cdot S_{(1|3)^2} - \frac{\pi^2}{27} = 1{,}0366\,2536\,3676\,3794,$$

$$S_{(5|6)^2} = \frac{4\pi^2}{27} - \frac{5}{4} \cdot S_{(1|3)^2} = 0{,}0599\,9734\,7555\,7715,$$

$$S_{(1|6)^3} = \frac{91}{216} \cdot S_{(1|1)^3} + \frac{\pi^3\sqrt{3}}{108} = 1{,}0036\,8551\,5347\,9527,$$

$$S_{(5|6)^3} = \frac{91}{216} \cdot S_{(1|1)^3} - \frac{\pi^3\sqrt{3}}{108} = 0{,}0091\,5872\,7129\,1129,$$

$$\underset{(1|6)^4}{S} = \frac{17}{16}.\underset{(1|3)^4}{S} - \frac{\pi^4}{1458} = 1{,}000464214286422,$$

$$\underset{(5|6)^4}{S} = \frac{8\pi^4}{729} - \frac{17}{16}.\underset{(1|3)^4}{S} = 0{,}001686928196\,4857.$$

## §. 99.

Durch Euler's und Legendre's Bemühungen sind, wie bereits in §. 94. erwähnt wurde, die Werthe der Summen $\underset{(1|1)^2}{S}$ und auch jene von $\underset{(1|2)^{2r}}{S}$ bis zu sehr hohen Ordnungen mit einer zum wirklichen Gebrauche mehr als hinlänglichen Genauigkeit bekannt. Diese Werthe sollen nun zunächst dazu benutzt werden um gewisse von den früher gefundenen verschiedene Reihen aufzustellen, welche bei der Berechnung sowohl der harmonischen Konstanten, als auch der harmonischen Summen mit Nutzen angewendet werden können.

Aus der Gleichung I. des §. 85. erhält man, wenn darin $a+x$ anstatt $a$ angenommen wird,

$$\frac{\partial^r \underset{a+x|d}{C}}{\partial x^r} = (-1)^r.r!.\underset{(a+x|d)^{r+1}}{S},$$

woraus für $x=0$

$$\frac{\partial^r \underset{a+x|d}{C}}{\partial x^r} = (-1)^r.r!.\underset{(a|d)^{r+1}}{S}$$

folgt. Setzt man nun hierin anstatt $r$ nach und nach 1, 2, 3, 4,... und substituirt die hiedurch zum Vorschein kommenden Werthe in der Maclaurin'schen Reihe, wenn darin $fx = \underset{a+x|d}{C}$ und daher $f0 = \underset{a|d}{C}$ angenommen wird, so ergibt sich:

$$\text{I.}\quad \underset{a+x|d}{C} = \underset{a|d}{C} - \underset{(a|d)^2}{S}.x + \underset{(a|d)^3}{S}.x^2 - \underset{(a|d)^4}{S}.x^3 + \underset{(a|d)^5}{S}.x^4 - \ldots.$$

Durch diese Reihe ist man unter der Voraussetzung ihrer Konvergenz offenbar im Stande, den Werth von $\underset{a+x|d}{C}$ zu berechnen, sobald sowohl $\underset{a|d}{C}$, als auch die harmonischen Summen $\underset{(a|d)^2}{S}$, $\underset{(a|d)^3}{S}$, $\underset{(a|d)^4}{S}$,.... als bereits bekannt angenommen werden dürfen. Die

letztere Bedingung würde zwar im allgemeinen sehr mühsam zu erfüllen sein, nach dem früher Gesagten ist sie aber in den beiden Fällen bereits erfüllt, wenn entweder $a=1$ und $d=1$, oder $a=1$ und $d=2$ ist. Für diese einzelnen Fälle hat man daher die besonderen Formeln

$$\text{II.}\quad \underset{1+x|1}{C} = \underset{1|1}{C} - \underset{(1|1)^2}{S}.x + \underset{(1|1)^3}{S}.x^2 - \underset{(1|1)^4}{S}.x^3 + \underset{(1|1)^5}{S}.x^4 - \ldots.$$

und

$$\text{III.}\quad \underset{1+x|2}{C} = \underset{1|2}{C} - \underset{(1|2)^2}{S}.x + \underset{(1|2)^3}{S}.x^2 - \underset{(1|2)^4}{S}.x^3 + \underset{(1|2)^5}{S}.x^4 - \ldots.$$

In diesen, ihrer Form nach höchst einfachen, Reihen sind alle darin vorkommenden bestimmten Zahlen bis auf 16 Dezimalstellen bereits berechnet und könnten, wenn es verlangt werden sollte, ohne allzu grosse Mühe auch noch weiter genau gefunden werden; überdiess konvergiren sie offenbar stets, sobald $x<1$ ist, und zwar desto rascher, je kleiner $x$ angenommen wird. Sie können daher zur Berechnung von $\underset{1+x|1}{C}$ oder $\underset{1+x|2}{C}$ eigentlich immer gebraucht werden, wenn $x<1$ ist, mit einiger Bequemlichkeit jedoch nur dann, wenn $x$ den Werth $\frac{1}{2}$ nicht übersteigt, weil unter dieser Voraussetzung die Abnahme der Glieder rascher vor sich geht, als bei einer geometrischen Progression mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$.

Es wird bald gezeigt werden, dass jede der beiden Reihen II. oder III., obgleich sie nur einzelne Fälle ausdrücken, dennoch die Stelle der weit umfassenderen Formel I. vollkommen zu vertreten vermag, ohne dass es dabei nothwendig ist, für $x$ einen grösseren Werth als $\frac{1}{2}$ anzunehmen. Desshalb dürfte es wohl die Mühe lohnen, den Gebrauch jener Reihen etwas näher zu untersuchen, und insbesondere einige Hilfsmittel anzugeben, durch welche dabei die Raschheit der Konvergenz erhöht werden kann.

## §. 100.

Zu dem eben ausgesprochenen Zwecke lässt sich zunächst das nämliche Verfahren anwenden, dessen sich Legendre bei den Reihen für die von ihm betrachteten Funktionen $l\Gamma x$ bedient hat.

Setzt man in den Reihen II. und III. des §. 99. zuerst $-x$ anstatt $x$, so gehen dieselben in

$$\underset{1-x|1}{C} = \underset{1|1}{C} + \underset{(1|1)^2}{S}.x + \underset{(1|1)^3}{S}.x^2 + \underset{(1|1)^4}{S}.x^3 + \underset{(1|1)^5}{S}.x^4 + \ldots.$$

und

$$\underset{1-x|2}{C} = \underset{1|2}{C} + \underset{(1|2)^1}{S}.x + \underset{(1|2)^3}{S}.x^2 + \underset{(1|2)^4}{S}.x^3 + \underset{(1|2)^5}{S}.x^4 + \ldots.$$

über, und wenn hiervon die früheren Reihen abgezogen we erhält man:

$$\underset{1-x|1}{C} - \underset{1+x|1}{C} = 2[\underset{(1|1)^2}{S}.x + \underset{(1|1)^4}{S}.x^3 + \underset{(1|1)^6}{S}.x^5 + \ldots.]$$

und

$$\underset{1-x|2}{C} - \underset{1+x|2}{C} = 2[\underset{(1|2)^2}{S}.x + \underset{(1|2)^4}{S}.x^3 + \underset{(1\,2)^6}{S}.x^5 + \ldots.].$$

Nun ist aber, wie bereits in §. 94. gezeigt wurde,

$$\underset{1-x|1}{C} - \underset{1+x|1}{C} = \frac{1}{x} - \pi \operatorname{cotang} \pi x,$$

und auch vermöge §. 26.:

$$\underset{1-x|2}{C} - \underset{1+x|2}{C} = \frac{\pi}{2} \operatorname{cotang} \frac{(1-x)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2},$$

folglich hat man:

$$\underset{(1|1)^2}{S}.x + \underset{(1|1)^4}{S}.x^3 + \underset{(1|1)^6}{S}.x^5 + \ldots. = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2} \operatorname{cotang} \pi x$$

und

$$\underset{(1|2)^2}{S}.x + \underset{(1|2)^4}{S}.x^3 + \underset{(1|2)^6}{S}.x^5 + \ldots. = \frac{\pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2}.$$

Durch die Substitution dieser Werthe in II. und III. §. 99. ergeben sich sogleich die neuen Formeln:

I. $$\underset{1+x|1}{C} = \underset{1|1}{C} - \frac{1}{2x} + \frac{\pi}{2} \operatorname{cotang} \pi x + \underset{(1|1)^2}{S}.x^2 + \underset{(1|1)^4}{S}.x^4 + \underset{(1|1)^6}{S}.x^6$$

und

II. $$\underset{1+x|2}{C} = \underset{1|2}{C} - \frac{\pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2} + \underset{(1|2)^2}{S}.x^2 + \underset{(1|2)^4}{S}.x^4 + \underset{(1\,2)^6}{S}.x^6 + \ldots$$

in welchen, wie man sieht, nur die geraden Potenzen von den entwickelten Gliedern vorkommen, wesshalb von den letzt nur die Hälfte der früheren Anzahl nothwendig ist, um ein Genauigkeit der Rechnung zu erhalten.

## §. 101.

Die Abnahme der Glieder in den Reihen sowohl des §

als auch des §. 100. kann noch dadurch bedeutend befördert werden, wenn man bei jeder einzelnen von den harmonischen Summen $S_{(1|1)^2}$, $S_{(1|1)^3}$, $S_{(1|1)^4}$,.... und $S_{(1|2)^2}$, $S_{(1|2)^3}$, $S_{(1|2)^4}$,.... das erste Glied derselben, welches überall 1 ist, absondert, und die vermöge dieser Absonderung entspringenden Glieder, die zusammen genommen eine geometrische Progression ausmachen, besonders summirt. Auf diese Art erhält man aus II. und III. des §. 99.:

$$\text{I.}\quad C_{1|x1} = C_{1|1} - \frac{x}{1+x} - S_{(2|1)^2}.x + S_{(2|1)^3}.x^2 - S_{(2|1)^4}.x^3 + S_{(2|1)^5}.x^4 - \ldots.$$

und

$$\text{II.}\quad C_{1|x2} = C_{1|2} - \frac{x}{1+x} - S_{(3|2)^2}.x + S_{(3|2)^3}.x^2 - S_{(3|2)^4}.x^3 + S_{(3|2)^5}.x^4 - \ldots.,$$

aus I. und II. des §. 100. hingegen folgt:

$$\text{III.}\quad C_{1|x1} = C_{1|1} + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotang}\pi x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{1-x^2} + S_{(2|1)^3}.x^2 + S_{(2|1)^5}.x^4 + S_{(2|1)^7}.x^6 + \ldots.,$$

$$\text{IV.}\quad C_{1|x2} = C_{1|2} - \frac{\pi}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{1-x^2} + S_{(3|2)^3}.x^2 + S_{(3|2)^5}.x^4 + S_{(3|2)^7}.x^6 + \ldots$$

Hier kommen zwar durchgängig die nämlichen Potenzen von $x$ vor, wie in den entsprechenden Reihen der §§. 99. und 100., hingegen die Koeffizienten jener Potenzen sind hier beträchtlich kleiner als vorher, und nehmen für sich allein betrachtet schneller ab, als in einer geometrischen Progression, deren Quotient bei I. $\frac{1}{3}$, bei II. $\frac{1}{4}$, bei III. $\frac{1}{4}$ und bei IV. $\frac{1}{9}$ beträgt, durch welchen Umstand die ohnehin bereits durch die Werthe von $x$ herbeigeführte Konvergenz weit rascher gemacht wird.

## §. 102.

Bei Betrachtung des im Vorhergehenden angewendeten Absonderungsverfahrens wird man wohl schwerlich zu übersehen im Stande sein, dass in der gleichen Weise noch ferner fortgeschritten werden könne, indem man bei jeder einzelnen harmonischen Summe auch zwei oder beliebig mehrere, nur stets durchgängig in gleicher Anzahl, ihrer ersten Glieder von den übrigen trennt, und die abgesonderten Glieder als geometrische Progressionen summirt. Dadurch erhält man neue Reihen, bei wel-

chen die Koeffizienten der Potenzen von $x$ noch kleiner ausfallen als vorher, und zwar desto rascher abnehmen, je mehrere Glieder man auf solche Art abgesondert behandelt. Da jedoch die Aufstellung der bezüglichen Formeln nicht die geringste Schwierigkeit darbietet, dürfte es wohl überflüssig sein, in eine weitläufigere Auseinandersetzung hierüber einzugehen, sondern vielmehr die eben gegebene Andeutung vollkommen genügen. Nur soll noch der Umstand besonders hervorgehoben werden, dass man bei der gezeigten Trennung der Glieder auch bis an ihre äusserste Gränze vorgehen, d. h., die sämmtlichen einzelnen Glieder aller harmonischen Summen von einander sondern und dann wieder diejenigen aus ihnen, welche die Potenzen von einerlei Zahl im Nenner enthalten, zusammen nehmen und als unendliche geometrische Progressionen summiren könne. Auf diese Art kommen aus den Reihen II. und III. des §. 99. und aus I. und II. des §. 100. folgende Formeln zum Vorscheine:

I. $$\underset{1+x|1}{C} = \underset{1|1}{C} - \frac{x}{1+x} - \frac{x}{2(2+x)} - \frac{x}{3(3+x)} - \frac{x}{4(4+x)} - \frac{x}{5(5+x)} - \ldots,$$

II. $$\underset{1+x|2}{C} = \underset{1|2}{C} - \frac{x}{1+x} - \frac{x}{3(3+x)} - \frac{x}{5(5+x)} - \frac{x}{7(7+x)} - \frac{x}{9(9+x)} - \ldots,$$

III. $$\underset{1+x|1}{C} = \underset{1|1}{C} + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotang}\pi x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^2}{2(2^2-x^2)} + \frac{x^2}{3(3^2-x^2)} + \ldots,$$

IV. $$\underset{1+x|2}{C} = \underset{1|2}{C} - \frac{\pi}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^2}{3(3^2-x^2)} + \frac{x^2}{5(5^2-x^2)} + \frac{x^2}{7(7^2-x^2)} + \ldots$$

Diese Reihen besitzen die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie nicht nur dann konvergiren, wenn $x$ kleiner ist als 1, sondern auch für jeden anderen Werth von $x$, wenn nur diejenigen davon ausgeschlossen bleiben, für welche der Nenner eines der vorkommenden Brüche gleich 0 wird.

Von den hier auf anderem Wege gefundenen Reihen I. und II. wird man sich leicht überzeugen, dass sie eigentlich nur besondere Fälle der Formel III. des §. 25. seien, die sogleich daraus hervorgehen, wenn man $a=1+x$ und entweder $d=1$ oder $d=2$ annimmt.

## §. 103.

Mit Hilfe der im Vorhergehenden aufgestellten Reihen für $\underset{1+x|1}{C}$, und eben so auch jener für $\underset{1+x|2}{C}$ ist man im Stande, die

Werthe der harmonischen Konstanten $\underset{a|d}{C}$ für alle reellen Zahlen $a$ und $d$ in der Regel etwas bequemer zu berechnen, als es durch die Formel III. des §. 10. geschehen kann. Um hiebei nicht weitläufiger als nöthig zu werden, wird es hinreichend sein, die ausgesprochene Behauptung nur rücksichtlich der Reihen für $\underset{1+x|1}{C}$ wirklich nachzuweisen, da diese letzteren zum Gebrauche vollkommen genügen, und man daraus leicht entnehmen wird, auf welche Weise die gleiche Folgerung auch auf die Reihen für $\underset{1+x|1}{C}$ sich ausdehnen lasse.

Durch die für $\underset{1+x|1}{C}$ gefundenen Entwicklungen lassen sich allerdings nur solche harmonische Konstanten $\underset{a|d}{C}$ unmittelbar berechnen, bei welchen $d=1$ ist; überdiess muss, damit die Ausführung der Rechnung nicht zu sehr zeitraubend werde, der numerische Werth von $x$ nicht grösser als $\frac{1}{2}$, folglich $x$ zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$, und daher $a=1+x$ zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ enthalten sein. Es ist aber leicht zu sehen, dass jede harmonische Konstante, welche den eben aufgezählten zwei Bedingungen nicht gleichzeitig entspricht, ohne Schwierigkeit auf eine andere zurückgeführt werden könne, bei welcher die gedachten Bedingungen wirklich eintreffen. Denn erstlich vermag man mittelst der Gleichung

$$\text{I.}\quad \underset{a|d}{C}=\frac{1}{d}\cdot\underset{\frac{a}{d}|1}{C}$$

jede harmonische Konstante, deren Differenz von 1 verschieden sein sollte, sogleich auf eine andere zu bringen, deren Differenz 1 ist.

Ferner hat man vermöge der Formel I. des §. 19., wenn darin $d=1$ und $-m$ anstatt $m$ gesetzt wird,

$$\underset{a|1}{C}=\underset{a-m|1}{C}+\overset{-m}{\underset{a|1}{S}},$$

oder vermöge der in §. 8. festgesetzten Bedeutung subtraktiver Werthe von $m$:

$$\text{II.}\quad \underset{a|1}{C}=\underset{a-m|1}{C}-\overset{m}{\underset{a-m|1}{S}},$$

wo $m$ jede beliebige ganze, übrigens additive oder subtraktive, Zahl bedeuten kann. Hier ist man offenbar, sobald $a$ nicht zwischen den Gränzen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ liegen sollte, stets im Stande, $m$

... Reihe der ersten Ordnung, sondern
...einen unumgänglich nothwendig,
... Reihen, deren allgemeine
...onen der Stellenzahl sind,
... Theile bereits gezeigt wurde
...en wird; überdiess lassen sich
...Werthe einer grossen Anzahl be-
... Bei dem häufigeren Gebrauche
...e Berechnung ungeachtet aller dabei
...n doch immer mühsam und zeitraubend
...e Arbeit sehr bedeutend verkürzen, wenn
...ondere Tafeln berechnen wollte, aus
...zelne harmonische Konstante entweder un-
... oder doch mit leichter Mühe abgeleitet wer-
... hiebei so weit gehen zu wollen, wie diess
... Gauss für die Funktionen $\Gamma z$ und $\Pi z$ wirklich
... soll doch die nachstehende Tafel als eine kleine
... Art dienen, welche trotz ihres geringen Umfanges
...ireicht, um daraus den Werth einer jeden
...schen Konstante $C_{a|d}$, was für reelle Werthe
... und $d$ besitzen mögen, ohne besondere Mühe
...ezimalstellen genau zu finden, wobei höchstens die
Dezimalstelle einer Unsicherheit unterliegen kann, wie diess
...ei anderen siebenstelligen Tafeln in der Regel der Fall ist.

so auszuwählen, dass $a-m$ zwischen eben diesen Gränzen enthalten ist, und auf solche Art die Konstante $C_{a|1}$ auf die andere $C_{a-m|1}$ zurückzuführen, bei welcher letzteren die früher verlangten Bedingungen wirklich zugleich erfüllt sind.

Diese beiden einfachen Gleichungen genügen demnach, um die Anwendung der gefundenen Reihen für $C_{1+x|1}$ bei Berechnung der harmonischen Konstanten auch in allen jenen Fällen wenigstens mittelbar möglich zu machen, in welchen diess, wie früher gesagt wurde, unmittelbar nicht geschehen könnte, weil entweder die Differenz von 1 verschieden ist, oder die Anfangszahl ausser den Gränzen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ liegt.

Hiebei ist es ausführbar, und wird sich auch bald als nützlich erweisen, die so eben für die Anfangszahl $a$ festgesetzten Gränzen noch mehr zu verengen, und sie auf die Hälfte des angegebenen Intervalles zu beschränken. Denn aus der bereits wiederholt zur Anwendung gekommenen Gleichung

$$C_{1-x|1} - C_{1+x|1} = \frac{1}{x} - \pi \operatorname{cotang} \pi x$$

ergibt sich, wenn darin $x = 1-a$, mithin $1-x = a$ und $1+x = 2-a$ gesetzt wird,

$$\text{III.} \quad C_{a|1} = C_{2-a|1} + \frac{1}{1-a} + \pi \operatorname{cotang} a\pi.$$

Sobald nun $a$ zwischen den Gränzen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, muss offenbar $2-a$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 enthalten sein, und umgekehrt, wenn $a$ zwischen den zuletzt bezeichneten Gränzen eingeschlossen ist, wird $2-a$ zwischen den ersteren gelegen sein. Wie man sieht, folgt vermöge dieser Gleichung aus einer jeden harmonischen Konstante, deren Differenz gleich 1 ist und deren Anfangszahl in der einen Hälfte des früheren Intervalles liegt, sogleich eine andere, deren Anfangszahl in der zweiten Hälfte enthalten ist, so dass es genügt, nur die der einen Hälfte zugehörigen harmonischen Konstanten mit Hilfe der vorausgeschickten Reihen zu berechnen, weil daraus die der anderen Hälfte entsprechenden ohne Mühe abgeleitet werden können.

## §. 104.

Die harmonischen Konstanten dienen nicht nur als Hilfszahlen zur Berechnung der Summe einer beliebig grossen Anzahl von

Gliedern einer harmonischen Reihe der ersten Ordnung, sondern ihre Kenntniss ist auch im allgemeinen unumgänglich nothwendig, um alle konvergenten unendlichen Reihen, deren allgemeine Glieder rationale gebrochene Funktionen der Stellenzahl sind, summiren zu können, wie diess zum Theile bereits gezeigt wurde und bald vollständig erwiesen werden wird; überdiess lassen sich mit Hilfe jener Konstanten die Werthe einer grossen Anzahl bestimmter Integrale ausdrücken. Bei dem häufigeren Gebrauche dieser Zahlen, deren einzelne Berechnung ungeachtet aller dabei angebrachter Erleichterungen doch immer mühsam und zeitraubend bleibt, würde man sich die Arbeit sehr bedeutend verkürzen, wenn man für dieselben besondere Tafeln berechnen wollte, aus welchen dann jede einzelne harmonische Konstante entweder unmittelbar entnommen, oder doch mit leichter Mühe abgeleitet werden könnte. Ohne hiebei so weit gehen zu wollen, wie diess Legendre und Gauss für die Funktionen $\Gamma z$ und $\Pi z$ wirklich geleistet haben, soll doch die nachstehende Tafel als eine kleine Probe dieser Art dienen, welche trotz ihres geringen Umfanges dennoch hinreicht, um daraus den Werth einer jeden harmonischen Konstante $C_{a|d}$, was für reelle Werthe auch $a$ und $d$ besitzen mögen, ohne besondere Mühe in 7 Dezimalstellen genau zu finden, wobei höchstens die letzte Dezimalstelle einer Unsicherheit unterliegen kann, wie diess auch bei anderen siebenstelligen Tafeln in der Regel der Fall ist.

## Werthe von $C_{\alpha|1}$.

| $\alpha$ | $C_{\alpha\|1}$ | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,00 | +0,577 2157 | 16 4493 | 1202 | 11 |
| 1,01 | +0,560 8855 | 16 2121 | 1170 | 10 |
| 1,02 | +0,544 7893 | 15 9812 | 1139 | 10 |
| 1,03 | +0,528 9211 | 15 7562 | 1110 | 10 |
| 1,04 | +0,513 2749 | 15 5371 | 1081 | 9 |
| 1,05 | +0,497 8450 | 15 3236 | 1054 | 9 |
| 1,06 | +0,482 6259 | 15 1154 | 1028 | 9 |
| 1,07 | +0,467 6124 | 14 9125 | 1002 | 8 |
| 1,08 | +0,452 7993 | 14 7145 | 977 | 8 |
| 1,09 | +0,438 1818 | 14 5214 | 954 | 8 |
| 1,10 | +0,423 7549 | 14 3330 | 931 | 8 |
| 1,11 | +0,409 5143 | 14 1491 | 909 | 7 |
| 1,12 | +0,395 4553 | 13 9695 | 887 | 7 |
| 1,13 | +0,381 5738 | 13 7942 | 866 | 7 |
| 1,14 | +0,367 8656 | 13 6229 | 846 | 7 |
| 1,15 | +0,354 3267 | 13 4556 | 827 | 6 |
| 1,16 | +0,340 9532 | 13 2921 | 808 | 6 |
| 1,17 | +0,327 7413 | 13 1323 | 790 | 6 |
| 1,18 | +0,314 6874 | 12 9760 | 772 | 6 |
| 1,19 | +0,301 7881 | 12 8232 | 755 | 6 |
| 1,20 | +0,289 0399 | 12 6738 | 739 | 5 |
| 1,21 | +0,276 4395 | 12 5276 | 723 | 5 |
| 1,22 | +0,263 9837 | 12 3845 | 708 | 5 |
| 1,23 | +0,251 6694 | 12 2445 | 693 | 5 |
| 1,24 | +0,239 4937 | 12 1075 | 678 | 5 |
| 1,25 | +0,227 4535 | 11 9733 | 664 | 5 |
| 1,26 | +0,215 5462 | 11 8419 | 650 | 4 |
| 1,27 | +0,203 7688 | 11 7132 | 637 | 4 |
| 1,28 | +0,192 1189 | 11 5871 | 624 | 4 |
| 1,29 | +0,180 5937 | 11 4636 | 611 | 4 |
| 1,30 | +0,169 1909 | 11 3425 | 599 | 4 |
| 1,31 | +0,157 9079 | 11 2239 | 587 | 4 |
| 1,32 | +0,146 7424 | 11 1076 | 576 | 4 |
| 1,33 | +0,135 6920 | 10 9935 | 565 | 4 |
| 1,34 | +0,124 7546 | 10 8816 | 554 | 4 |
| 1,35 | +0,113 9280 | 10 7719 | 543 | 3 |
| 1,36 | +0,103 2101 | 10 6643 | 533 | 3 |
| 1,37 | +0,092 5987 | 10 5587 | 523 | 3 |
| 1,38 | +0,082 0920 | 10 4551 | 513 | 3 |
| 1,39 | +0,071 6879 | 10 3534 | 504 | 3 |
| 1,40 | +0,061 3845 | 10 2536 | 495 | 3 |
| 1,41 | +0,051 1801 | 10 1556 | 486 | 3 |
| 1,42 | +0,041 0728 | 10 0593 | 477 | 3 |
| 1,43 | +0,031 0609 | 9 9648 | 468 | 3 |
| 1,44 | +0,021 1427 | 9 8720 | 460 | 3 |
| 1,45 | +0,011 3164 | 9 7808 | 452 | 3 |
| 1,46 | +0,001 5806 | 9 6912 | 444 | 3 |
| 1,47 | —0,008 0665 | 9 6032 | 436 | 3 |
| 1,48 | —0,017 6263 | 9 5166 | 429 | 2 |
| 1,49 | —0,027 1003 | 9 4316 | 422 | 2 |
| 1,50 | —0,036 4900 | 9 3480 | 414 | 2 |

Es verdient angemerkt zu werden, dass die in dieser Tafel enthaltenen harmonischen Konstanten, so wie auch die zur Interpolation dienlichen Zahlen *A*, *B*, *C* ursprünglich auf 10 Dezimalstellen berechnet und dann erst die 3 letzten von ihnen auf gehörige Weise weggelassen worden sind, um hiedurch für die letzte beibehaltene Ziffer grössere Sicherheit zu erlangen.

## §. 105.

Damit man die Regeln, nach welchen bei dem Gebrauche dieser Tafel zu verfahren ist, im Zusammenhange vor Augen habe, und es zweckmässig sein, sie in kurzer Fassung hieher zu setzen.

1. Vor allem Anderen sehe man darauf, ob bei der zu bestimmenden Konstante die Differenz gleich 1 oder hievon verschieden ist? Im letzteren Falle reduzire man durch die Formel I. des §. 103. die Konstante auf die Differenz 1.
2. Ferner beachte man, ob die nunmehrige Anfangszahl zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ enthalten sei oder ausser denselben liege? Im letzteren Falle bediene man sich der Formel II. des §. 103., um die Konstante auf eine andere zurückzuführen, deren Anfangszahl wirklich zwischen den angegebenen Grenzen eingeschlossen ist.
3. Sollte vielleicht nunmehr die Anfangszahl zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen, so bringe man durch die Gleichung III. des §. 103. die Konstante auf eine andere, deren Anfangszahl zwischen 1 und $\frac{3}{2}$ enthalten ist.
4. Nach geschehener Vornahme dieser Verwandlungen, in so weit dieselben für nöthig befunden wurden, drücke man die Anfangszahl als einen Dezimalbruch mit höchstens 7 Stellen aus, und suche vorläufig die ganze sammt den 2 ersten Dezimal-Stellen in der mit *a* überschriebenen ersten Spalte der Tafel auf, wo man dieselben auch gewiss antreffen wird. Unmittelbar daneben in der mit $C_{a,1}$ überschriebenen zweiten Spalte steht dann der siebenstellige Werth derjenigen harmonischen Konstante, welche den nachgesuchten und gefundenen ersten Stellen entspricht, die 3 übrigen Spalten enthalten in der gleichen Zeile die zugehörigen Werthe der Hilfszahlen *A*, *B* und *C*.
5. Sind nun ausser den auf solche Art bereits berücksich-

tigten noch mehrere spätere Dezimalstellen vorhand
so betrachte man dieselben, mit Vorsetzung von 0
ganzer Stelle, wie einen für sich bestehenden Dezim
bruch, welcher der Kürze wegen mit $x$ bezeichnet w
den mag; multiplizire den nach 4. gefundenen Werth v
$C$ mit $x$, ziehe dieses Produkt von $B$ ab, multipli
den Rest abermals mit $x$, ziehe das Produkt von $A$
und multiplizire nochmals mit $x$ unter Beseitigung d
hiebei etwa erhaltenen Dezimalstellen.

6. Die auf solche Art zum Vorscheine kommende Za
muss noch von den Dezimalstellen der vermöge der R
gel 4. aus der Tafel gefundenen Konstante entwed
abgezogen oder zu denselben addirt werden, j
nachdem diese Konstante in der Tafel des Zeichen
oder — vor sich trägt. Hiedurch erhält man die z
vollständigen Anfangszahl, mit welcher man nach
in die Tafel eingetreten ist, gehörige harmonische Kon
stante, aus welcher dann nach Massgabe der nach 1., 2
und 3. vorgenommenen Umwandlungen durch die Formel
des §. 103. die eigentlich gesuchte harmonische Kon
stante leicht abgeleitet wird.

Die so eben unter 4., 5. und 6. aufgestellten Regeln lasse
eine kleine Abänderung zu, welche von einem nicht ungeübte
Rechner, und einen solchen darf man hier wohl nicht voraus
setzen, zuweilen mit Vortheil gebraucht werden kann. Es i
nämlich zulässig, anstatt derjenigen Werthe von $\underset{a|1}{C}$, $A$, $B$,
welche in einem gegebenen Falle nach der Regel 4. aus der T
fel entnommen werden sollten, beziehungsweise diejenigen Zahl
anzuwenden, die in den Spalten der Tafel unmittelbar unter d
früheren stehen, d. h. diejenigen, welche zur nächst grösseren
der Tafel vorkommenden Anfangszahl gehören. Will man die
thun, so muss anstatt des in 5. angegebenen Werthes von $x$ d
Ergänzung desselben zu 1, nämlich $1-x$, genommen und n
dieser Zahl die eben dort vorgeschriebenen Multiplikationen v
richtet, die einzelnen Produkte aber überall addirt werden, w
in 5. die Subtraktion angeordnet wurde. Das letzte auf die
Art sich ergebende Produkt ist dann zu den Dezimalstellen d
aus der Spalte $\underset{a|1}{C}$ entnommenen Zahl zu addiren, wenn letztere d
Zeichen + vor sich hat, im entgegengesetzten Falle hingegen
subtrahiren.

Man wird wohl leicht erkennen, dass dieses abgeänderte Ve
fahren vorzüglich dann einigen Nutzen zu gewähren geeignet se

wenn $x > \frac{1}{2}$ und nahe bei 1, folglich $1-x < \frac{1}{2}$ sein und nahe bei 0 liegen sollte, obwohl es auch in allen anderen Fällen angewendet werden darf.

## §. 106.

Um den Gebrauch der gegebenen Anweisungen vollkommen klar zu machen, soll hier noch ein ganz ausgearbeitetes Beispiel hinzugefügt werden von solcher Art, dass dabei nicht nur die sämmtlichen Regeln des §. 105. zur Anwendung kommen, sondern man zugleich mittelst der früher bereits ausgeführten Rechnungen leicht im Stande ist, die Richtigkeit des Resultates zu konstatiren.

Sei demnach der Werth der harmonischen Konstante $C_{8|3}$ mittelst der Tafel des §. 104. zu bestimmen. Vermöge der Regel 1. des §. 105., da hier die Differenz von 1 verschieden ist, ergibt sich zuerst durch die Formel I. des §. 103.:

$$C_{8|3} = \tfrac{1}{3} . C_{\frac{8}{3}|1} .$$

Die nunmehrige Anfangszahl $\frac{8}{3}$ liegt nicht zwischen den Gränzen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$. Man muss daher vermöge der Regel 2. die Formel II. des §. 103. anwenden, indem man darin $m=2$ annimmt. Dadurch erhält man:

$$C_{\frac{8}{3}|1} = C_{\frac{2}{3}|1} - \overset{2}{S} = C_{\frac{2}{3}|1} - \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{5} = C_{\frac{2}{3}|1} - \tfrac{31}{10} .$$

Da die jetzige Anfangszahl zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 enthalten ist, hat man noch vermöge der Regel 3. des §. 105. die Formel III. des §. 103. zur Anwendung zu bringen, wodurch sich

$$C_{\frac{2}{3}|1} = C_{\frac{4}{3}|1} + \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \pi \operatorname{cotang} \frac{2\pi}{3} = C_{\frac{4}{3}|1} + 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} ,$$

und durch die Substitution der beiden letzten Werthe in dem ersten

$$C_{8|3} = \tfrac{1}{3} . C_{\frac{4}{3}|1} + \frac{3}{10} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

ergibt. Jetzt erst sind bei der Konstante $C_{\frac{4}{3}|1}$ alle Bedingungen zur Anwendung der Tafel des §. 104. vorhanden, daher erstere unmittelbar aus der letzteren bestimmt werden kann. Zu diesem Zwecke hat man vermöge der Regel 4. des §. 105.:

$$\tfrac{4}{3} = 1{,}3333333,$$

folglich ist $a = 1{,}33$, und man findet in der Tafel die Zahlen:

$$\underset{1,33|1}{C} = +0{,}1356920, \quad A = 109935, \quad B = 565, \quad C = 4.$$

Nach der Regel 5. des §. 105. ist ferner $x = 0{,}33333$, daher erhält man durch Ausführung der dort ertheilten Vorschriften:

$$C.x = 1, \quad B - Cx = 564, \quad (B - Cx).x = 188,$$
$$A - (B - Cx)x = 109747, \quad (A - (B - Cx)x).x = 36582.$$

Endlich ergibt sich vermöge der Regel 6. des §. 105.:

$$\underset{1,33|1}{C} = 0{,}1356920,$$

hievon abgezogen $\qquad 36582$

verbleibt $\quad \underset{\frac{4}{3}|1}{C} = 0{,}1320338,$

und wenn dieser Werth in dem früher für $\underset{8|3}{C}$ aufgestellten substituirt und zugleich $\frac{\pi\sqrt{3}}{9} = 0{,}6045998$ entwickelt wird, findet man:

$$\underset{8|3}{C} = 0{,}0440113 + 0{,}3 - 0{,}6045998 = -0{,}2605885.$$

Dasselbe Resultat, und zwar bis einschliesslich zur letzten Dezimalstelle genau, erhält man auch, wenn in der Gleichung

$$\underset{8|3}{C} = \underset{2|3}{C} - \overset{2}{\underset{2|3}{S}} = \underset{2|3}{C} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} = \underset{2|3}{C} - \tfrac{7}{15}$$

anstatt $\underset{2|3}{C}$ der bereits in §. 33. gefundene Werth gesetzt wird.

Wollte man sich bei diesem Beispiele des am Schlusse des §. 105. angeführten etwas abgeänderten Verfahrens bedienen, was aber, weil hier $x < \frac{1}{2}$ und daher $1 - x > \frac{1}{2}$ ist, in Wirklichkeit nicht zu empfehlen wäre, so würde sich die Rechnung in folgender Weise herausstellen. Man findet in der Tafel bei $a = 1{,}34$ die Werthe

$$\underset{1,34|1}{C} = +0{,}1247546, \quad A = 108816, \quad B = 554, \quad C = 4.$$

Ferner ist $1 - x = 0{,}66667$, was mit $C = 4$ multiplizirt nach Weglassung der Dezimalstellen das Produkt 3 und zu $B$ addirt die Summe 557 gibt; durch Multiplikation dieser Zahl mit $1 - x$ erhält man 371, dann durch Addition zu $A$ die Summe 109187 und

durch nochmalige Multiplikation mit $1-x$ das Produkt 72791, welches zu $\underset{1,34|1}{C}$ addirt den Werth $\underset{\frac{1}{3}|1}{C} = 0{,}1320337$ ergibt.

Man sieht wohl, dass dieser Werth von der früheren Bestimmung nur um 1 in der letzten Dezimalstelle abweicht, eine Unsicherheit, deren Vorhandensein in §. 104. bereits im allgemeinen angedeutet wurde, und welche hier insbesondere, wie man sich durch eine schärfere Berechnung von $\underset{\frac{1}{3}|1}{C}$ überzeugt, davon herrührt, dass der wahre Werth dieser Konstante eigentlich zwischen den beiden gefundenen Zahlen eingeschlossen ist.

Das von §. 99. angefangen bis hieher Vorgetragene enthält mit Hinzufügung einer sogleich nachfolgenden Bemerkung die bereits in §. 83. in Aussicht gestellte Ergänzung der Lehre von den harmonischen Reihen der ersten Ordnung.

## §. 107.

Werden die sämmtlichen Glieder der harmonischen Reihe

$$\underset{(a+x|d)^r}{S^n} = \frac{1}{(a+x)^r} + \frac{1}{(a+x+d)^r} + \frac{1}{(a+x+2d)^r} + \ldots + \frac{1}{(a+x+(n-1)d)^r}$$

oder

$$\underset{(a+x|d)^r}{S^n} = (a+x)^{-r} + (a+d+x)^{-r} + (a+2d+x)^{-r} + \ldots + (a+(n-1)d+x)^{-r}$$

vermöge des binomischen Lehrsatzes nach den Potenzen von $x$ entwickelt und dann wieder die in Bezug auf $x$ gleichartigen Glieder abgekürzt, so ergibt sich sogleich:

$$\text{I.}\quad \underset{(a+x|d)^r}{S^n} = \underset{(a|d)^r}{S^n} - \binom{r}{1}\cdot \underset{(a|d)^{r+1}}{S^n}\cdot x + \binom{r+1}{2}\cdot \underset{(a|d)^{r+2}}{S^n}\cdot x^2 - \binom{r+2}{3}\cdot \underset{(a|d)^{r+3}}{S^n}\cdot x^3 + \ldots.$$

Wird ferner hierin $a=1$ und entweder $d=1$ oder $d=2$ gesetzt, so erhält man für diese einfacheren Fälle die Formeln:

$$\text{II.}\quad \underset{(1+x|1)^r}{S^n} = \underset{(1|1)^r}{S^n} - \binom{r}{1}\cdot \underset{(1|1)^{r+1}}{S^n}\cdot x + \binom{r+1}{2}\cdot \underset{(1|1)^{r+2}}{S^n}\cdot x^2 - \binom{r+2}{3}\cdot \underset{(1|1)^{r+3}}{S^n}\cdot x^3 + \ldots.$$

und

$$\text{III.}\quad \overset{n}{S}_{(1+x|2)^r} = \overset{n}{S}_{(1|2)^r} - \binom{r}{1}\cdot \overset{n}{S}_{(1|2)^{r+1}}\cdot x + \binom{r+1}{2}\cdot \overset{n}{S}_{(1|2)^{r+2}}\cdot x^2 - \binom{r+2}{3}\cdot \overset{n}{S}_{(1|2)^{r+3}}\cdot x^3 + \ldots.$$

Offenbar könnten diese Formeln zur Berechnung der Werthe von $\overset{n}{S}_{(a+x|d)^r}$ und insbesondere von $\overset{n}{S}_{(1+x|1)^r}$ und $\overset{n}{S}_{(1+x|2)^r}$ dienen, wenn die harmonischen Summen $\overset{n}{S}_{(a|d)^r}$, $\overset{n}{S}_{(a|d)^{r+1}}$, $\overset{n}{S}_{(a|d)^{r+2}}$, .... $\overset{n}{S}_{(1|1)^r}$, $\overset{n}{S}_{(1|1)^{r+1}}$, $\overset{n}{S}_{(1|1)^{r+2}}$, .... oder $\overset{n}{S}_{(1|2)^r}$, $\overset{n}{S}_{(1|2)^{r+1}}$, $\overset{n}{S}_{(1|2)^{r+2}}$, .... als bereits bekannt angenommen werden dürfen, was freilich für bestimmte Werthe von $n$ nur höchst selten der Fall sein wird.

Noch muss man hiebei bemerken, dass die vorstehenden Entwickelungen stets ihre Richtigkeit beibehalten, welche Zahl auch darin für r angenommen werden mag; sie gelten daher nicht nur für die harmonischen Reihen höherer Ordnungen, sondern zugleich für jene der ersten Ordnung.

## §. 108.

Nimmt man in den Gleichungen des §. 107. $n = \infty$ an, so gehen dieselben in

$$\text{I.}\quad S_{(a+x|d)^r} = S_{(a|d)^r} - \binom{r}{1}\cdot S_{(a|d)^{r+1}}\cdot x + \binom{r+1}{2}\cdot S_{(a|d)^{r+2}}\cdot x^2 - \binom{r+2}{3}\cdot S_{(a|d)^{r+3}}\cdot x^3 + \ldots.,$$

$$\text{II.}\quad S_{(1+x|1)^r} = S_{(1|1)^r} - \binom{r}{1}\cdot S_{(1|1)^{r+1}}\cdot x + \binom{r+1}{2}\cdot S_{(1|1)^{r+2}}\cdot x^2 - \binom{r+2}{3}\cdot S_{(1|1)^{r+3}}\cdot x^3 + \ldots.$$

$$\text{III.}\quad S_{(1+x|2)^r} = S_{(1|2)^r} - \binom{r}{1}\cdot S_{(1|2)^{r+1}}\cdot x + \binom{r+1}{2}\cdot S_{(1|2)^{r+2}}\cdot x^2 - \binom{r+2}{3}\cdot S_{(1|2)^{r+3}}\cdot x^3 + \ldots.$$

über, wo wenigstens bei den zwei letzteren die Werthe der sämmtlichen Koeffizienten wirklich bereits bekannt sind. Diese Formeln, welche wegen der Divergenz aller unendlichen harmonischen Reihen der ersten Ordnung für diese nicht, sondern nur für alle höheren Ordnungen gelten, sind offenbar den in §. 99. für die harmonischen Konstanten aufgestellten genau entsprechend und hätten sich auch aus diesen letzteren auf dem in §. 86. angegebenen Wege ganz leicht ableiten lassen. Dabei ist ferner in die Augen fallend, dass das nämliche Verfahren auch auf die in den §§. 100, 101. und 102. aus jenen des §§. 99. hergeleiteten Gleichungen angewendet und auf solche Art noch mehrere andere für die harmonischen Reihen höherer Ordnungen giltige Ausdrücke gefunden werden können. Diess ist so einleuchtend und zugleich in der Ausführung so leicht, dass es vollkommen genügen wird, nur die Resultate dieser Verwandlungen hieher zu setzen, ohne nöthig zu haben, in die Einzelheiten der Herleitung genauer einzugehen. Nur die Bemerkung darf dabei nicht übersehen werden, dass bei jenen Reihen, in welchen nicht die sämmtlichen, sondern nur einige, insbesondere die geraden Potenzen von $x$ vorkommen, wie diess in einigen der vorhin angedeuteten Reihen der Fall ist, das Ergebniss der Differenzirungen eine etwas verschiedene Form annimmt, je nachdem die Anzahl der Differenzirungen eine gerade oder ungerade ist. Es wird desshalb bei solchen Reihen zweckmässig sein, diese beiden Fälle von einander zu trennen, und durch abgesonderte Formeln darzustellen, während diess bei anders beschaffenen Reihen nicht nothwendig ist.

Mit Berücksichtigung dieses Umstandes ergeben sich aus den 2 Gleichungen des §. 100. folgende 4 Formeln für die harmonischen Reihen höherer Ordnungen:

$$\text{IV.}\quad \underset{(1+x|1)^{2r}}{S} = -\frac{\pi\partial^{2r-1}\operatorname{cotang}\pi x}{2.(2r-1)!\,\partial x^{2r-1}} - \frac{1}{2x^{2r}} - \binom{2r}{1}.\underset{(1|1)^{2r+1}}{S}.x - \binom{2r+2}{3}.\underset{(1|1)^{2r+3}}{S}.x^3 - \ldots,$$

$$\text{V.}\quad \underset{(1+x|1)^{2r+1}}{S} = \frac{\pi\partial^{2r}\operatorname{cotang}\pi x}{2.(2r)!\,\partial x^{2r}} - \frac{1}{2x^{2r+1}} + \underset{(1|1)^{2r+1}}{S} + \binom{2r+2}{2}.\underset{(1|1)^{2r+3}}{S}.x^2 + \binom{2r+4}{4}.\underset{(1|1)^{2r+5}}{S}.x^4 + \ldots,$$

VI. $$\underset{(1+x|2)^{2r}}{S} = \frac{\pi\partial^{2r-1}\tang\frac{\pi x}{2}}{4.(2r-1)!\,\partial x^{2r-1}} - \binom{2r}{1}.\underset{(1|2)^{2r+1}}{S}.x - \binom{2r+2}{3}.\underset{(1|2)^{2r+3}}{S}.x^3 - \binom{2r+4}{5}.\underset{(1|2)^{2r+5}}{S}.x^5 - \ldots,$$

VII. $$\underset{(1+x|2)^{2r}|1}{S} = -\frac{\pi\partial^{2r}\tang\frac{\pi x}{2}}{4.(2r)!\,\partial x^{2r}} + \underset{(1|2)^{2r+1}}{S} + \binom{2r+2}{2}.\underset{(1|2)^{2r+3}}{S}.x^2 + \binom{2r+4}{4}.\underset{(1|2)^{2r+5}}{S}.x^4 + \ldots$$

Eben so erhält man aus den Formeln des §. 101. folgende neue:

VIII. $$\underset{(1+x|1)^r}{S} = \frac{1}{(1+x)^r} + \underset{(2|1)^r}{S} - \binom{r}{1}.\underset{(2|1)^{r+1}}{S}.x + \binom{r+1}{2}.\underset{(2|1)^{r+2}}{S}.x^2 - \binom{r+2}{3}.\underset{(2|1)^{r+3}}{S}.x^3 + \ldots,$$

IX. $$\underset{(1+x|2)^r}{S} = \frac{1}{(1+x)^r} + \underset{(3|2)^r}{S} - \binom{r}{1}.\underset{(3|2)^{r+1}}{S}.x + \binom{r+1}{2}.\underset{(3|2)^{r+2}}{S}.x^2 - \binom{r+2}{3}.\underset{(3|2)^{r+3}}{S}.x^3 + \ldots,$$

X. $$\underset{(1+x|1)^{2r}}{S} = -\frac{\pi\partial^{2r-1}\cotang\pi x}{2.(2r-1)!\,\partial x^{2r-1}} - \frac{1}{2x^{2r}} - \frac{1}{2(1-x)^{2r}} + \frac{1}{2(1+x)^{2r}} - \binom{2r}{1}.\underset{(2|1)^{2r+1}}{S}.x - \binom{2r+2}{3}.\underset{(2|1)^{2r+3}}{S}.x^3 - \ldots,$$

XI. $$\underset{(1+x|1)^{2r+1}}{S} = \frac{\pi\partial^{2r}\cotang\pi x}{2.(2r)!\,\partial x^{2r}} - \frac{1}{2x^{2r+1}} + \frac{1}{2(1-x)^{2r+1}} + \frac{1}{2(1+x)^{2r+1}} + \underset{(2|1)^{2r+1}}{S} + \binom{2r+2}{2}.\underset{(2|1)^{2r+3}}{S}.x^2 + \ldots$$

XII. $$\underset{(1+x|2)^{2r}}{S} = \frac{\pi\partial^{2r-1}\tang\frac{\pi x}{2}}{4.(2r-1)!\,\partial x^{2r-1}} - \frac{1}{2(1-x)^{2r}} + \frac{1}{2(1+x)^{2r}} - \binom{2r}{1}.\underset{(3|2)^{2r+1}}{S}.x - \binom{2r+2}{3}.\underset{(3|2)^{2r+3}}{S}.x^3 + \ldots,$$

III. $$\underset{(1+x|2)^{2r+1}}{S} = -\frac{\pi\partial^{2r}\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2}}{4.(2r)!\,\partial x^{2r}} + \frac{1}{2(1-x)^{2r+1}} + \frac{1}{2(1+x)^{2r+1}}$$
$$+ \underset{(3|2)^{2r+1}}{S} + \binom{2r+2}{2}\cdot \underset{(3|2)^{2r+3}}{S}\cdot x^2 + \ldots,$$

Was endlich die Gleichungen des §. 102. anbelangt, so wird man, wenn man sie dem Verfahren des §. 86. unterwirft, sich leicht überzeugen, dass daraus nur entweder identische oder doch solche Gleichungen für die harmonischen Reihen höherer Ordnungen hervorgehen, welche nur einfache Folgerungen aus §. 87. enthalten, wesshalb es überflüssig wäre, sie hier noch besonders anzuführen.

## §. 109.

Es wird kaum der Erinnerung bedürfen, dass von den so eben aufgestellten Formeln derselbe Gebrauch und zwar ganz in der nämlichen Weise zur Berechnung der harmonischen Summen gemacht werden könne, wie diess vorhin von den Gleichungen der §§. 99., 100. und 101. in Bezug auf die harmonischen Konstanten gezeigt worden ist, ohne dass es nöthig sein wird, das bereits Gesagte hier zu wiederholen. Ferner ist klar, dass auch für die harmonischen Summen, oder doch wegen ihres häufigeren Vorkommens wenigstens für die niedrigsten Ordnungen derselben besondere Tafeln berechnet werden könnten, aus welchen dann die Werthe in allen Fällen mit grösserer Leichtigkeit sich würden entnehmen lassen, als es durch unmittelbare Bestimmung aus Reihen möglich ist. Solche Tafeln brauchen für jede einzelne Ordnung keinen grösseren Umfang zu besitzen, als die in §. 104. für die harmonischen Konstanten enthaltene, weil aus den 3 Gleichungen des §. 103. durch mehrmaliges Differenziren derselben sich leicht andere ergeben, durch welche man in den Stand gesetzt wird, jede harmonische Summe mit reeller Anfangszahl und Differenz auf die Differenz 1 und eine Anfangszahl, die zwischen 1,00 und 1,50 liegt, zurück zu führen, wenn sie diese Beschaffenheit nicht ohnehin besitzt. Da jedoch die gegenwärtige Abhandlung bereits eine weit grössere Ausdehnung erlangt hat, als beim Beginn der Arbeit vermuthet wurde, soll auf eine nähere Auseinandersetzung dieses Gegenstandes nicht weiter eingegangen, sondern sogleich der Gebrauch der harmonischen Summen bei der Summirung unendlicher Reihen gezeigt werden.

## §. 110.

Aus dem bereits angeführten Umstande, dass jede harmonische, einer höheren als der ersten Ordnung angehörige unendliche Reihe stets konvergent sei, und daher eine bestimmte endliche Summe besitze, mit alleiniger Ausnahme des Falles, wenn unter den Gliedern eines vorkommt, dessen Nenner gleich 0 ist, von welchem Falle aber hier nicht weiter gehandelt zu werden braucht, weil das Nöthigste darüber bereits früher beigebracht wurde, folgt unmittelbar, dass jede aus einer endlichen Anzahl von harmonischen Reihen höherer Ordnungen, nach Multiplikation derselben mit beliebigen Faktoren durch Zusammenziehung ihrer gleichvielten Glieder entspringende neue unendliche Reihe nothwendig eine endliche Summe besitzen und daher konvergent sein müsse, ohne dass es hiezu der Erfüllung irgend einer besonderen Bedingung bedarf.

Anders verhält es sich, wenn unter den harmonischen Reihen, aus welchen durch Zusammenziehung der Glieder eine neue Reihe gebildet werden soll, auch solche der ersten Ordnung sich befinden. Denn in diesem Falle kann offenbar die neue Reihe nur dann eine endliche Summe haben, wenn den sämmtlichen vorhandenen harmonischen Reihen der ersten Ordnung für sich allein, jedoch im Zusammenhange unter einander genommen, eine eben solche Summe zukommt und folglich die Faktoren derselben der Bedingungsgleichung des §. 48. Genüge leisten. Zugleich ist bei dem wirklichen Eintritte dieser Bedingung gewiss, dass die neue Reihe eine endliche Summe haben müsse, weil sie dann aus einer endlichen Anzahl von endlichen Summen besteht. Hieraus ergibt sich der Satz: Jede aus mehreren harmonischen Reihen, welchen Ordnungen dieselben auch angehören mögen, durch Multiplikation mit beliebigen Faktoren und Zusammenziehen ihrer gleichvielten Glieder entspringende neue unendliche Reihe besitzt eine endliche Summe oder nicht, jenachdem die Faktoren der darunter befindlichen Reihen der ersten Ordnung der Bedingungsgleichung des §. 48. entsprechen oder nicht entsprechen.

In dem eben bezeichneten letzten Falle kann selbsverständlich von Aufsuchung einer Summe, die es nicht gibt, auch nicht weiter die Rede sein. Tritt hingegen der erste der beiden angezeigten Fälle wirklich ein, d. h., leisten die Faktoren aller vor-

n Reihen der ersten Ordnung der Bedin-
Genüge, dann ist es jederzeit leicht,
deten unendlichen Reihe da-
n die Summe der aus den
für sich allein genom-
lichen Reihe nach Anlei-
und noch die harmonischen
s vorkommenden Reihen höhe-
en ihnen zugehörigen Faktoren
zufügt.

eiden einfachen Gesetze werden sowohl die
eichnet, in welchen die Summirung der Reihe
ls auch die Summe selbst, sobald es eine solche
ch gefunden.

## §. 111.

Auf dem nämlichen Wege, welcher in §. 48. bei den harmonischen Reihen der ersten Ordnung eingeschlagen wurde, überzeugt man sich, dass das allgemeine Glied einer aus harmonischen Reihen überhaupt, welchen Ordnungen dieselben auch angehören mögen, durch Zusammenziehung ihrer gleichvielten Glieder nach §. 47. hervorgehenden Reihe nothwendig eine rationale gebrochene echte Funktion der Stellenzahl $n$ sein müsse und umgekehrt, dass jede Reihe, deren allgemeines Glied eine eben solche Funktion von $n$ wirklich ist, aus der Zusammenziehung der Glieder mehrerer harmonischen Reihen nach §. 47. entstanden gedacht werden könne, und man im letzteren Falle die allgemeinen Glieder der einzelnen Reihen, welche, und zugleich den Faktor, mit welchem jede einzelne von ihnen in die Zusammenziehung einzutreten hat, ohne Schwierigkeit aus dem allgemeinen Gliede der gegebenen Reihe durch Zerlegung desselben in Partialbrüche finden werde.

Ferner ist bereits ebendort angeführt worden, dass unendliche Reihen, deren allgemeine Glieder rationale gebrochene Funktionen von $n$ sind, konvergent oder divergent sind und zugleich endliche Summen besitzen oder nicht, jenachdem der Zähler um wenigstens 2 Grade niedriger ist, als der Nenner, oder nicht.

Wird nun eine unendliche Reihe gegeben, deren allgemeines Glied eine rationale gebrochene Funktion von $n$ und zugleich der

Zähler um wenigstens 2 Grade niedriger ist als der Nenner, und entwickelt man daraus durch Zerlegung in Partialbrüche die einzelnen harmonischen Reihen, aus welchen die gegebene durch das Zusammenziehen der gleichvielten Glieder nach §. 47. entstanden vorgestellt werden kann, so ist leicht einzusehen, dass die Faktoren der darunter befindlichen Reihen der ersten Ordnung nothwendig der Bedingungsgleichung des §. 48. Genüge leisten müssen. Denn im entgegengesetzten Falle könnte die aus diesen letzteren Reihen, für sich allein genommen, entstehende unendliche Reihe und folglich auch die gegebene Reihe keine endliche Summe haben, was doch vermöge der vorausgesetzten Beschaffenheit der letzteren in Folge des eben vorhin Angeführten gewiss der Fall ist. Hieraus folgt, dass unter den angenommenen Voraussetzungen die in dem ersten Satze des §. 110. ausgesprochene Bedingung, unter welcher die Summirung der Reihe nach Anleitung des ebendort enthaltenen zweiten Gesetzes ausgeführt werden kann, jederzeit eintrifft, d.h., dass jede unendliche Reihe, deren allgemeines Glied eine rationale gebrochene Funktion von $n$ und zugleich der Zähler um wenigstens 2 Grade niedriger ist als der Nenner, durch Zerlegung in Partialbrüche nach §. 110. sich summiren lasse.

Dieser höchst einfache Satz besitzt eine grosse Wichtigkeit, weil in ihm eigentlich die gesammte Lehre von der Summirung jener unendlichen Reihen sich konzentrirt, deren allgemeine Glieder rationale Funktionen von $n$ sind. Denn da jede rationale Funktion von $n$ entweder eine ganze oder gebrochene ist; aus einer Funktion der ersten Art aber niemals eine konvergente unendliche Reihe entspringen kann und aus einer der anderen Art nur dann, wenn die in dem vorigen Satze ausgesprochenen Bedingungen eintreffen, so ist klar, dass jede unendliche Reihe mit einem rationalen allgemeinen Gliede entweder nach dem obigen Satze sich summiren lässt, oder gar nicht summirt werden kann.

## §. 112.

Um die Leichtigkeit, mit welcher die aufgestellten Regeln sich in Ausführung bringen lassen, recht deutlich vor Augen zu legen, möge es gestattet sein, zwei nicht besonders weitläufige Beispiele darnach auszuarbeiten.

Sei zuerst die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1^2.2^2.3^2}+\frac{1}{4^2.5^2.6^2}+\frac{1}{7^2.8^2.9^2}+\frac{1}{10^2.11^2.12^2}+\cdots\cdots,$$

zur Summirung vorgelegt. Das allgemeine Glied derselben ist:

$$\frac{1}{(3n-2)^2.(3n-1)^2.(3n)^2},$$

wobei man sogleich sieht, dass die Bedingungen zur Summirbarkeit der Reihe nach §. 111. wirklich vorhanden sind. Zerlegt man diesen Bruch in die Partialbrüche, so geht derselbe in

$$-\frac{\frac{3}{4}}{3n-2}+\frac{\frac{1}{36}}{n}+\frac{\frac{1}{4}}{(3n-2)^2}+\frac{1}{(3n-1)^2}+\frac{\frac{1}{36}}{n^2}$$

über, woraus man erkennt, dass die vorgelegte Reihe aus den fünf harmonischen Reihen

$$\underset{1|3}{S},\quad \underset{1|1}{S},\quad \underset{(1|3)^2}{S},\quad \underset{(2|3)^2}{S},\quad \underset{(1|1)^2}{S}$$

beziehungsweise multiplizirt mit den Faktoren

$$-\tfrac{3}{4},\quad \tfrac{1}{4},\quad \tfrac{1}{4},\quad 1,\quad \tfrac{1}{36}$$

durch Zusammenziehen ihrer gleichvielten Glieder nach §. 47. entstanden gedacht werden könne. Die Summe der aus den beiden Reihen der ersten Ordnung für sich allein genommen entspringenden unendlichen Reihe findet man vermöge §. 49.:

$$-\frac{3}{4}.\underset{1|3}{C}+\frac{1}{4}.\underset{1|1}{C}.$$

Fügt man hiezu noch die harmonischen Summen der drei vorhandenen Reihen der zweiten Ordnung mit ihren zugehörigen Faktoren und Vorzeichen, so erhält man die Summe der gegebenen Reihe ausgedrückt durch

$$-\frac{3}{4}.\underset{1|3}{C}+\frac{1}{4}.\underset{1|1}{C}+\frac{1}{4}.\underset{(1|3)^2}{S}+\underset{(2|3)^2}{S}+\frac{1}{36}.\underset{(1|1)^2}{S},$$

oder, wenn man hierin anstatt $\underset{1|3}{C}$, $\underset{(2|3)^2}{S}$, $\underset{(1|1)^2}{S}$ die Werthe aus den §§. 33., 93. und 91. substituirt und dann gehörig abkürzt,

$$\frac{11\pi^2}{72}-\frac{\pi\sqrt{3}}{24}-\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{3}{4}.\underset{(1|3)^2}{S},$$

wobei nur noch zu bemerken ist, dass der numerische Werth der primären harmonischen Summe $\underset{(1|3)^2}{S}$ aus §. 93. entnommen werden kann.

Als zweites Beispiel mag die unendliche Reihe dienen:

$$\frac{1}{1^3.3^3}+\frac{1}{5^3.7^3}+\frac{1}{9^3.11^3}+\frac{1}{13^3.15^3}+\ldots,$$

deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{(4n-3)^3.(4n-1)^3},$$

oder in Partialbrüche zerlegt

$$\frac{\frac{3}{16}}{4n-3}-\frac{\frac{3}{16}}{4n-1}-\frac{\frac{3}{16}}{(4n-3)^2}-\frac{\frac{3}{16}}{(4n-1)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{(4n-3)^3}-\frac{\frac{1}{8}}{(4n-1)^3}$$

ist. Hieraus ergibt sich sogleich als Summe der Reihe der Ausdruck:

$$\frac{3}{16}.C_{1|4}-\frac{3}{16}.C_{3|4}-\frac{3}{16}.S_{(1|4)^2}-\frac{3}{16}.S_{(3|4)^2}+\frac{1}{8}.S_{(1|4)^3}-\frac{1}{8}.S_{(3|4)^3},$$

oder nach vorgenommener Substitution der Werthe und gehöriger Abkürzung

$$\frac{3\pi}{64}-\frac{3\pi^2}{128}+\frac{\pi^3}{256}.$$

## §. 113.

Vermöge der Summirungsregel des §. 110. werden die Summen der unendlichen Reihen, welche sich nach jener Regel behandeln lassen, im allgemeinen durch die harmonischen Konstanten und Summen ausgedrückt. Da nun die Werthe der ersteren niemals, jene der letzteren nur in sehr seltenen Fällen durch die sonst gebräuchlichen analytischen Funktionen in geschlossener Form sich darstellen lassen, so können die auf solche Art erhaltenen Summirungen in der Regel keine analytischen im Sinne des §. 53. sein, wie auch das erste in §. 112. beigebrachte Beispiel zeigt. Von dieser Regel finden aber, wie man an dem zweiten Beispiele des §. 112. sieht, zuweilen fast unerwartete Ausnahmen Statt, welche wohl verdienen möchten, etwas näher untersucht zu werden.

Dem ersten Anblicke nach könnte man sich zu der Meinung veranlasst finden, dass hier die nämlichen 4 Aufgaben zu lösen seien, welche bei der Summirung durch die harmonischen Konstanten in §. 53. vorgelegt wurden. Allein aus dem schon bemerkten Umstande, dass in den Werthen der harmonischen Summen niemals ein Logarithmus enthalten ist, folgt von selbst, dass auch in den durch dieselben ausschliesslich bewerkstelligten Reihen-

summirungen ohnehin kein Logarithmus vorkommen kann, wesshalb die dritte von den erwähnten Aufgaben von selbst hinweg fällt und dann die zweite von ihnen mit der letzten einerlei wird. Nur dann, wenn unter den zusammen zu ziehenden harmonischen Reihen auch solche der ersten Ordnung gegeben sind, können in dem Ausdrucke der Summe Logarithmen erscheinen. In diesem Falle aber müssen die Bedingungen zum Verschwinden dieser Logarithmen aus der ganzen Summe offenbar die nämlichen sein, durch deren Erfüllung dieselben Logarithmen auch aus der Summe aller vorhandenen harmonischen Reihen der ersten Ordnung, für sich allein genommen, hinweg fallen würden, und von der Aufsuchung dieser Bedingungen ist bereits bei der Reihensummirung durch die harmonischen Konstanten die Rede gewesen. Aus diesem Grunde soll in Bezug auf die harmonischen Reihen höherer Ordnungen nur die Auflösung der ersten und letzten Aufgabe des §. 53., nämlich von der analytischen und algebraischen Summirung der Reihen, im allgemeinen kurz behandelt, dann aber zur Betrachtung einiger besonderer Fälle solcher Summirungen übergegangen werden, welche mit dem schon früher Erwiesenen in genauer Verbindung stehen und aus welchen zugleich einige nicht uninteressante Ergebnisse zum Vorscheine kommen werden.

## §. 114.

Die Auflösung der eben bezeichneten beiden Aufgaben kann, wie man leicht erkennen wird, hier im allgemeinen ganz in derselben Art bewerkstelliget werden, wie in §. 54. Denn es handelt sich hier wie dort nur darum, aus dem Ausdrucke der Summe entweder die nicht analytischen oder nebst denselben zugleich die nicht algebraischen Glieder verschwinden zu machen, was nur dadurch geschehen kann, indem die Koeffizienten dieser genannten Glieder gleich 0 werden. Es wird desshalb hier vollkommen genügen, die Art der Ausführung sowohl rücksichtlich der analytischen als auch der algebraischen Summirbarkeit der Reihen jedesmal an einem einzelnen nicht verwickelten Beispiele zu zeigen.

Sei zuerst die Aufgabe vorgelegt zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen aus den 3 harmonischen Reihen der zweiten Ordnung

$$\frac{S}{(1|2)^2}, \quad \frac{S}{(1|3)^2}, \quad \frac{S}{(1|6)^2},$$

wenn dieselben beziehungsweise mit den Faktoren

$$A,\quad A_1,\quad A_2$$

multiplizirt werden, eine analytisch summirbare Reihe nach §. 47. abgeleitet werden könne?

In §. 95. ist gezeigt worden, dass $S_{(1|2)^2}$ selbst analytisch ausgedrückt werden könne. Ferner ist vermöge §. 96. $S_{(1|3)^2}$ eine primäre harmonische Summe, welche auch nach §. 98. in dem Werthe der sekundären harmonischen Summe $S_{(1|6)^2}$ vorkommt, und zwar mit den Koeffizienten $\frac{3}{4}$ behaftet. Eine andere primäre harmonische Summe erscheint nirgends. Damit daher die aus den obigen 3 Reihen zu bildende neue Reihe analytisch summirbar werde, müssen aus ihrer Summe alle Glieder, welche $S_{(1|3)^2}$ enthalten würden, verschwinden, was nur dadurch geschehen kann, wenn

$$A_1 + \tfrac{3}{4}A_2 = 0 \quad \text{oder} \quad A_2 = -\tfrac{4}{3}A_1$$

wird. Diese ist daher die einzige Bedingung, von deren Erfüllung die analytische Summirbarkeit der aus den vorgelegten drei Reihen hervorgehenden neuen Reihe abhängt. Desshalb muss die Reihe

$$A.\,S_{(1|2)^2} + A_1.\,S_{(1|3)^2} - \tfrac{4}{3}A_1.\,S_{(1|6)^2},$$

deren allgemeines Glied

$$\frac{A}{(2n-1)^2} + \frac{A_1}{(3n-2)^2} - \frac{4A_1}{5(6n-5)^2}$$

ist, stets analytisch summirbar sein, was für Werthe man auch den Faktoren $A$ und $A_1$ beilegen mag. Wirklich findet man nach §. 109. die Summe dieser Reihe durch

$$\left(\frac{A}{8} + \frac{4A_1}{135}\right).\pi^2,$$

mithin analytisch, ausgedrückt. Durch die vorhergehende Ableitung ist aber noch ferner gewiss, dass jede andere, aus den nämlichen drei harmonischen Reihen nach §. 47. abgeleitete Reihe, welche der obigen Bedingungsgleichung nicht entspricht, auch nicht analytisch summirbar sein werde.

Als zweites Beispiel sollen die Bedingungen aufgesucht werden, unter welchen die Reihe

$$A.\ \underset{(4|3)^3}{S} + A_1.\ \underset{(5|3)^3}{S} + A_2.\ \underset{(6|3)^3}{S}$$

eine algebraisch ausdrückbare Summe besitzen kann.

Vermöge der in §. 96. gefundenen Werthe kommt in $\underset{(4|3)^3}{S}$ die primäre harmonische Summe $\underset{(1|1)^3}{S}$ mit dem Koeffizienten $\frac{1}{27}$ behaftet vor; ferner in $\underset{(5|3)^3}{S} = \underset{(2|3)^3}{S} - \frac{1}{8}$ gleichfalls die nämliche primäre Konstante mit demselben Koeffizienten $\frac{1}{27}$, endlich in

$$\underset{(6|3)^3}{S} = \frac{1}{3^3}.\ \underset{(2|1)^3}{S} \quad \text{oder} \quad \underset{(6|3)^2}{S} = \frac{1}{3^3}\left(\underset{(1|1)^3}{S} - 1\right) = \tfrac{1}{27}.\ \underset{(1|1)^3}{S} - \tfrac{1}{27}$$

mit dem Koeffizienten $\frac{1}{27}$ versehen. Damit daher die bezeichnete primäre Summe aus der Summe der neuen Reihe verschwinde, muss nothwendig

$$\tfrac{1}{64}A + \tfrac{1}{27}A_1 + \tfrac{1}{27}A_2 = 0 \quad \text{oder} \quad 13A + 13A_1 + A_2 = 0$$

sein. Durch die Erfüllung dieser Einen Bedingung wird die Reihe, wie man leicht sieht, wohl eine analytisch summirbare, aber doch nicht nothwendig algebraisch. Denn in ihrer Summe kann noch die nicht algebraische Zahl $\pi^3$ enthalten sein, welche in dem Werthe von $\underset{(1|3)^3}{S}$ mit dem Koeffizienten $\frac{2\sqrt{3}}{243}$, in $\underset{(5|3)^3}{S}$ mit $-\frac{2\sqrt{3}}{243}$ behaftet ist, in $\underset{(6|3)^3}{S}$ hingegen gar nicht vorkommt. Zum Hinwegfallen von $\pi^3$ wird demnach erfordert, dass

$$\frac{2\sqrt{3}}{243}A - \frac{2\sqrt{3}}{243}A_1 = 0 \quad \text{oder} \quad A - A_1 = 0$$

sei. Diese und die frühere Bedingung zusammen genommen geben nun

$$A_1 = A \quad \text{und} \quad A_2 = -26A$$

als diejenigen zwei Bedingungsgleichungen, bei deren Erfüllung die Reihe gewiss algebraisch summirbar ist, was aber auch gewiss nicht der Fall ist, sobald nicht beiden gleichzeitig Genüge geleistet wird.

Wirklich findet man im Falle des Zutreffens beider Bedingungen das allgemeine Glied der Reihe

$$\frac{A}{(3n-2)^3}+\frac{A}{(3n+2)^3}-\frac{26A}{27(n+1)^3},$$

und die Summe derselben ist:

$$A.\underset{(1|3)^3}{S}+A.\underset{(5|3)^3}{S}-26A.\underset{(6|3)^3}{S}=\frac{181}{216}A.$$

Lässt man hiebei den von $n$ unabhängigen, in allen Reihen gemeinschaftlich vorkommenden Faktor $A$ ganz bei S so sieht man wohl, dass aus den obigen Reihen eig lich nur eine einzige algebraisch summirbare R nach §. 47. entstehen könne, deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{(3n-2)^3}+\frac{1}{(3n+2)^3}-\frac{26}{27(n+1)^3}$$

und ihre Summe $\frac{181}{216}$ ist.

## §. 115.

In den Fällen, wenn aus solchen harmonischen Reihen, w nicht sämmtlich zu einerlei Ordnung gehören, eine Reihe nach §. 47. gebildet werden soll, kann bei Aufsuchun Bedingungsgleichungen für die analytische Summirbarkeit folg einfache Bemerkung von Nutzen sein.

Aus der Gesammtheit der im Vorhergehenden ausgefü Berechnungen ersieht man, dass es zwischen den harmonis Konstanten und Summen, so wie auch zwischen den letzt unter einander, sobald sie verschiedenen Ordnungen an ren, keine wechselseitige Beziehung gibt oder wenigstens keine solche bekannt ist, durch deren Hilfe jene Zahlen fü stimmt gegebene Werthe von $a$ und $d$ aus einander abge werden könnten, wesshalb sowohl die primären harmonis Konstanten, als auch die primären harmonischen Summen jeden einzelnen Ordnung eine besondere Abtheilung von tionalen oder transzendenten Zahlen bilden, welche Abtheilu gar nicht von einander abhängen. Aus diesem Grunde ist e stattet, in den vorgedachten Fällen die Aufstellung der B gungsgleichungen für das Wegfallen solcher harmonischen stanten oder Summen abtheilungsweise vorzunehmen, i man zuerst nur alle irgend einer einzelnen Ordnung angehö harmonischen Reihen so in Betracht zieht, als ob nur diese vorhanden wären, und die zu ihrer analytischen Summirb

erforderlichen Bedingungsgleichungen festsetzt, dann aber nach und nach in gleicher Weise zu den harmonischen Reihen aller übrigen Ordnungen, so weit solche vorhanden sind, übergeht. Die gleichzeitige Erfüllung aller auf diese Art sich ergebender einzelner Bedingungsgleichungen wird dann hinreichend und auch nothwendig sein, damit die Summe der Reihe eine analytische werde, weil stets, sobald nur einer einzigen von jenen Gleichungen nicht Genüge geleistet sein sollte, wenigstens Eine der primären harmonischen Konstanten oder Summen in dem Summenausdrucke der Reihe zurückbleiben müsste, wodurch der letztere eben aufhören würde, ein analytischer im Sinne des §. 53. zu sein.

Als ein sehr einfaches Beispiel dieser Art soll die Aufgabe vorgenommen werden, die Bedingungen zu suchen, unter welchen aus den vier harmonischen Reihen

$$\underset{1|4}{S},\quad \underset{3|4}{S},\quad \underset{(1|4)^2}{S},\quad \underset{(3|4)^2}{S}$$

beziehungsweise multiplizirt mit den Faktoren

$$A,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

eine analytisch summirbare unendliche Reihe nach §. 47. entstehen werde, oder mit anderen Worten, wie der Zähler des allgemeinen Gliedes einer unendlichen Reihe beschaffen sein müsse, wenn der Nenner

$$(4n-3)^2.(4n-1)^2$$

ist, und die Summe analytisch sein soll?

Betrachtet man hier zuerst die beiden Reihen der ersten Ordnung $A.\underset{1|4}{S}$ und $A_1.\underset{3|4}{S}$, so erhält man schon nach §. 48. die Bedingungsgleichung $A+A_1=0$, deren Erfüllung vermöge §. 57. zugleich die analytische Summirbarkeit der hieraus allein entspringenden Reihe herbeiführt. Demnach muss zuerst $A_1=-A$ sein.

Für die beiden Reihen der zweiten Ordnung $A_2.\underset{(1|4)^2}{S}$ und $A_3.\underset{(3|4)^2}{S}$ ergibt sich zu ihrer analytischen Summirbarkeit aus §. 97. die Bedingungsgleichung $A_2-A_3=0$, woraus $A_3=A_2$ folgt.

Beiden diesen Bedingungen muss Genüge geleistet werden, wenn die Summe der Gesammtreihe analytisch sein soll. Hieraus erhält man sogleich das allgemeine Glied der Reihe durch

$$\frac{A}{4n-3}-\frac{A}{4n-1}+\frac{A_2}{(4n-3)^2}+\frac{A_2}{(4n-1)^2}=\frac{32(A+A_2)(n^2-n)+6A+10A_2}{(4n-3)^2.(4n-1)^2}$$

und die Summe derselben durch

$$A.\frac{\pi}{4}+A_2.\frac{\pi^2}{8}$$

ausgedrückt, wo $A$ und $A_2$ jeden beliebigen Werth haben kö
Ausser den so eben bestimmten ist keine andere R
analytisch summirbar, bei welcher das allgem
Glied den Nenner $(4n-3)^2.(4n-1)^2$ besitzt.

Aus den vorstehenden Formeln ergeben sich offenbar di
den einfacheren Fälle, indem man entweder $A=-\frac{1}{4}$, $A$
annimmt, woraus man

$$S\frac{1}{(4n-3)^2.(4n-1)^2}=\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi}{16}$$

findet, oder indem $A=\frac{5}{64}$ und $A_2=-\frac{3}{64}$ gesetzt wird, wo
die Summirung

$$S\frac{n^2-n}{(4n-3)^2.(4n-1)^2}=\frac{5\pi}{256}-\frac{3\pi^2}{512}$$

zum Vorscheine kommt.

## §. 116.

Vermöge der in §. 94. und §. 95. angeführten Bernoulli'
Summirungen hat man, sobald $a$ eine beliebige ganze Zah
deutet,

$$\underset{(a|1)^{2r}}{S}=\underset{(1|1)^{2r}}{S}-\overset{a-1}{\underset{(1|1)^{2r}}{S}}=\frac{2^{2r-1}B_r\pi^{2r}}{(2r)!}-\overset{a-1}{\underset{(1|1)^{2r}}{S}},$$

$$\underset{(2a-1|2)^{2r}}{S}=\underset{(1|2)^{2r}}{S}-\overset{a-1}{\underset{(1|2)^{2r}}{S}}=\frac{(2^{2r}-1)B_r\pi^{2r}}{2.(2r)!}-\overset{a-1}{\underset{(1|2)^{2r}}{S}},$$

$$\underset{(2a|2)^{2r}}{S}=\frac{1}{2^{2r}}.\underset{(a|1)^{2r}}{S}=\frac{B_r\pi^{2r}}{2.(2r)!}-\frac{1}{2^{2r}}.\overset{a-1}{\underset{(1|1)^{2r}}{S}}.$$

Durch diese Formeln lassen sich die Werthe der har
schen Summen aller geraden Ordnungen, sobald die Diff
entweder 1 oder 2, und die Anfangszahl eine ganze ist, j
zeit mit Hilfe der Zahl $\pi$ in geschlossener Form, d. h. an
tisch, ausdrücken, und zwar sind diese die einzigen har
schen Summen, die man bisher in solcher Weise darzustell
Stande ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass alle aus ha

sischen Reihen von durchgängig **geraden** Ordnungen, mit den Differenzen 1 oder 2 und **ganzen** Anfangszahlen nach Anleitung des §. 47. entspringenden neuen Reihen nothwendig analytisch summirbar sein müssen, ohne dass es hiezu des Eintreffens irgend einer weiteren Bedingung bedarf.

Verbindet man dieses Ergebniss mit dem bereits in §. 57. erwiesenen Satze nach der ersten dort angewendeten Ausdrucksweise desselben, so erhält der letztere hiedurch folgende erweiterte Fassung: Jede aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung mit ganzen Anfangszahlen und den Differenzen 1, 2, 3, 4 oder 6, und aus harmonischen Reihen höherer, jedoch nur gerader Ordnungen, ebenfalls mit ganzen Anfangszahlen und den Differenzen 1 oder 2 nach §. 47. entspringende unendliche Reihe ist stets analytisch summirbar, sobald sie überhaupt eine endliche Summe besitzt, d. h., sobald die Faktoren der vorkommenden harmonischen Reihen der ersten Ordnung der Bedingungsgleichung des §. 48. Genüge leisten.

Will man eine ähnliche Verbindung des früher für die harmonischen Reihen höherer Ordnungen erwiesenen Gesetzes mit dem zweiten in §. 57. ausgesprochenen Satze, der wohl häufiger praktische Anwendung finden dürfte, vornehmen, so darf man nicht übersehen, dass in dem Falle, wenn in dem Nenner eines gegebenen rationalen Bruches ein Faktor von der Form $(n+a)^4$ oder $(2n+a)^4$ vorkommt, daraus bei der Zerlegung in Partialbrüche auch solche mit dem Nenner $(n+a)^3$ oder $(2n+a)^3$ entstehen können, für welche man die zugehörigen harmonischen Summen, weil sie von der dritten, demnach einer ungeraden Ordnung sind, im allgemeinen analytisch auszudrücken nicht im Stande ist. Dasselbe gilt offenbar auch für Faktoren von einem noch höheren als dem vierten Grade. Hingegen, wenn in dem Nenner des Bruches ausser den nur einfach vorhandenen Faktoren des ersten Grades noch solche von den Formen $(n+a)^2$ oder $(2n+a)^2$ enthalten sind, jedoch keine eines höheren Grades, dann können aus den Faktoren $(n+a)^2$ oder $(2n+a)^2$ nur Partialbrüche mit den Nennern $(n+a)^2$, $n+a$ oder $(2n+a)^2$, $2n+a$ entstehen, so dass die diesen Partialbrüchen entsprechenden harmonischen Reihen entweder zur zweiten oder zur ersten Ordnung gehören. Die ersteren sind vermöge des vorhin Erwiesenen sämmtlich einzeln und daher alle zusammen analytisch summirbar. Was die letzteren anbelangt, müssen dieselben in Verbindung mit den

übrigen vorhandenen harmonischen Reihen der ersten Ordnung der Bedingungsgleichung des §. 48. nothwendig Genüge leisten, weil im entgegengesetzten Falle weder diese Reihen für sich allein, noch auch vereinigt mit den bemerkten Reihen der zweiten Ordnung eine endliche Summe haben könnten, was doch stets eintreffen muss, sobald der Zähler des gegebenen Bruches um wenigstens 2 Grade niedriger ist, als der Nenner. Wenn aber solchergestalt die sämmtlichen Reihen der ersten Ordnung der Bedingungsgleichung des §. 48. wirklich entsprechen, dann muss vermöge §. 57. die Summe derselben zugleich analytisch sein, und folglich wird auch die Vereinigung eben dieser mit den vorher bemerkten Reihen der zweiten Ordnung, was nichts anderes ist, als die aus dem gegebenen rationalen Bruche entspringende unendliche Reihe, gewiss analytisch summirbar sein.

Zufolge dieser Betrachtungen kann daher dem zweiten in §. 57. ausgesprochenen Satze nachstehende, im Vergleiche gegen die frühere zwar erweiterte, im Zusammenhalte mit dem unmittelbar vorhergehenden Satze aber etwas minder weit reichende Fassung ertheilt werden: Jede unendliche Reihe, deren allgemeines Glied eine rationale gebrochene Funktion von $n$ ist, muss analytisch summirbar sein, sobald der Zähler um wenigstens 2 Grade niedriger ist als der Nenner und zugleich der letztere aus durchgängig von einander verschiedenen Faktoren von den Formen: $n+a$, $2n+a_1$, $3n+a_2$, $4n+a_3$, $6n+a_4$, $(n+a_5)^2$ und $(2n+a_6)^2$ besteht, wo $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$ und $a_6$ beliebige ganze, übrigens additive oder subtraktive Zahlen bedeuten können.

Durch dieses Gesetz findet man sich im Stande, mit Leichtigkeit eine unbeschränkte Menge allgemeiner Glieder von unendlichen Reihen, in deren Nennern auch Faktoren des zweiten Grades vorkommen dürfen, aufzustellen, bei welchen die Summen der Reihen gewiss analytisch im Sinne des §. 53. ausgedrückt werden können, nur muss man sich dabei aus leicht begreiflichen Gründen hüten, unter die Faktoren des Nenners solche aufzunehmen, welche für irgend einen additiven ganzen Werth von $n$ gleich 0 sein würden.

Uebrigens sind diese Sätze offenbar keineswegs im Sinne der Ausschliesslichkeit zu verstehen, d. h., es können allerdings noch andere analytisch summirbare Reihen nach §. 47. entstehen, welche sich aber durch keine der vorstehenden Regeln auffinden, sondern nur nach §. 114. erkennen lassen. Das zweite in §. 112. angeführte Beispiel ist ein praktischer Beleg für diese Behauptung.

## §. 117.

Behält man die schon bisher bei den Anwendungen auf bestimmte Zahlen in der Regel zum Grunde liegende Voraussetzung, dass die Anfangszahlen und Differenzen aller harmonischen Reihen ganze Zahlen seien, auch noch weiter bei, nimmt man ferner an, dass alle vorhandenen oder doch alle nach §. 115. gleichzeitig zur Betrachtung kommenden Reihen zu einerlei Ordnung gehören und dass überdiess bei ihnen durchgängig dieselbe Differenz herrsche, welcher letztere Umstand jederzeit leicht herbeigeführt werden kann, wenn er etwa nicht ohnehin vorhanden sein sollte, so ist es auch für die harmonischen Reihen höherer Ordnungen ganz leicht, die sowohl zum Eintreffen der analytischen als auch der algebraischen Summirbarkeit erforderlichen Bedingungsgleichungen mit Hilfe der in §. 58. eingeführten und hier unverändert beizubehaltenden Bezeichnungsweise genau in derselben Art darzustellen, wie diess in §. 59. und dann in §. 71. bis §. 76. bei den Reihen der ersten Ordnung gezeigt worden ist, nur müssen bei den höheren Ordnungen die beiden Fälle, ob der Ordnungsexponent eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, wohl von einander unterschieden werden, weil darnach auch die Gleichungen selbst etwas verschieden ausfallen. Diess ist so einleuchtend, dass es wohl für hinreichend erachtet werden darf, nur die Bedingungsgleichungen der analytischen und auch der algebraischen Summirbarkeit für diejenigen Differenzen, für welche die zugehörigen harmonischen Summen in den §§. 94. — 98. berechnet worden sind, kurz anzuführen, ohne nöthig zu haben, die Ableitung und Begründung derselben umständlich zu erörtern.

Was zuerst den Fall anbelangt, wenn die gemeinschaftliche Differenz aller einzelnen Reihen $d=1$ ist, findet man, dass für jede gerade Ordnung die Summe jederzeit und unbedingt analytisch sein müsse, algebraisch jedoch nur dann, wenn die Summe der Faktoren aller Reihen gleich 0 ist, oder in der Bezeichnung des §. 58. ausgedrückt, wenn $F_0=0$ ist. Die Erfüllung der nämlichen Bedingungsgleichung $F_0=0$ ist auch bei den ungeraden Ordnungen nothwendig, wenn die Summe analytisch oder algebraisch sein soll, da hier beide diese Eigenschaften stets vereinigt vorkommen.

Im Falle, wenn $d=2$ ist, wird für eine gerade Ordnung $2r$ die analytische Summirbarkeit ebenfalls unbedingt

eintreffen, die algebraische Summirbarkeit hingegen nur dann, wenn der Bedingungsgleichung

$$F_0 + (2^{2r} - 1).F_1 = 0$$

Genüge geleistet ist; für eine ungerade Ordnung $2r+1$ muss zum Eintreffen der analytischen wie der algebraischen Summirbarkeit die Gleichung

$$F_0 + (2^{2r+1} - 1).F_1 = 0$$

erfüllt sein.

Bei $d=3$ ergibt sich für die gerade Ordnung $2r$ zur analytischen Summirbarkeit die Bedingungsgleichung

$$F_1 - F_2 = 0,$$

zur algebraischen Summirbarkeit muss nebst eben dieser noch der weiteren Bedingungsgleichung

$$F_0 + (3^{2r} - 1).F_2 = 0$$

Genüge geschehen; für die ungerade Ordnung $2r+1$ wird zur analytischen Summirbarkeit die Erfüllung der Bedingungsgleichung

$$2F_0 + (3^{2r+1} - 1).(F_1 + F_2) = 0,$$

zur algebraischen Summirbarkeit ausser eben dieser noch der weiteren Gleichung

$$F_1 - F_2 = 0$$

erfordert.

Ist $d=4$, so erhält man für die gerade Ordnung $2r$ zur analytischen Summirbarkeit die Bedingungsgleichung

$$F_1 - F_3 = 0,$$

und zur algebraischen Summirbarkeit noch die zweite Gleichung

$$F_0 + (2^{2r} - 1).F_2 + 2^{2r}(2^{2r} - 1).F_3 = 0;$$

für die ungerade Ordnung $2r+1$ findet man zur analytischen Summirbarkeit die Gleichung

$$F_0 + (2^{2r+1} - 1).F_2 + 2^{2r}(2^{2r+1} - 1).F_3 = 0,$$

zur algebraischen Summirbarkeit kommt noch die fernere Gleichung

$$F_1 - F_3 = 0$$

hinzu.

Endlich für $d=6$ und jede gerade Ordnung $2r$ ergibt sich zur analytischen Summirbarkeit die Gleichung

$$(2^{2r}+1).(F_1-F_5)+F_2-F_4=0,$$

und zum Behufe der algebraischen Summirbarkeit noch die zweite Gleichung

$$F_0-(3^{2r}-1).F_1+(2^{2r}-1).F_3+(3^{2r}-1).F_4+2^{2r}(3^{2r}-1).F_5=0;$$

für die ungerade Ordnung $2r+1$ hingegen muss zur analytischen Summirbarkeit der Gleichung

$$F_0+\frac{(2^{2r+1}-1)(3^{2r+1}-1)}{2}(F_1+F_5)+\frac{(3^{2r+1}-1)}{2}.(F_2+F_4)$$
$$+(2^{2r+1}-1).F_3=0,$$

und zur algebraischen Summirbarkeit noch überdiess der Gleichung

$$(2^{2r+1}+1)(F_1-F_5)+F_2-F_4=0$$

Genüge geschehen.

Man darf hiebei nicht ausser Acht lassen, dass den eben aufgestellten Regeln die Eigenschaft der Ausschliesslichkeit zukommt, so dass die Summen solcher Reihen, bei welchen die gleich Anfangs ausgesprochenen Voraussetzungen eintreffen, nicht nur dann gewiss analytisch oder algebraisch sind, sobald den dafür gefundenen Bedingungsgleichungen vollständig Genüge geleistet wird, sondern es auch gewiss nicht sind, wenn das letztere nicht der Fall ist.

Um die Anwendung der vorstehenden Bedingungsgleichungen mit einem sehr einfachen Beispiele zu belegen, soll die Aufgabe zur Lösung vorgenommen werden, die Bedingungen aufzusuchen, unter welchen aus den 4 harmonischen Reihen der zweiten Ordnung

$$\underset{(1|4)^2}{S}, \quad \underset{(2|4)^2}{S}, \quad \underset{(3|4)^2}{S}, \quad \underset{(4|4)^2}{S},$$

beziehungsweise multiplizirt mit den Faktoren

$$A, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3,$$

nach Anleitung des §. 47. eine entweder analytisch, oder auch algebraisch summirbare unendliche Reihe entspringen werde?

Hier ist $d=4$, dann die Ordnung der Reihen 2, mithin gerade, und $r=1$. Ferner hat man:

$$F_0=A_3,\quad F_1=A,\quad F_2=A_1,\quad F_3=A_2.$$

Werden diese Werthe in den vorhin bei $d=4$ aufgestellten Bedingungsgleichungen substituirt, so ergibt sich, dass die Reihe dann und nur dann analytisch summirbar sein werde, sobald der Gleichung

$$A-A_2=0 \quad \text{oder} \quad A_2=A$$

entsprochen ist; zur algebraischen Summirbarkeit aber muss noch überdiess der Gleichung

$$A_3+3A_1+12A_2=0 \quad \text{oder} \quad A_3=-3A_1-12A$$

Genüge geleistet werden. Demnach ist die Reihe

$$A.\underset{(1|4)^2}{S}+A_1.\underset{(2|4)^2}{S}+A.\underset{(3|4)^2}{S}+A_3.\underset{(4|4)^2}{S}$$

stets analytisch und die Reihe

$$A.\underset{(1|4)^2}{S}+A_1.\underset{(2|4)^2}{S}+A.\underset{(3|4)^2}{S}-(12A+3A_1).\underset{(4|4)^2}{S}$$

gewiss algebraisch summirbar, was man auch durch wirkliche Summirung bestätigt findet, indem

$$A.\underset{(1|4)^2}{S}+A_1.\underset{(2|4)^2}{S}+A.\underset{(3|4)^2}{S}+A_3.\underset{(4|4)^2}{S}=\left(\frac{A}{8}+\frac{A_1}{32}+\frac{A_3}{96}\right).\pi^2$$

und

$$A.\underset{(1|4)^2}{S}+A_1.\underset{(2|4)^2}{S}+A.\underset{(3|4)^2}{S}-(12A+3A_1).\underset{(4|4)^2}{S}=0$$

erhalten wird. Aus dem Vorhergehenden folgt aber noch ferner, dass aus den vorgelegten 4 Reihen keine andere analytisch oder auch algebraisch summirbare Reihe nach Anleitung des §. 47. entspringen könne, als ausschliesslich nur diejenigen, welche in diesen 2 Formen begriffen sind.

## §. 118.

Aus den Summenformeln, welche in den §§. 63., 64. und 65. aufgestellt wurden, lassen sich ohne alle Schwierigkeit andere bemerkenswerthe, zur Lehre von den harmonischen Reihen höherer Ordnungen gehörige, analytische Summirungen ableiten.

Bezeichnet $\varphi n$ eine beliebige Funktion von $n$, und $\varepsilon$ eine veränderliche, von welcher $\varphi n$ nicht abhängt, so ist, wenn man Beziehung auf $\varepsilon$ differenzirt,

$$\partial(\varphi n + \varepsilon) = \partial\varepsilon,$$

ithin

$$\partial\frac{1}{\varphi n + \varepsilon} = -\frac{1}{(\varphi n + \varepsilon)^2},$$

nd allgemein für jeden additiven ganzen Werth von $r$:

$$\frac{\partial^{r-1}\frac{1}{\varphi n + \varepsilon}}{\partial\varepsilon^{r-1}} = \frac{(-1)^{r-1}.(r-1)!}{(\varphi n + \varepsilon)^r},$$

woraus durch umgekehrte Auflösung

$$\text{I.}\quad \frac{1}{(\varphi n + \varepsilon)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{\partial^{r-1}\frac{1}{\varphi n + \varepsilon}}{\partial\varepsilon^{r-1}}$$

folgt. Da die beiden Theile dieser Gleichung auch Funktionen von $n$ sind, können dieselben als allgemeine Glieder von unendlichen Reihen angesehen werden, durch deren Summirung man

$$S\frac{1}{(\varphi n + \varepsilon)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot S\frac{\partial^{r-1}\frac{1}{\varphi n + \varepsilon}}{\partial\varepsilon^{r-1}},$$

und durch Verwechslung der Ordnung der beiden Rechnungszeichen $S$ und $\partial^{r-1}$

$$\text{II.}\quad S\frac{1}{(\varphi n + \varepsilon)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{\partial^{r-1}S\frac{1}{\varphi n + \varepsilon}}{\partial\varepsilon^{r-1}}$$

erhält.

Um eines davon zu machenden Gebrauches willen muss hier noch bemerkt werden, dass man die Gleichung I., bevor die Summirung dabei vorgenommen wird, auch mit $(-1)^{n+1}$ multipliziren könne, wodurch das Resultat folgende etwas veränderte Gestalt annimmt:

$$\text{III.}\quad S\frac{(-1)^{n+1}}{(\varphi n + \varepsilon)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{\partial^{r-1}S\frac{(-1)^{n+1}}{\varphi n + \varepsilon}}{\partial\varepsilon^{r-1}}.$$

Mit Hilfe der gefundenen Formeln II. und III. ist man offenbar im Stande, sobald man die Summen

$$S\frac{1}{\varphi n+\varepsilon} \quad \text{oder} \quad S\frac{(-1)^{n+1}}{\varphi n+\varepsilon}$$

durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck da[illegible] zustellen vermag, durch wiederholtes Differenzire[illegible] des letzteren in Bezug auf die Veränderliche $\varepsilon$ au[illegible] die Summen

$$S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon)^r} \quad \text{oder} \quad S\frac{(-1)^{n+1}}{(\varphi n+\varepsilon)^r}$$

in gleicher Weise ausgedrückt zu finden.

## §. 119.

Setzt man in der Formel II. des §. 118. zuerst $\varphi n=\gamma n^2+\delta n$, dann auch $\varphi n=\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)$, ferner in III. ebenfalls $\varphi n=\gamma n^2+\delta n$; so erhält man daraus:

$$\text{I.}\quad S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^r}=\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{\partial^{r-1}S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}}{\partial\varepsilon^{r-1}},$$

$$\text{II.}\quad S\frac{1}{(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon)^r}=\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{\partial^{r-1}S\frac{1}{\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon}}{\partial\varepsilon^{r-1}},$$

$$\text{III.}\quad S\frac{(-1)^{n+1}}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^r}=\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{\partial^{r-1}S\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}}{\partial\varepsilon^{r-1}}.$$

Nun ist man durch die in den §§. 63., 64. und 65. gefundene[illegible] Formeln in den Stand gesetzt, die Summen

$$S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon},\quad S\frac{1}{\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon},\quad S\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon}$$

zwar nicht im allgemeinen, aber doch in einigen dort bestimmt[illegible] bezeichneten Fällen wirklich in geschlossener Form analytisch auszudrücken. Substituirt man daher mit Uebergehung der zwar allgemeineren, jedoch in praktischer Beziehung minder bequem anzuwendenden, Formel des §. 63., da sie ohnehin durch die folgenden vollständig ersetzt wird, die Werthe aus §. 64. und §. 65. in den vorausgehenden Gleichungen I., II., III, so ergeben sich sogleich folgende neue analytische Summirungen, wobei die ebendort eingeführten Bezeichnungen

$$p=\frac{\delta^2-4\gamma\varepsilon}{4\gamma^2}\quad\text{und}\quad q=\frac{\sqrt{(4\gamma\varepsilon-\delta^2)}}{2\gamma}$$

unverändert beibehalten bleiben. Es ist nämlich, wenn $\frac{\delta}{\gamma}$ eine gerade Zahl ist:

$$\text{IV. } S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^r}=\frac{(-1)^{r-1}}{2\gamma^r p^r}+\frac{(-1)^r.\pi.\partial^{r-1}\frac{\operatorname{cotang}\pi\sqrt{p}}{\sqrt{p}}}{2\gamma(r-1)!\,\partial\varepsilon^{r-1}}$$
$$-\frac{1}{\gamma^r}.\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{1}{(n^2-p)^r},$$

oder

$$\text{V. } S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^r}=-\frac{1}{2\gamma^r q^{2r}}+\frac{(-1)^r.\pi.\partial^{r-1}\frac{e^{q\pi}+e^{-q\pi}}{q(e^{q\pi}-e^{-q\pi})}}{2\gamma(r-1)!\,\partial\varepsilon^{r-1}}$$
$$-\frac{1}{\gamma^r}.\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{1}{(n^2+q^2)^r};$$

wenn $\frac{\delta}{\gamma}$ eine ungerade Zahl ist:

$$\text{VI. } S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^r}=\frac{(-1)^{r-1}.\pi.\partial^{r-1}\frac{\operatorname{tang}\pi\sqrt{p}}{\sqrt{p}}}{2\gamma.(r-1)!\,\partial\varepsilon^{r-1}}$$
$$-\frac{4^r}{\gamma^r}.\overset{\frac{\delta+\gamma}{2\gamma}}{S}\frac{1}{((2n-1)^2-4p)^r},$$

oder

$$\text{VII. } S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^r}=\frac{(-1)^{r-1}.\pi.\partial^{r-1}\frac{e^{q\pi}-e^{-q\pi}}{q(e^{q\pi}+e^{-q\pi})}}{2\gamma.(r-1)!\,\partial\varepsilon^{r-1}}$$
$$-\frac{4^r}{\gamma^r}.\overset{\frac{\delta+\gamma}{2\gamma}}{S}\frac{1}{((2n-1)^2+4q^2)^r};$$

ferner wenn $\frac{\delta}{\gamma}$ eine durch 4 theilbare Zahl ist:

$$\text{VIII. } S\frac{1}{(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon)^r}=\frac{(-1)^{r-1}.\pi.\partial^{r-1}\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{p}}{2}}{\sqrt{p}}}{4\gamma.(r-1)!\,\partial\varepsilon^{r-1}}$$
$$-\frac{1}{\gamma^r}.\overset{\frac{\delta}{4\gamma}}{S}\frac{1}{((2n-1)^2-p)^r},$$

$$\text{IX.}\quad S\frac{1}{(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon)^r}=\frac{(-1)^{r-1}.\pi.\partial^{r-1}\dfrac{e^{\frac{q\pi}{2}}-e^{-\frac{q\pi}{2}}}{q(e^{\frac{q\pi}{2}}+e^{-\frac{q\pi}{2}})}}{4\gamma.(r-1)!\,\partial\varepsilon^{r-1}}$$
$$-\frac{1}{\gamma^r}.S^{\frac{\delta}{4\gamma}}\frac{1}{((2n-1)^2+q^2)^r};$$

endlich noch wenn $\frac{\delta}{\gamma}$ eine gerade Zahl ist:

$$\text{X.}\quad S\frac{(-1)^{n+1}}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^r}=\frac{(-1)^r}{2\gamma^r p^r}+\frac{(-1)^{r-1}.\pi.\partial^{r-1}\dfrac{\operatorname{cosec}\pi\sqrt{p}}{\sqrt{p}}}{2\gamma.(r-1)!\,\partial\varepsilon^{r-1}}$$
$$-\frac{1}{\gamma^r}.S^{\frac{\delta}{2\gamma}}\frac{(-1)^{n+1}}{(n^2-p)^r},$$

oder

$$\text{XI.}\quad S\frac{(-1)^{n+1}}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^r}=\frac{1}{2\gamma^r q^{2r}}+\frac{(-1)^r.\pi.\partial^{r-1}\dfrac{1}{q(e^{q\pi}-e^{-q\pi})}}{2\gamma.(r-1)!\,\partial\varepsilon^{r-1}}$$
$$-\frac{1}{\gamma^r}.S^{\frac{\delta}{2\gamma}}\frac{(-1)^{n+1}}{(n^2+q^2)^r}.$$

Es versteht sich hiebei von selbst, dass von diesen letzten paarweise geordneten 8 Formeln stets entweder die erste oder die zweite gebraucht werden müsse, je nachdem entweder $\sqrt{p}$ oder $q$ einen reellen Werth besitzt.

## §. 120.

Die wirkliche Ausführung der in §. 119. nur angezeigten Differenzirungen für jeden bestimmt gegebenen Werth von $r$ unterliegt nicht der geringsten Schwierigkeit; nur müssen die hiedurch sich ergebenden Ausdrücke fortwährend desto verwickelter ausfallen, je grösser $r$ angenommen wird. Desshalb sollen die Formeln nur für den einfachsten Fall ausdrücklich hieher gesetzt werden, um sie bei vorkommendem Gebrauche sogleich zur Hand zu haben. Es ist nämlich für $r=2$:

$$\text{I.}\quad S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^2}=-\frac{1}{2\gamma^2 p^2}+\frac{\pi^2(\operatorname{cosec}\pi\sqrt{p})^2}{4\gamma^2 p}+\frac{\pi\operatorname{cotang}\pi\sqrt{p}}{4\gamma^2 p\sqrt{p}}$$
$$-\frac{1}{\gamma^2}.S^{\frac{\delta}{2\gamma}}\frac{1}{(n^2-p)^2}$$

II. $$S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^2}=-\frac{1}{2\gamma^2q^4}+\frac{\pi^2}{\gamma^2q^2(e^{q\pi}-e^{-q\pi})^2}$$
$$+\frac{\pi(e^{q\pi}+e^{-q\pi})}{4\gamma^2q^3(e^{q\pi}-e^{-q\pi})}-\frac{1}{\gamma^2}\cdot\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{1}{(n^2+q^2)^2},$$

III. $$S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^2}=\frac{\pi^2(\sec\pi\sqrt{p})^2}{4\gamma^2p}-\frac{\pi\operatorname{tang}\pi\sqrt{p}}{4\gamma^2p^{\frac{1}{2}}}$$
$$-\frac{4^2}{\gamma^2}\cdot\overset{\frac{\delta+\gamma}{2\gamma}}{S}\frac{1}{((2n-1)^2-4p)^2},$$

IV. $$S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^2}=\frac{\pi(e^{q\pi}-e^{-q\pi})}{4\gamma^2q^3(e^{q\pi}+e^{-q\pi})}-\frac{\pi^2}{\gamma^2q^2(e^{q\pi}+e^{-q\pi})^2}$$
$$-\frac{4^2}{\gamma^2}\cdot\overset{\frac{\delta+\gamma}{2\gamma}}{S}\frac{1}{((2n-1)^2+4q^2)^2},$$

V. $$S\frac{1}{(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon)^2}=\frac{\pi^2(\sec\frac{\pi\sqrt{p}}{2})^2}{16\gamma^2p}-\frac{\pi\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{p}}{2}}{8\gamma^2p^{\frac{1}{2}}}$$
$$-\frac{1}{\gamma^2}\cdot\overset{\frac{\delta}{4\gamma}}{S}\frac{1}{((2n-1)^2-p)^2},$$

VI. $$S\frac{1}{(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon)^2}=\frac{\pi(e^{\frac{q\pi}{2}}-e^{-\frac{q\pi}{2}})}{8\gamma^2q^3(e^{\frac{q\pi}{2}}+e^{-\frac{q\pi}{2}})}$$
$$-\frac{\pi^2}{4\gamma^2q^2(e^{\frac{q\pi}{2}}+e^{-\frac{q\pi}{2}})^2}-\frac{1}{\gamma^2}\cdot\overset{\frac{\delta}{4\gamma}}{S}\frac{1}{((2n-1)^2+q^2)^2},$$

VII. $$S\frac{(-1)^{n+1}}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^2}=\frac{1}{2\gamma^2p^2}-\frac{\pi^2\cos\pi\sqrt{p}}{4\gamma^2p(\sin\pi\sqrt{p})^2}-\frac{\pi\operatorname{cosec}\pi\sqrt{p}}{4\gamma^2p^{\frac{1}{2}}}$$
$$-\frac{1}{\gamma^2}\cdot\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{(-1)^{n+1}}{(n^2-p)^2},$$

VIII. $$S\frac{(-1)^{n+1}}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^2}=\frac{1}{2\gamma^2q^4}-\frac{\pi^2(e^{q\pi}+e^{-q\pi})}{2\gamma^2q^2(e^{q\pi}-e^{-q\pi})^2}$$
$$-\frac{\pi}{2\gamma^2q^3(e^{q\pi}-e^{-q\pi})}-\frac{1}{\gamma^2}\cdot\overset{\frac{\delta}{2\gamma}}{S}\frac{(-1)^{n+1}}{(n^2+q^2)^2}.$$

Für welche Fälle jede einzelne von diesen Formeln anwendbar sei, ist zwar in §. 119. ausdrücklich angegeben worden; es bedarf

aber nicht einmal dieser Hinweisung, weil die Beschaffenheit der Formeln es ohnehin jederzeit selbst ganz unzweideutig dadurch zu erkennen gibt, indem überall bei der im letzten Gliede jeder einzelnen Formel vorkommenden endlichen Summe die über dem Summenzeichen stehende Anzahl der Glieder nothwendig eine ganze Zahl sein muss, und genau mit den in §. 119. ausgedrückten Fällen übereinstimmt.

Die vorstehenden Ausdrücke würden eine noch etwas kürzere Gestalt erhalten, wenn man darin $\delta=0$ annehmen wollte, weil bei dieser Voraussetzung die eben erwähnten letzten Glieder aller Formeln ganz wegfallen und zugleich die Werthe von $p$ und $q$ sehr kurz sich darstellen lassen würden. Die auf solche Art sich ergebenden Gleichungen würden dann genau den in §. 67. angeführten Summirungen Euler's entsprechen, aus welchen sie auch durch Differenziren für $\varepsilon$ unmittelbar hergeleitet werden könnten. Es wird deshalb nicht nöthig sein, länger dabei zu verweilen.

## §. 121.

Die Summenformeln der §§. 64. und 65. unterliegen, wie bereits in §. 66. bemerkt worden ist, rücksichtlich ihrer Anwendbarkeit gewissen Beschränkungen, welche letztere nun auch bei den aus jenen früheren hergeleiteten Summirungen der §§. 119. und 120. Platz greifen müssen. Es finden nämlich erstlich diese Formeln keine Anwendung, sobald $\delta^2=4\gamma\varepsilon$ oder $\delta^2-4\gamma\varepsilon=0$ ist. In einem solchen Falle lässt sich, wie bekannt, $\gamma n^2+\delta n+\varepsilon$ in ein Produkt aus zwei einander gleichen Faktoren zerlegen, folglich ist $S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^r}$ eine harmonische Summe der 2rten Ordnung, und eine solche kann, wie man aus §. 94. und §. 95. weiss, nur dann analytisch dargestellt werden, wenn die zugehörige Differenz entweder 1 oder 2, und zugleich die Anfangszahl eine ganze ist.

Ferner geben einige von den Formeln der §§. 119. und 120. für die gesuchte Summe das Resultat nur in einem unbestimmten und daher unbrauchbaren Ausdrucke, sobald $\sqrt{p}$ eine ganze Zahl ist. Für solche Fälle ist es aber stets leicht, die bestimmten Werthe der Summen zu finden, indem man zu diesem Behufe nur die in §. 66. aufgestellten Ausdrücke $(r-1)$mal für $\varepsilon$ zu differenziren braucht, um sogleich

$$S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^r} = \frac{(-1)^{r-1}.\partial^{r-1}(p^{-\frac{1}{2}}.\overset{2\sqrt{p}}{S}\frac{1}{n+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}})}{2\gamma(r-1)!.\partial\varepsilon^{r-1}},$$

$$S\frac{1}{(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon)^r} = \frac{(-1)^{r-1}.\partial^{r-1}(p^{-\frac{1}{2}}.\overset{\sqrt{p}}{S}\frac{1}{2n+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}-1})}{2\gamma.(r-1)!.\partial\varepsilon^{r-1}},$$

$$S\frac{(-1)^{n+1}}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^r} = \frac{(-1)^{r-1}.\partial^{r-1}(p^{-\frac{1}{2}}.\overset{2\sqrt{p}}{S}\frac{(-1)^{n+1}}{n+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}})}{2\gamma.(r-1)!.\partial\varepsilon^{r-1}}$$

zu erhalten, welche Formeln stets anwendbar sind, wenn $\sqrt{p}$ irgend eine ganze Zahl bedeutet, zugleich aber I. und III. auch dann, wenn $\sqrt{p}$ ein regelmässiger Bruch mit dem Nenner 2 sein sollte. Auch sieht man wohl, dass durch diese Formeln die gesuchten Summen nicht nur analytisch, sondern sogar algebraisch ausgedrückt gefunden werden.

In dem einfachsten Falle, wenn $r=2$ ist, ergibt sich insbesondere:

IV. $$S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^2} = \frac{1}{4\gamma^2 p}.\overset{2\sqrt{p}}{S}\frac{1}{(n+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p})^2} - \frac{1}{4\gamma^2 p^{\frac{3}{2}}}.\overset{2\sqrt{p}}{S}\frac{1}{n+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}},$$

V. $$S\frac{1}{(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon)^2} = \frac{1}{4\gamma^2 p}.\overset{\sqrt{p}}{S}\frac{1}{(2n+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}-1)^2} - \frac{1}{4\gamma^2 p^{\frac{1}{2}}}.\overset{\sqrt{p}}{S}\frac{1}{2n+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}-1},$$

VI. $$S\frac{(-1)^{n+1}}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)^2} = \frac{1}{4\gamma^2 p}.\overset{2\sqrt{p}}{S}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p})^2} - \frac{1}{4\gamma^2 p^{\frac{3}{2}}}.\overset{2\sqrt{p}}{S}\frac{(-1)^{n+1}}{n+\frac{\delta}{2\gamma}-\sqrt{p}}.$$

## §. 122.

Durch Vornahme einer kleinen Abänderung bei dem in §. 118. eingehaltenen Verfahren, indem man nämlich dabei anstatt der

Differenziale die Differenzen anwendet, ist man im Stande, noch andere analytische Summirungen aus den Formeln der §§. 64. und 65. abzuleiten, welche, wenn sie auch minder erheblich, als die vorhergehenden, sich erweisen sollten, doch nicht ganz mit Stillschweigen übergangen werden dürfen.

Mit Beibehaltung der in §. 118. eingeführten Bezeichnungen soll noch die Differenz der Veränderlichen $\varepsilon$ durch $\eta$ bezeichnet werden, nämlich $\Delta\varepsilon = \eta$ sein. Unter diesen Voraussetzungen weiss man aus der Differenzenlehre, dass

$$\Delta^m \frac{1}{(\varphi n+\varepsilon)^r}$$

$$=(-1)^m.\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{(\varphi n+\varepsilon)^r} - \binom{m}{1}\cdot\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+\eta)^r} + \binom{m}{2}\cdot\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+2\eta)^r} \\ \quad - \binom{m}{3}\cdot\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+3\eta)^r} + \binom{m}{4}\cdot\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+4\eta)^r} - \cdots \end{array}\right\}$$

ist, wobei man nicht übersehen wird, dass die zwischen den Klammern enthaltene Reihe vermöge der Eigenschaften der Binomialkoeffizienten für additive ganze $m$ nothwendig endlich ist und aus $m+1$ Gliedern besteht.

Betrachtet man hier alle vorkommenden Ausdrücke, da sie zugleich Funktionen von $n$ sind, als allgemeine Glieder unendlicher Reihen, so folgt durch Summirung derselben sogleich

$$\text{I.}\quad S\Delta^m \frac{1}{(\varphi n+\varepsilon)^r}$$

$$=(-1)^m.\left\{\begin{array}{l} S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon)^r} - \binom{m}{1}\cdot S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+\eta)^r} + \binom{m}{2}\cdot S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+2\eta)^r} \\ \quad - \binom{m}{3}\cdot S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+3\eta)^r} + \binom{m}{4}\cdot S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+4\eta)^r} - \cdots \end{array}\right\},$$

oder in kürzerer Weise dargestellt:

$$\text{II.}\quad S\Delta^m \frac{1}{(\varphi n+\varepsilon)^r} = \Delta^m S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon)^r}.$$

Ist man nun im Stande, die Summe

$$S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon)^r}$$

durch eine analytische Funktion von $\varepsilon$ in geschlossener Form auszudrücken, so braucht man darin offenbar nur anstatt $\varepsilon$ nach und nach

$$\varepsilon+\eta,\quad \varepsilon+2\eta,\quad \varepsilon+3\eta,\quad \varepsilon+4\eta,\ldots.$$

zu setzen, um daraus auch die Summen

$$S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+\eta)^r},\quad S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+2\eta)^r},\quad S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+3\eta)^r},\quad S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon+4\eta)^r},\ldots,$$

und daher durch die Substitution aller dieser Werthe in I. endlich noch die Summe

$$S\Delta^m\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon)^r}$$

ebenfalls in geschlossener Form analytisch zu finden.

Dieses Verfahren ist zwar stets anwendbar, was für eine ganze additive Zahl auch $r$ sein mag, allein nur in dem Falle, wenn $r=1$ ist, ergeben sich durch dasselbe hinlänglich einfache Resultate, um es der Mühe werth zu erachten, besondere Formeln dafür aufzustellen.

Es ist nämlich, wie man sich leicht überzeugt,

$$\Delta^m\frac{1}{\varphi n+\varepsilon}=\frac{(-1)^m.m!.\eta^m}{(\varphi n+\varepsilon)(\varphi n+\varepsilon+\eta)(\varphi n+\varepsilon+2\eta)\ldots.(\varphi n+\varepsilon+m\eta)},$$

und folglich, wenn dieser Werth in I. und II. substituirt und zugleich durch $(-1)^m.m!.\eta^m$ beiderseits dividirt wird,

$$\text{III.}\quad S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon)(\varphi n+\varepsilon+\eta)\ldots.(\varphi n+\varepsilon+m\eta)}$$
$$=\frac{1}{m!\eta^m}\cdot\left\{\begin{array}{c}S\frac{1}{\varphi n+\varepsilon}-\binom{m}{1}.S\frac{1}{\varphi n+\varepsilon+\eta}+\binom{m}{2}.S\frac{1}{\varphi n+\varepsilon+2\eta}\\ -\binom{m}{3}.S\frac{1}{\varphi n+\varepsilon+3\eta}+\ldots.\end{array}\right\},$$

oder in kürzerer Bezeichnung:

$$\text{IV.}\quad S\frac{1}{(\varphi n+\varepsilon)(\varphi n+\varepsilon+\eta)\ldots.(\varphi n+\varepsilon+m\eta)}=\frac{(-1)^m}{m!\eta^m}.\Delta^m S\frac{1}{\varphi n+\varepsilon}.$$

Wird in diesen allgemeinen Formeln, welche für jede Funktion $\varphi n$ gelten, wenn nur die Reihe $S\frac{1}{\varphi n+\varepsilon}$ analytisch summirbar ist, insbesondere sowohl

$$\varphi n=\gamma n^2+\delta n,\quad \text{als auch}\quad \varphi n=\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)$$

angenommen, so erkennt man auf der Stelle, dass die unendlichen Reihen, deren allgemeine Glieder entweder

$$\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon+\eta)\ldots.(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon+m\eta)}$$

oder

$$\frac{1}{\left\{\begin{array}{c}(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon)(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon+\eta)\ldots. \\ \ldots.(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon+m\eta)\end{array}\right\}}$$

sind, in allen jenen Fällen analytisch summirt werden können, in welchen man vermöge §. 64. und §. 65. die Summen

$$S\frac{1}{\gamma n^2+\delta n+\varepsilon} \quad \text{oder} \quad S\frac{1}{\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon}$$

auf eben solche Weise auszudrücken im Stande ist.

Was ferner die Reihen mit abwechselnden Vorzeichen betrifft, ist leicht einzusehen, dass der Werth der Reihe

$$S\frac{(-1)^{n+1}}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon+\eta)\ldots.(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon+m\eta)}$$

erhalten werde, wenn man von dem doppelten Betrage der Summe

$$S\frac{1}{\left\{\begin{array}{c}(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon)(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon+\eta)\ldots. \\ \ldots.(\gamma(2n-1)^2+\delta(2n-1)+\varepsilon+m\eta)\end{array}\right\}}$$

den einfachen Werth von

$$S\frac{1}{(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon)(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon+\eta)\ldots.(\gamma n^2+\delta n+\varepsilon+m\eta)}$$

abzieht; demnach kann in allen Fällen, in welchen man beide letzteren Summen analytisch darzustellen vermag, auch die erstere in eben solcher Weise gefunden werden.

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, soll in die Einzelheiten dieser Substitutionen, die nichts Besonderes darbieten, nicht näher eingegangen werden.

## §. 123.

Aus dem in §. 77. betrachteten besonderen Falle, in welchem eine aus harmonischen Reihen der ersten Ordnung nach §. 47. entspringende neue Reihe gewiss algebraisch summirbar ist, kann auch für die Reihen höherer Ordnungen ein entsprechendes Gesetz abgeleitet werden.

In §. 77. ist erwiesen worden, dass unter Voraussetzung der Gleichungen

$$A + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = 0$$

und

$$a \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv \ldots \pmod{d}$$

die Summe der Reihe

$$x = A . \underset{a|d}{S} + A_1 . \underset{a_1|d}{S} + A_2 . \underset{a_2|d}{S} + A_3 . \underset{a_3|d}{S} + \ldots$$

durch den algebraischen Ausdruck

$$x = -A_1 . \overset{m}{\underset{a|d}{S}} - A_2 . \overset{m_1}{\underset{a|d}{S}} - A_3 . \overset{m_2}{\underset{a|d}{S}} - \ldots$$

dargestellt werden könne, wobei

$$m = \frac{a_1 - a}{d}, \quad m_1 = \frac{a_2 - a}{d}, \quad m_2 = \frac{a_3 - a}{d}, \ldots$$

ist. Werden die beiden eben angesetzten Werthe von $x$, jeder $(r-1)$mal, in Bezug auf die Veränderliche $a$ differenzirt, und dabei nicht ausser Acht gelassen, dass

$$\frac{\partial a_1}{\partial a} = \frac{\partial a_2}{\partial a} = \frac{\partial a_3}{\partial a} = \ldots = 1$$

ist, so findet man aus dem ersten Werthe von $x$:

$$\frac{\partial^{r-1} x}{\partial a^{r-1}}$$

$$= (-1)^{r-1} . (r-1)! . [A . \underset{(a|d)^r}{S} + A_1 . \underset{(a_1 d)^r}{S} + A_2 . \underset{(a_2|d)^r}{S} + A_3 . \underset{(a_3|d)^r}{S} + \ldots],$$

oder, wenn man die hier zwischen den Klammern enthaltene Reihe durch $x_r$ bezeichnet,

$$\frac{\partial^{r-1} x}{\partial a^{r-1}} = (-1)^{r-1} . (r-1)! . x_r;$$

aus dem obigen zweiten Werthe von $x$ hingegen ergibt sich:

$$\frac{\partial^{r-1} x}{\partial a^{r-1}} = (-1)^r . (r-1)! . [A_1 . \overset{m}{\underset{(a\,d)^r}{S}} + A_2 . \overset{m_1}{\underset{(a\,d)^r}{S}} + A_3 . \overset{m_2}{\underset{(a|d)^r}{S}} + \ldots].$$

Durch die Gleichsetzung der beiden gefundenen Werthe des Differenzialquotienten $\frac{\partial^{r-1} x}{\partial a^{r-1}}$ und nachherige Division derselben mit $(-1)^{r-1} . (r-1)!$ folgt sogleich:

$$\text{I.}\quad x_r = -A_1 . \underset{(a|d)^r}{\overset{m}{S}} - A_2 . \underset{(a|d)^r}{\overset{m_1}{S}} - A_3 . \underset{(a|d)^r}{\overset{m_2}{S}} - \ldots .,$$

woraus sich zeigt, dass die in §. 77. gefundene Summenformel I. nicht nur für die harmonischen Reihen der ersten, sondern auch jeder höheren Ordnung gelte, unter vollkommener Gleichheit der dabei zu Grunde liegenden Voraussetzungen.

Verbindet man hiemit noch den sogleich einleuchtenden Umstand, dass die in §. 78. gezeigte Erweiterung, welche man der Summirung nach §. 77. in der Anwendung zu geben vermag, in gleicher Weise auch bei den harmonischen Reihen höherer Ordnungen sich ausführen lässt, wie bei jenen der ersten Ordnung, so erkennt man auf der Stelle, dass dem ersten in §. 77. ausgesprochenen Satze folgender mehr umfassende Ausdruck gegeben werden könne: Jede aus harmonischen Reihen, welchen Ordnungen dieselben auch angehören mögen, nach Anleitung des §. 47. entspringende unendliche Reihe ist durch ein- oder mehrmalige Anwendung der Formel I. algebraisch summirbar, sobald alle einzelnen Reihen entweder zu einerlei Ordnung gehören, gleiche Differenzen haben, ihre Anfangszahlen in Bezug auf die gemeinschaftliche Differenz als Modul einander kongruent sind und überdiess die Summe ihrer Faktoren gleich 0 ist, oder sie wenigstens in Abtheilungen sich sondern lassen, deren jeder einzeln genommen die eben angegebenen Eigenschaften vollständig zukommen.

## §. 124.

Auch die wichtige, für die harmonischen Reihen der ersten Ordnung in §. 82. nachgewiesene Eigenschaft lässt sich ohne Schwierigkeit auf die höheren Ordnungen übertragen, indem leicht gezeigt werden kann, dass man bei allen jenen Reihen, für welche als unendliche betrachtet man die Summe nach Anleitung des §. 123. zu finden vermag, auch im Stande ist, die Summe einer unbestimmten endlichen Anzahl ihrer ersten Glieder durch einen geschlossenen algebraischen Ausdruck darzustellen.

Denn wie schon in §. 82. gesagt wurde, kann die Summe der $n$ ersten Glieder einer unendlichen Reihe dadurch erhalten werden, indem man von dem Werthe der ganzen Reihe die Summe derjenigen unendlichen Reihe abzieht, welche aus der früheren

hervorgeht, wenn man mit Beseitigung der ersten $n$ Glieder nur den übrigen Theil der Reihe summirt. Die erste von diesen beiden Summen ist durch die Formel I. des §. 123. ausgedrückt; die andere Summe wird, wie ebenfalls in §. 82. gezeigt wurde, aus der ersteren abgeleitet, wenn darin $a+nd$ anstatt $a$ substituirt wird, diese ist daher:

$$-A_1 . \underset{(a+nd|d)^r}{\overset{m}{S}} - A_2 . \underset{(a+nd|d)^r}{\overset{m_1}{S}} - A_3 . \underset{(a+nd|d)^r}{\overset{m_2}{S}} - \ldots,$$

durch deren Subtraktion von I. in §. 123. man für die Summe der $n$ ersten Glieder den Ausdruck erhält:

I.

$$A_1 . \left( \underset{(a+nd|d)^r}{\overset{m}{S}} - \underset{(a|d)^r}{\overset{m}{S}} \right) + A_2 . \left( \underset{(a+nd|d)^r}{\overset{m_1}{S}} - \underset{(a|d)^r}{\overset{m_1}{S}} \right) + A_3 . \left( \underset{(a+nd|d)^r}{\overset{m_2}{S}} - \underset{(a|d)^r}{\overset{m_2}{S}} \right) + \ldots$$

Dieser Ausdruck ist vermöge der in §. 123. aufgestellten Voraussetzungen stets ein endlicher; er ist überdiess ein algebraischer, wenn alle Faktoren $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ...., so wie $a$ und $d$ ebenfalls algebraisch sind; im entgegengesetzten Falle wird die erhaltene Summe zwar nicht algebraisch, aber doch analytisch sein, was der schon in §. 80. beigefügten Bemerkung vollkommen entspricht.

Noch bedarf es wohl nur einer einfachen Erinnerung, um einzusehen, dass dann, wenn die Summe der unendlichen Reihe nur durch die wiederholte Anwendung der Formel I. des §. 123. auf die verschiedenen Abtheilungen der einzelnen Reihen gefunden werden kann, die Summe der endlichen Reihe ebenfalls nur durch mehrmalige Anwendung der obigen Formel I. auf die nämlichen Abtheilungen sich ergeben werde.

Es wird nicht für unangemessen erachtet werden, das in §. 123. und §. 124. Gesagte durch ein sehr einfaches Beispiel möglichst klar zu machen. Als solches mag die Reihe dienen, deren allgemeines Glied

$$\frac{(2n-1)(2n+3)x^2-1}{(2nx+1-x)^2 . (2nx+1+3x)^2}$$

oder, in Partialbrüche zerlegt,

$$\frac{\frac{1}{4x}}{2nx+1-x} - \frac{\frac{1}{4x}}{2nx+1+3x} - \frac{\frac{1}{4x}}{(2nx+1-x)^2} + \frac{\frac{1}{4x}}{(2nx+1+3x)^2}$$

ist, und welche sowohl als unendliche, wie auch als endliche summirt werden soll.

Damit diese Reihe als unendliche nach §. 123. oder als endliche nach §. 124. sich summiren lasse, ist vor Allem nothwendig, die beiden Reihen der ersten Ordnung von jenen der zweiten Ordnung zu trennen, weil nur bei solcher abgesonderter Behandlung die in dem Satze des §. 123. ausgesprochenen Bedingungen eintreffen können. Nach Vollzug dieser Trennung überzeugt man sich sogleich, dass bei jeder einzelnen Abtheilung den gedachten Bedingungen wirklich vollständig Genüge geleistet werde. Denn erstlich gehören die Reihen einer jeden Abtheilung zu einerlei Ordnung; dann ist die Differenz bei allen Reihen dieselbe, nämlich $2x$; die Anfangszahlen bei jedem Reihenpaare sind $a=1+x$, $a_1=1+5x$, wesshalb $a\equiv a_1 \pmod{2x}$ und $m=\frac{a_1-a}{2x}=2$ ist; endlich sind die Faktoren der zwei Reihen der ersten Ordnung:

$$A=\frac{1}{4x},\quad A_1=-\frac{1}{4x},\quad \text{mithin } A+A_1=0,$$

und ebenso die Faktoren der zwei Reihen der zweiten Ordnung:

$$A=-\frac{1}{4x},\quad A_1=\frac{1}{4x},\quad \text{folglich wieder } A+A_1=0.$$

In Gemässheit dieser Werthe ergibt sich nach der Formel I. des §. 123. die Summe der zwei Reihen der ersten Ordnung, als unendliche betrachtet,

$$\frac{1}{4x}\cdot \overset{2}{S}_{1+x|2x}=\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+3x}\right),$$

und die Summe der zwei Reihen der zweiten Ordnung:

$$-\frac{1}{4x}\cdot \overset{2}{S}_{(1+x|2x)^2}=-\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+3x)^2}\right),$$

woraus die Summe der sämmtlichen vier Reihen, als unendliche betrachtet, durch

$$\text{I.}\quad \frac{1}{4x}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+3x}-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+3x)^2}\right)=\frac{1+3x+3x^2}{(1+x)^2.(1+3x)^2}$$

ausgedrückt erhalten wird.

Für die endlichen Summen hingegen findet man nach I. in §. 124. die Werthe von den zwei Reihen der ersten Ordnung:

$$-\frac{1}{4x}\left(\overset{2}{S}_{1+x+2nx|2x}-\overset{2}{S}_{1+x|2x}\right)=\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+3x}-\frac{1}{2nx+1+x}-\frac{1}{2nx+1+3x}\right),$$

für die zwei Reihen der zweiten Ordnung:

$$\frac{1}{4x}\left(\sum_{(1+x+2nx)(2x)^3}^{2} - \sum_{(1+x)(2x)^3}^{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+3x)^2} - \frac{1}{(2nx+1+x)^2} - \frac{1}{(2nx+1+3x)^2}\right),$$

und daher nach gehöriger Zusammenrechnung und Abkürzung für die Summe von $n$ Gliedern der vorgelegten Reihe den Ausdruck:

$$\text{II.}\quad \frac{1+3x+3x^2}{(1+x)^2.(1+3x)^2} - \left(\frac{n+1+(2n+1)(2n+3)(nx+1+x)x}{(2nx+1+x)^2.(2nx+1+3x)^2}\right).$$

In den eben erhaltenen Summenformeln I. und II. ist es offenbar gestattet, anstatt $x$ jede beliebige, nicht nur rationale oder algebraische, sondern auch transzendente oder komplexe Zahl anzunehmen. Desshalb lassen sich durch das Gesetz des §. 123. zuweilen Reihen summiren, welche demselben beim ersten Anblicke gar nicht zu unterliegen scheinen, und deren Summen auf anderem Wege nicht leicht aufzufinden sein dürften.

---

## Schlussbemerkung.

Die Ausarbeitung der gegenwärtigen Abhandlung ist bereits im Jahre 1860 begonnen worden, in welchem Jahre ich öffentliche Vorlesungen über die harmonischen Reihen an der Universität zu Graz abhielt. Erst nach der vor Kurzem erfolgten Vollendung meiner Arbeit ist mir der schöne Aufsatz des Herrn Professor Dr. Oettinger über bestimmte Integrale im 39. Theile dieses Archivs der Mathematik und Physik zu Händen gekommen, in welchem derselbe eine mit der meinigen sehr nahe übereinstimmende Bezeichnung der harmonischen Reihen höherer Ordnungen und zur Berechnung der Werthe ihrer Summen gleiche Hilfsmittel mit mir anwendet. Der Zweck dieser Berechnung aber ist bei ihm und bei mir ein ganz verschiedener, indem Herr Hofrath Oettinger diese Summen ausschliesslich zur Werthbestimmung von Integralen gebraucht, während sie bei mir eben so ausschliesslich zur Summirung von Reihen zu dienen haben.

In Bezug auf die harmonischen Reihen der ersten Ordnung steht mein Aufsatz von jenem Oettinger's ganz unabhängig da.

Unter diesen Umständen konnte ich mich nicht veranlasst finden, in meiner Arbeit irgend eine wesentliche Aenderung vor-

zunehmen, sondern übergebe sie ganz so, wie ich sie vollendete der öffentlichen Beurtheilung.

Um jedoch dabei jede Kollision hintan zu halten, erkläre ich hiemit ausdrücklich, was sich zwar eigentlich von selbst versteht, dass ich die Priorität des Herrn Hofrathes Oettinger in allen Punkten, in welchen seine Abhandlung mit der meinigen zusammentrifft, auf das Bereitwilligste unbedingt anerkenne.

Graz am 12. März 1863.

Der Verfasser.

---

## XIII.

## Ueber das ballistische Problem, unter Voraussetzung eines der erlangten Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstandes.

Von

dem Herausgeber.

### §. 1.

In der Abhandlung Thl. XXII. Nr. XXVI. habe ich, unter Voraussetzung eines dem Quadrate der erlangten Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstandes, eine Lösung des ballistischen Problems gegeben, bei der ich zugleich auf gewisse Integrale geführt worden bin, die Herr Doctor Ligowski in der Abhandlung Thl. XLII. Nr. III. mittelst der hyperbolischen Functionen in interessanter Weise weiter entwickelt hat. Ob das in der genannten Abhandlung von mir, wie dies fast immer bei Untersuchungen dieser Art geschieht, zu Grunde gelegte obige Newton'sche Gesetz des Luftwiderstandes richtig ist, ist bekanntlich immer

noch sehr fraglich; und will man der Wahrheit die Ehre geben, so kann man überhaupt nur sagen, dass das wahre Gesetz des Luftwiderstandes noch gar nicht gefunden ist, und wir uns bei diesen Untersuchungen immer noch mit blossen hypothetischen Voraussetzungen behelfen müssen. Ueberdies hat die Voraussetzung eines dem Quadrate der erlangten Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstandes Das gegen sich, dass unter dieser Annahme die Lösung des ballistischen Problems in völlig geschlossenen analytischen Ausdrücken bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis nicht möglich ist, überhaupt die analytische Lösung verschiedene theoretische Schwierigkeiten darbietet. Dagegen ist, unter der Voraussetzung eines der erlangten Geschwindigkeit, oder — bestimmter ausgedrückt — der ersten Potenz der erlangten Geschwindigkeit, proportionalen Luftwiderstandes das Problem in der schönsten Weise in völlig geschlossenen analytischen Ausdrücken lösbar, und ob der Widerstand wirklich der ersten oder zweiten, oder überhaupt einer Potenz der erlangten Geschwindigkeit genau proportional sei, dürfte gegenwärtig immer noch, wenigstens theilweise, eine offene Frage sein und wohl noch lange Zeit eine solche bleiben.

Bei dem grossen Interesse, welches gegenwärtig durch die früher nicht für möglich gehaltene grosse Vervollkommnung der Wurfgeschütze die Ballistik von Neuem mit vollstem Rechte für sich in Anspruch nimmt, dürfte es, unter den oben erwähnten Umständen, nicht unangemessen und den Zwecken des Archivs nicht entgegen erscheinen, wenn ich in dieser Abhandlung das ballistische Problem unter Voraussetzung eines der erlangten Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstandes etwas weiter entwickele, als dies bisher geschehen sein dürfte, wobei ich mir übrigens natürlich gar nicht einfallen lasse, und bei diesem Gegenstande auch gar nicht einfallen lassen kann, hier absolut Neues geben zu wollen, welche Forderung ja bekanntlich auch von dem Archiv nicht unbedingt gestellt wird und gestellt werden soll. Es reicht mir für jetzt hin, diesen Gegenstand, wie ich glaube, in nicht ganz uneigenthümlicher Weise, bei völlig strenger Behandlung, von Neuem in Anregung gebracht zu haben, was mir bei dem schon erwähnten grossen Interesse, das die Ballistik gegenwärtig mit vollem Rechte für sich in Anspruch nimmt, jetzt wohl an der Zeit zu sein schien. Wegen der im Folgenden in Anwendung gebrachten Grundformeln und Bezeichnungen verweise ich hier, ohne jedwede weitere Anführungen im Folgenden, ein für alle Mal auf meine Abhandlung Thl. XXI. Nr. XXXI. über die allgemeine Theorie der freien krummlinigen Bewegung, worin alles hier Nothwendige zu finden ist.

§. 2.

Am Anfange der Bewegung wirke auf den Punkt $A$ eine Momentankraft $F$, welche für sich eine geradlinige gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $V$ erzeugt, und deren Richtung mit den positiven Theilen dreier durch den Anfangspunkt $(abc)$ der Bewegung gelegter, den primitiven Axen der $x$, $y$, $z$ paralleler Axen die 180° nicht übersteigenden Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ einschliesst. Ferner wirke auf den Punkt $A$ in jedem Punkte $(x_t y_t z_t)$ seiner Bahn eine constante Zeitkraft $F_t' = 2G$, deren Richtungen sich stets parallel bleiben sollen, und die auch immer nach derselben Seite hin wirken soll, wobei wir die von der Richtung der Kraft $F_t'$ mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt $(x_t y_t z_t)$ gelegter, den primitiven Axen der $x$, $y$, $z$ paralleler Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch $\varphi_t'$, $\psi_t'$, $\chi_t'$ bezeichnen wollen. Endlich wirke auf den Punkt $A$ in jedem Punkte $(x_t y_t z_t)$ seiner Bahn eine Zeitkraft $F_t''$, welche der von dem Punkte $A$ in diesem Punkte seiner Bahn erlangten Geschwindigkeit proportional und deren Richtung überall der Richtung dieser Geschwindigkeit direct entgegengesetzt ist. Die von der Richtung dieser Kraft $F_t''$ mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt $(x_t y_t z_t)$ gelegter, den primitiven Axen der $x$, $y$, $z$ paralleler Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel sollen durch $\varphi_t''$, $\psi_t''$, $\chi_t''$ bezeichnet werden.

In dem Punkte $(x_t y_t z_t)$ lassen sich nach drei durch denselben gelegten, den Axen der $x$, $y$, $z$ parallelen Axen die Kräfte $F_t'$ und $F_t''$ respective in die Kräfte

$$F_t' \cos\varphi_t', \quad F_t' \cos\psi_t', \quad F_t' \cos\chi_t'$$

und

$$F_t'' \cos\varphi_t'', \quad F_t'' \cos\psi_t'', \quad F_t'' \cos\chi_t''$$

zerlegen, und die Kräfte, in welche sich nach denselben drei Axen die Resultirende der Kräfte $F_t'$ und $F_t''$ zerlegen lässt, sind also offenbar:

$$F_t' \cos\varphi_t' + F_t'' \cos\varphi_t'',$$
$$F_t' \cos\psi_t' + F_t'' \cos\psi_t'',$$
$$F_t' \cos\chi_t' + F_t'' \cos\chi_t''.$$

Folglich muss man in den bekannten allgemeinen Gleichungen der freien krummlinigen Bewegung eines Punktes, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$F_t \cos\varphi_t = F_t' \cos\varphi_t' + F_t'' \cos\varphi_t'',$$

$$F_t \cos\psi_t = F_t' \cos\psi_t' + F_t'' \cos\psi_t'',$$

$$F_t \cos\chi_t = F_t' \cos\chi_t' + F_t'' \cos\chi_t''$$

setzen. Um nun aber die Untersuchung möglichst zu vereinfachen, nehmen wir die durch die Richtungen der Kräfte $F$ und $F_0'$ bestimmte Ebene als Ebene der $xy$ und den positiven Theil der Axe der $x$ der Richtung der Kraft $F_0'$ parallel und von dem Anfange der Coordinaten aus nach der entgegengesetzten Richtung hin liegend wie die Richtung dieser Kraft; so ist offenbar $c=0$, $\gamma=90^0$, und wegen der gemachten Voraussetzungen allgemein:

$$\varphi_t' = 180^0, \quad \psi_t' = 90^0, \quad \chi_t' = 90^0.$$

Also ist:

$$F_t' \cos\varphi_t' = -2G, \quad F_t' \cos\psi_t' = 0, \quad F_t' \cos\chi_t' = 0.$$

Weil ferner nach der Voraussetzung $F_t''$ der von dem Punkte $A$ in dem Punkte $(x_t y_t z_t)$ seiner Bahn erlangten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$ proportional ist, so ist, wenn $\mu$ eine gewisse constante positive Grösse bezeichnet,

$$F_t'' = \mu \mathfrak{v}_t.$$

Auch ist nach der Voraussetzung die Richtung der Kraft $F_t''$ der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$ stets direct entgegengesetzt, und folglich, wenn, so wie $\mathfrak{v}_t$, auch $\xi_t$, $\eta_t$, $\zeta_t$ ihre aus Thl. XXI. Nr. XXXI. bekannte Bedeutung behalten,

$$\varphi_t'' = 180^0 - \xi_t, \quad \psi_t'' = 180^0 - \eta_t, \quad \chi_t'' = 180^0 - \zeta_t;$$

also

$$F_t'' \cos\varphi_t'' = -\mu \mathfrak{v}_t \cos\xi_t, \quad F_t'' \cos\psi_t'' = -\mu \mathfrak{v}_t \cos\eta_t,$$
$$F_t'' \cos\chi_t'' = -\mu \mathfrak{v}_t \cos\zeta_t.$$

Nimmt man dies mit dem Vorhergehenden zusammen, so ergiebt sich:

$$F_t \cos\varphi_t = -2G - \mu \mathfrak{v}_t \cos\xi_t,$$
$$F_t \cos\psi_t = -\mu \mathfrak{v}_t \cos\eta_t,$$
$$F_t \cos\chi_t = -\mu \mathfrak{v}_t \cos\zeta_t.$$

Bekanntlich ist aber

$$\mathfrak{v}_t = \sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}$$

und

$$\cos\xi_t = \frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}},$$

$$\cos\eta_t = \frac{\frac{\partial y_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}},$$

$$\cos\zeta_t = \frac{\frac{\partial z_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}};$$

also

$$\mathfrak{P}_t\cos\xi_t = \frac{\partial x_t}{\partial t}, \quad \mathfrak{P}_t\cos\eta_t = \frac{\partial y_t}{\partial t}, \quad \mathfrak{P}_t\cos\zeta_t = \frac{\partial z_t}{\partial t};$$

und folglich nach dem Obigen:

$$F_t\cos\varphi_t = -2G - \mu\frac{\partial x_t}{\partial t},$$

$$F_t\cos\psi_t = -\mu\frac{\partial y_t}{\partial t},$$

$$F_t\cos\chi_t = -\mu\frac{\partial z_t}{\partial t};$$

oder in der aus den früheren oben erwähnten Untersuchung kannten Bezeichnung:

$$X_t = -2G - \mu\frac{\partial x_t}{\partial t}, \quad Y_t = -\mu\frac{\partial y_t}{\partial t}, \quad Z_t = -\mu\frac{\partial z_t}{\partial t}.$$

Da nun bekanntlich

$$\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} = X_t, \quad \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} = Y_t, \quad \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2} = Z_t$$

die allgemeinen Gleichungen der freien krummlinigen Be in ihrer einfachsten und ursprünglichsten Gestalt, auf welc rückzugehen hier zweckmässig ist, sind, so erhalten wir seren vorliegenden Fall die folgenden Gleichungen:

$$1) \ldots \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} = -2G - \mu\frac{\partial x_t}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} = -\mu\frac{\partial y_t}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2} = -\mu$$

## §. 3.

Die dritte der drei vorhergehenden Gleichungen 1) ka auf die Form

$$\frac{\frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2}}{\frac{\partial z_t}{\partial t}} = -\mu,$$

d. i., wie sogleich erhellet, auf die Form

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)}{\frac{\partial z_t}{\partial t}} = -\mu\partial t$$

bringen. Also ist, wenn $C_1''$ eine Constante bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2 = C_1'' - \mu t$$

oder

$$l.\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2 = 2C_1'' - 2\mu t,$$

und folglich, wenn $e$ seine bekannte Bedeutung hat:

$$\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2 = e^{2C_1'' - 2\mu t} = e^{2C_1''}.e^{-2\mu t},$$

oder, wenn wir

$$C'' = e^{2C_1''}$$

setzen:

$$\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2 = C''e^{-2\mu t}.$$

Die von der Projection des Punktes $A$ auf der Axe der $z$ vermöge der Wirkung der Zeitkraft $Z_t$ am Ende der Zeit $t$ erlangte Geschwindigkeit ist bekanntlich

$$\frac{\partial(z_t - c - Vt\cos\gamma)}{\partial t},$$

d. i., weil unter den gemachten Voraussetzungen $\gamma = 90^0$, $\cos\gamma = 0$ ist:

$$\frac{\partial z_t}{\partial t}.$$

Weil nun diese Geschwindigkeit für $t = 0$ offenbar verschwindet, so verschwindet

$$\frac{\partial z_t}{\partial t}$$

für $t = 0$, und nach dem Obigen ist also für $t = 0$:

$$C'' e^{-2\mu t} = 0,$$

folglich $C''=0$. Daher ist nach dem Obigen allgemein:

$$\frac{\partial z_t}{\partial t}=0,$$

also $z_t$ eine Constante. Weil aber $z_0=c=0$ ist, so ist allgemein $z_t=0$, und die Trajectoria liegt also im vorliegenden Falle ganz in der Ebene der $xy$, ist folglich eine Curve von einfacher Krümmung, zu deren vollständiger Charakterisirung die beiden ersten der Gleichungen 1), nämlich die beiden Gleichungen

$$2) \ldots . \quad \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}=-2G-\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}=-\mu\frac{\partial y_t}{\partial t},$$

hinreichen, die wir daher auch von jetzt an unserer ferneren Betrachtung allein zum Grunde legen werden.

## §. 4.

Um nun die erste der beiden Gleichungen 2), nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}=-2G-\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}$$

zu integriren, wollen wir

$$u_t=\frac{\partial x_t}{\partial t}, \text{ also } \frac{\partial u_t}{\partial t}=\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}$$

setzen; dann erhält die zu integrirende Gleichung die Gestalt

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}=-2G-\mu u_t,$$

woraus sich

$$\partial t=-\frac{\partial u_t}{2G+\mu u_t},$$

und folglich durch Integration, nach einer allgemein bekannten Integralformel, wenn $C_1$ eine Constante bezeichnet,

$$t=C_1-\frac{1}{2\mu}l.(2G+\mu u_t)^2 \quad \text{oder} \quad t=C_1-\frac{1}{2\mu}l.(2G+\mu\frac{\partial x_t}{\partial t})^2$$

ergiebt. Bekanntlich ist nun:

$$\frac{\partial(x_t-a-Vt\cos\alpha)}{\partial t}, \text{ d. i. } \frac{\partial x_t}{\partial t}-V\cos\alpha,$$

die von der Projection des Punktes $A$ auf der Axe der $x$ vermöge der Wirkung der Zeitkraft $X_t$ am Ende der Zeit $t$ erlangte Geschwindigkeit, und da diese Geschwindigkeit für $t=0$ offenbar verschwindet, so ist $V\cos\alpha$ der Werth, welchen $\frac{\partial x_t}{\partial t}$ für $t=0$ erhält. Dies führt nach dem Obigen zu der Gleichung:

$$0 = C_1 - \frac{1}{2\mu} l.(2G+\mu V\cos\alpha)^2,$$

aus der sich

$$C_1 = \frac{1}{2\mu} l.(2G+\mu V\cos\alpha)^2$$

ergiebt. Also ist nach dem Obigen:

$$2\mu t = l.\left(\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{2G+\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}}\right)^2,$$

oder, wenn $e$ seine bekannte Bedeutung hat,

$$\left(\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{2G+\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}}\right)^2 = e^{2\mu t},$$

und folglich:

$$\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{2G+\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}} = \pm e^{\mu t}.$$

Weil nach dem Obigen

$$\frac{\partial x_t}{\partial t} - V\cos\alpha$$

die von der Projection des Punktes $A$ auf der Axe der $x$ vermöge der Wirkung der Zeitkraft $X_t$ am Ende der Zeit $t$ erlangte Geschwindigkeit ist, und es in der Natur der Sache liegt, dass sich diese Geschwindigkeit zugleich mit der Zeit nur stetig ändern kann, so kann sich auch

$$\frac{\partial x_t}{\partial t},$$

und folglich auch

$$\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{2G+\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}},$$

zugleich mit der Zeit nur stetig ändern. Ein stetiger Uebergang einer Grösse von dem $\left\{\begin{matrix}\text{Positiven}\\\text{Negativen}\end{matrix}\right\}$ zu dem $\left\{\begin{matrix}\text{Negativen}\\\text{Positiven}\end{matrix}\right\}$ kann aber bloss durch Null hindurch Statt finden. Aus der Gleichung

$$\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{2G+\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}}=\pm e^{\mu t}$$

folgt aber auf der Stelle, dass

$$\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{2G+\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}}$$

nie verschwinden, und daher nach dem Vorhergehenden auch niemals sein Zeichen ändern kann. Für $t=0$ erhält aber nach dem Obigen $\frac{\partial x_t}{\partial t}$ den Werth $V\cos\alpha$, also

$$\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{2G+\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}}$$

den Werth

$$\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{2G+\mu V\cos\alpha}=1,$$

so dass also die Grösse

$$\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{2G+\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}}$$

für $t=0$, also nach dem Vorhergehenden stets positiv ist. Deshalb muss man in der Gleichung

$$\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{2G+\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}}=\pm e^{\mu t}$$

das obere Zeichen nehmen, d. h. man muss

$$\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{2G+\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}}=e^{\mu t}$$

setzen, woraus sich leicht

$$3)\ldots\ldots\quad\frac{\partial x_t}{\partial t}=\frac{2G+\mu V\cos\alpha}{\mu}e^{-\mu t}-\frac{2G}{\mu},$$

oder

$$\partial x_t = \frac{2G + \mu V \cos\alpha}{\mu} e^{-\mu t} \partial t - \frac{2G}{\mu} \partial t$$

ergiebt. Integrirt man aber diese Gleichung, so erhält man, wenn $C$ eine Constante bezeichnet, nach bekannten Integralformeln:

$$x_t = C - \frac{2G}{\mu} t - \frac{2G + \mu V \cos\alpha}{\mu^2} e^{-\mu t};$$

und weil nun $x_0 = a$ ist, so ist:

$$a = C - \frac{2G + \mu V \cos\alpha}{\mu^2},$$

also:

$$C = a + \frac{2G + \mu V \cos\alpha}{\mu^2},$$

folglich:

$$4) \ldots\ldots x_t = a - \frac{2G}{\mu} t + \frac{2G + \mu V \cos\alpha}{\mu^2} (1 - e^{-\mu t}).$$

Um die zweite der Gleichungen 2), nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial y_t}{\partial t},$$

zu integriren, wollen wir

$$v_t = \frac{\partial y_t}{\partial t}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial v_t}{\partial t} = \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}$$

setzen, wodurch die zu integrirende Gleichung die Gestalt

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} = -\mu v_t, \quad \partial t = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial v_t}{v_t}$$

erhält. Also ist, wenn $C_1'$ eine Constante bezeichnet:

$$t = C_1' - \frac{1}{2\mu} l . v_t^2 = C_1' - \frac{1}{2\mu} l . \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2.$$

Nach dem Obigen ist aber:

$$\frac{\partial (y_t - b - Vt\cos\beta)}{\partial t},$$

d. i.

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} - V\cos\beta$$

die von der Projection des Punktes $A$ auf der Axe der $y$ vermöge der Wirkung der Zeitkraft $Y_t$ am Ende der Zeit $t$ erlangte Geschwindigkeit, und da diese Geschwindigkeit für $t=0$ verschwindet, so ist nach dem Vorhergehenden $V\cos\beta$ der Werth, welchen $\frac{\partial y_t}{\partial t}$ für $t=0$ erhält. Also ist:

$$C_1' - \frac{1}{2\mu} l.(V\cos\beta)^2 = 0, \quad C_1' = \frac{1}{2\mu} l.(V\cos\beta)^2;$$

folglich nach dem Obigen:

$$2\mu t = l.\left(\frac{V\cos\beta}{\frac{\partial y_t}{\partial t}}\right)^2,$$

oder

$$\left(\frac{V\cos\beta}{\frac{\partial y_t}{\partial t}}\right)^2 = e^{2\mu t},$$

also

$$\frac{V\cos\beta}{\frac{\partial y_t}{\partial t}} = \pm\, e^{\mu t}.$$

Durch ein ganz ähnliches Raisonnement wie oben überzeugt man sich aber auf der Stelle, dass man auch in dieser Gleichung das obere Zeichen nehmen, also

$$\frac{V\cos\beta}{\frac{\partial y_t}{\partial t}} = e^{\mu t}$$

setzen muss, woraus sich

$$5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial y_t}{\partial t} = V\cos\beta e^{-\mu t}$$

oder

$$\partial y_t = V\cos\beta e^{-\mu t}\partial t,$$

also durch Integration, wenn $C'$ eine Constante bezeichnet,

$$y_t = C' - \frac{V\cos\beta}{\mu} e^{-\mu t}$$

ergiebt. Weil aber $y_0 = b$ ist, so ist:

$$b = C' - \frac{V\cos\beta}{\mu}, \quad C' = b + \frac{V\cos\beta}{\mu};$$

also

$$6) \ldots\ldots\ldots y_t = b + \frac{V\cos\beta}{\mu}(1 - e^{-\mu t}).$$

Aus dieser Gleichung erhält man:

$$1 - e^{-\mu t} = \frac{\mu(y_t - b)}{V\cos\beta},$$

also

$$e^{-\mu t} = 1 - \frac{\mu(y_t - b)}{V\cos\beta} = \frac{V\cos\beta - \mu(y_t - b)}{V\cos\beta},$$

woraus

$$7) \ldots t = -\frac{1}{\mu} l\{1 - \frac{\mu(y_t - b)}{V\cos\beta}\} = -\frac{1}{\mu} l \frac{V\cos\beta - \mu(y_t - b)}{V\cos\beta}.$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung 4) ein, so erhält man für die Trajectoria die Gleichung

$$8) \quad x_t = a + \frac{2G + \mu V\cos\alpha}{\mu V\cos\beta}(y_t - b) + \frac{2G}{\mu^2} l\{1 - \frac{\mu(y_t - b)}{V\cos\beta}\}$$

oder

$$9) \quad x_t = a + \frac{2G + \mu V\cos\alpha}{\mu V\cos\beta}(y_t - b) + \frac{2G}{\mu^2} l \frac{V\cos\beta - \mu(y_t - b)}{V\cos\beta}.$$

Nimmt man jetzt, was offenbar immer verstattet ist, den positiven Theil der Axe der $y$ so an, dass der Winkel $\beta$ nicht grösser als $90^0$ ist, so ist offenbar

$$\alpha = 90^0 \mp \beta,$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Richtung der Kraft $F$ auf der positiven oder negativen Seite der zweiten Axe eines durch den Anfang der Bewegung parallel mit dem Systeme der $xy$ gelegten Systems liegt; und bezeichnen wir also den $90^0$ nicht übersteigenden, und, jenachdem die Richtung der Kraft $F$ auf der positiven oder negativen Seite der zweiten Axe eines durch den Anfang der Bewegung parallel mit dem Systeme der $xy$ gelegten Systems liegt, als positiv oder negativ betrachteten Neigungswinkel der Richtung der Kraft $F$ gegen den positiven Theil der zweiten Axe eines durch den Anfang der Bewegung parallel mit dem Systeme der $xy$ gelegten Systems durch $i$, so ist offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\beta = \pm i, \quad \alpha = 90^0 \mp \beta = 90^0 - i;$$

folglich allgemein:

$$\cos\alpha = \sin i, \quad \cos\beta = \cos i.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$10) \ldots\ldots \frac{\partial x_t}{\partial t} = \frac{2G+\mu V\sin i}{\mu} e^{-\mu t} - \frac{2G}{\mu}$$

und

$$11) \ldots\ldots x_t = a - \frac{2G}{\mu} t + \frac{2G+\mu V\sin i}{\mu^2}(1-e^{-\mu t});$$

ferner

$$12) \ldots\ldots\ldots \frac{\partial y_t}{\partial t} = V\cos i e^{-\mu t}$$

und

$$13) \ldots\ldots\ldots y_t = b + \frac{V\cos i}{\mu}(1-e^{-\mu t});$$

endlich ist:

$$14) \quad x_t = a + \frac{2G+\mu V\sin i}{\mu V\cos i}(y_t-b) + \frac{2G}{\mu^2} l\{1 - \frac{\mu(y_t-b)}{V\cos i}\}$$

oder

$$15) \quad x_t = a + \frac{2G+\mu V\sin i}{\mu V\cos i}(y_t-b) + \frac{2G}{\mu^2} l\frac{V\cos i - \mu(y_t-b)}{V\cos i}.$$

Vertauscht man, natürlich nur in der Bezeichnung, $a$, $b$ und $x_t$, $y_t$ mit einander, so werden die vorhergehenden Gleichungen:

$$16) \ldots\ldots\ldots \frac{\partial x_t}{\partial t} = V\cos i e^{-\mu t}$$

und

$$17) \ldots\ldots x_t = a + \frac{V\cos i}{\mu}(1-e^{-\mu t});$$

ferner

$$18) \ldots\ldots \frac{\partial y_t}{\partial t} = \frac{2G+\mu V\sin i}{\mu} e^{-\mu t} - \frac{2G}{\mu}$$

und

$$19) \ldots\ldots y_t = b - \frac{2G}{\mu} t + \frac{2G+\mu V\sin i}{\mu^2}(1-e^{-\mu t});$$

endlich

$$20) \quad y_t = b + \frac{2G+\mu V\sin i}{\mu V\cos i}(x_t-a) + \frac{2G}{\mu^2} l\{1 - \frac{\mu(x_t-a)}{V\cos i}\}$$

oder

21) $$y_t = b + \frac{2G+\mu V\sin i}{\mu V\cos i}(x_t-a) + \frac{2G}{\mu^2} l \frac{V\cos i-\mu(x_t-a)}{V\cos i}.$$

Weil bekanntlich

$$\mathfrak{v}_t = \sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}$$

ist, so ist nach 16) und 18):

22) $$\mathfrak{v}_t = \sqrt{V^2\cos i^2 e^{-2\mu t} + \left\{\frac{2G+\mu V\sin i}{\mu} e^{-\mu t} - \frac{2G}{\mu}\right\}^2},$$

oder, wie man leicht findet:

23) . . . . . $\mathfrak{v}_t$

$$= \frac{1}{\mu}\sqrt{4G^2 - 4G(2G+\mu V\sin i)e^{-\mu t} + (4G^2+4\mu G V\sin i+\mu^2 V^2)e^{-2\mu t}}.$$

In diese Gleichungen könnte man leicht noch den folgenden, aus 17) sich unmittelbar ergebenden Werth von $e^{-\mu t}$ einführen:

24) . . . . . $$e^{-\mu t} = \frac{V\cos i-\mu(x_t-a)}{V\cos i},$$

woraus sich auch

25) . . . . . $$e^{\mu t} = \frac{V\cos i}{V\cos i-\mu(x_t-a)},$$

also:

26) . . . . . $$t = \frac{1}{\mu} l \frac{V\cos i}{V\cos i-\mu(x_t-a)}$$

ergiebt.

Die Winkel $\xi_t$, $\eta_t$ erhält man mittelst der Formeln:

27) . . .
$$\begin{cases} \cos\xi_t = \dfrac{\frac{\partial x_t}{\partial t}}{\mathfrak{v}_t} = \dfrac{V\cos i e^{-\mu t}}{\mathfrak{v}_t}, \\ \cos\eta_t = \dfrac{\frac{\partial y_t}{\partial t}}{\mathfrak{v}_t} = \dfrac{(2G+\mu V\sin i)e^{-\mu t}-2G}{\mu\mathfrak{v}_t}; \end{cases}$$

bei deren weiterer Entwickelung wir uns nicht aufhalten wollen.

## §. 5.

Weil in dem höchsten Punkte der Trajectoria deren Berüh-

rende der Axe der $x$ parallel ist, d. h. mit derselben eine schwindenden oder 180° betragenden Winkel einschliesst, in diesem Punkte

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t}=0,$$

und aus dieser Gleichung muss daher die Höhe des W welche wir durch $H$ bezeichnen wollen, bestimmt werden. 16) und 18) ist aber:

$$28)\ldots\ \frac{\partial y_t}{\partial x_t}=\frac{2G+\mu V\sin i}{\mu V\cos i}-\frac{2G}{\mu V\cos i}e^{\mu t},$$

und bezeichnen wir also die Zeit, welche der Punkt $A$ gebr um vom Anfangspunkte der Bewegung bis zu seinem hö Punkte zu gelangen, durch $T$, so haben wir nach dem V gehenden zur Bestimmung von $T$ die Gleichung

$$2G+\mu V\sin i-2Ge^{\mu T}=0,$$

woraus sich

$$e^{\mu T}=\frac{2G+\mu V\sin i}{2G}=1+\frac{\mu V\sin i}{2G},$$

also

$$29)\ldots\ldots\ldots\ T=\frac{1}{\mu}l(1+\frac{\mu V\sin i}{2G})$$

ergiebt. Zur Bestimmung der Höhe $H$ des Wurfs habe aber nach 19) die Gleichung

$$H=b-\frac{2G}{\mu}T+\frac{2G+\mu V\sin i}{\mu^2}(1-e^{-\mu T}),$$

woraus sich mittelst des Vorhergehenden leicht

$$30)\ldots\ldots H=b+\frac{V\sin i}{\mu}-\frac{2G}{\mu^2}l(1+\frac{\mu V\sin i}{2G})$$

ergiebt.

## §. 6.

Bezeichnen wir die Zeit, welche der Punkt $A$ gebrauc vom Anfangspunkte der Bewegung bis in den Durchschnitt seiner Trajectoria mit der Axe der $x$ zu gelangen, durch muss nach 19) diese Zeit $\mathfrak{T}$ mittelst der Gleichung

$$31)\ldots\ b-\frac{2G}{\mu}\mathfrak{T}+\frac{2G+\mu V\sin i}{\mu^2}(1-e^{-\mu\mathfrak{T}})=0$$

bestimmt werden, welche transcendente Gleichung aber nur durch Näherung lösbar ist.

Für $b=0$ wird diese Gleichung:

$$32)\ldots\ldots \frac{1-e^{-\mu\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}} = \frac{2\mu G}{2G+\mu V\sin i}.$$

Hat man aber mittelst dieser Gleichung $\mathfrak{C}$ bestimmt, so findet man die Wurfweite, welche wir durch $W$ bezeichnen wollen, nach 17) mittelst der Gleichung

$$33)\ldots\ldots W=a+\frac{V\cos i}{\mu}(1-e^{-\mu\mathfrak{C}}),$$

oder nach 32) mittelst der Gleichung

$$34)\ldots\ldots W=a+\frac{2GV\cos i}{2G+\mu V\sin i}\mathfrak{C},$$

oder, wenn wir auch $a=0$ setzen, d. h. den Anfangspunkt der Bewegung zugleich als Anfangspunkt der Coordinaten annehmen, mittelst der Gleichung:

$$35)\ldots\ldots W=\frac{2GV\cos i}{2G+\mu V\sin i}\mathfrak{C}.$$

Natürlich könnte man die Wurfweite $W$ auch unmittelbar aus der Gleichung

$$36)\ldots \frac{2G+\mu V\sin i}{V\cos i}W+\frac{2G}{\mu}l\frac{V\cos i-\mu W}{V\cos i}=0$$

oder

$$37)\ldots \frac{2G+\mu V\sin i}{V\cos i}W+\frac{2G}{\mu}l(1-\frac{\mu W}{V\cos i})=0,$$

welche sich aus der Gleichung 21) ergiebt, aber auch nur durch Näherung auflösbar ist, bestimmen.

## §. 7.

Hat man unter Voraussetzung desselben Kalibers und derselben Ladung für zwei verschiedene Elevationswinkel $i'$, $i''$ die entsprechenden Wurfweiten $W'$, $W''$ beobachtet, so hat man nach 37) zur Bestimmung der diesem Kaliber und dieser Ladung entsprechenden Werthe von $\mu$ und $V$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$38)\ldots\begin{cases}\dfrac{2G+\mu V\sin i'}{V\cos i'}W'+\dfrac{2G}{\mu}l(1-\dfrac{\mu W'}{V\cos i'})=0,\\[2ex]\dfrac{2G+\mu V\sin i''}{V\cos i''}W''+\dfrac{2G}{\mu}l(1-\dfrac{\mu W''}{V\cos i''})=0.\end{cases}$$

Weil es aber bei der Auflösung dieser beiden transcen ten Gleichungen, wie immer bei der approximativen Auflös der Gleichungen, zunächst darauf ankommt, sich erste Näheru werthe der zu bestimmenden Grössen $\mu$, $V$ zu verschaffen, möchte es bei Beobachtungen, wie die oben angedeuteten, besten und zweckmässigsten sein, ausser den Elevationswink $i'$, $i''$ und den Wurfweiten $W'$, $W''$ auch noch die entsprechen Flugzeiten $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ zu beobachten. Dann hat man nach 35) Bestimmung der beiden Grössen $\mu$, $V$ die Gleichungen:

$$39)\ldots W'=\frac{2GV\cos i'}{2G+\mu V\sin i'}\mathfrak{T}',\quad W''=\frac{2GV\cos i''}{2G+\mu V\sin i''}\mathfrak{T}'';$$

aus denen sich durch Division zuvörderst zur Bestimmung v $\mu V$ die Gleichung

$$\frac{W'}{W''}=\frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}''}\cdot\frac{\cos i'}{\cos i''}\cdot\frac{2G+\mu V\sin i''}{2G+\mu V\sin i'}$$

oder

$$\frac{2G+\mu V\sin i'}{2G+\mu V\sin i''}=\frac{\cos i'}{\cos i''}\cdot\frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}''}\cdot\frac{W''}{W'}$$

ergiebt. Löst man diese Gleichung in Bezug auf $\mu V$ als un kannte Grösse auf, so erhält man mittelst leichter Rechnung:

$$40)\ldots\ \mu V=2G\frac{\mathfrak{T}'W''\cos i'-\mathfrak{T}''W'\cos i''}{\mathfrak{T}''W'\sin i'\cos i''-\mathfrak{T}'W''\cos i'\sin i''}.$$

Hat man aber mittelst dieser Formel $\mu V$ berechnet, so erg sich $V$ mittelst eines der beiden folgenden aus 39) fliessen Ausdrücke:

$$41)\ldots\ V=\frac{2G+\mu V\sin i'}{2G\cos i'}\cdot\frac{W'}{\mathfrak{T}'}=\frac{2G+\mu V\sin i''}{2G\cos i''}\cdot\frac{W''}{\mathfrak{T}''},$$

und $\mu$ erhält man dann mittelst der Formel

$$42)\ldots\ldots\ldots\ \mu=\frac{(\mu V)}{V}.$$

In völlig entwickelter Gestalt erhält man auch leicht:

$$43)\ldots\ V=\frac{W'W''(\sin i'-\sin i'')}{\mathfrak{T}''W'\sin i'\cos i''-\mathfrak{T}'W''\cos i'\sin i''}$$

und

$$44) \ldots\ldots \mu = 2G\frac{\mathfrak{C}' W'' \cos i' - \mathfrak{C}'' W' \cos i''}{W' W''(\sin i' - \sin i'')},$$

oder:

$$45) \ldots \quad V = \frac{2 W' W'' \sin \tfrac{1}{2}(i' - i'') \cos \tfrac{1}{2}(i' + i'')}{\mathfrak{C}'' W' \sin i' \cos i'' - \mathfrak{C}' W'' \cos i' \sin i''}$$

und

$$46) \ldots\ldots \mu = G\frac{\mathfrak{C}' W'' \cos i' - \mathfrak{C}'' W' \cos i''}{W' W'' \sin \tfrac{1}{2}(i' - i'') \cos \tfrac{1}{2}(i' + i'')}.$$

Hat man aber auf diese Weise erste Näherungswerthe von $V$ und $\mu$ gefunden, so wird es mittelst einiger Versuche immer leicht sein, die genauen, den beiden Gleichungen 38) genügenden Werthe dieser beiden Grössen zu finden, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedarf.

Die Ermittelung der Werthe der Grössen $V$ und $\mu$ auf dem Wege der Versuche durch Probeschüsse in der vorher angegebenen Weise dürfte sich, namentlich bei der jetzigen so ungemein grossen Vervollkommnung der Geschütze, meiner Meinung nach, wohl empfehlen, und würden dergleichen Versuche auch zur Entscheidung über die Richtigkeit oder Unrichtigkeit des zu Grunde gelegten Luftwiderstandsgesetzes beitragen können. Natürlich würde bei der Berechnung der definitiven Werthe der Anfangsgeschwindigkeit $V$ und des Widerstands-Coefficienten $\mu$ aus den Versuchen auch auf den zeitigen Stand des Barometers und Thermometers Rücksicht zu nehmen sein, was keiner Schwierigkeit unterliegt und hier nicht weiter erläutert zu werden braucht. Natürlich würden die auf diese Weise ermittelten Werthe von $V$ und $\mu$ immer nur für jedes einzelne Geschütz und seine Ladung *als ein* Individuum gelten, aber doch auch auf alle Geschütze von gleicher Art, wenigstens näherungsweise, Anwendung finden können.

## §. 8.

Aus der Gleichung 17), nämlich aus der Gleichung

$$x_t = a + \frac{V \cos i}{\mu}(1 - e^{-\mu t}),$$

oder, wenn wir wieder der Kürze wegen $a = 0$ setzen, aus der Gleichung

$$x_t = \frac{V \cos i}{\mu}(1 - e^{-\mu t}),$$

erhellet, dass, wenn $t$ in's Unendliche wächst, $x_t$ sich der Gränze $\frac{V\cos i}{\mu}$ nähert und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur $t$ gross genug werden lässt. Uebrigens aber ist immer

$$x_t < \frac{V\cos i}{\mu}.$$

Hieraus erhellet, dass die durch den, durch die erste Coordinate $\frac{V\cos i}{\mu}$ bestimmten Punkt der Axe der $x$ auf diese Axe senkrecht gezogene gerade Linie eine Asymptote der von dem Punkte $A$ beschriebenen Trajectoria ist.

§. 9.

Nach §. 5. ist

$$47) \ldots \quad e^{\mu T} = 1 + \frac{\mu V \sin i}{2G}, \quad T = \frac{1}{\mu} l\left(1 + \frac{\mu V \sin i}{2G}\right);$$

also nach 17) und 19), wenn wir der Kürze wegen $a=0$, $b=0$ setzen, d. h. den Anfangspunkt der Bewegung zugleich als Anfangspunkt der Coordinaten annehmen:

$$48) \ldots \quad \begin{cases} x_T = \dfrac{V^2 \sin i \cos i}{2G + \mu V \sin i}, \\ y_T = \dfrac{V \sin i}{\mu} - \dfrac{2G}{\mu^2} l\left(1 + \dfrac{\mu V \sin i}{2G}\right); \end{cases}$$

wo $y_T$ die im angeführten Paragraphen durch $H$ bezeichnete Höhe des Wurfs ist.

Nehmen wir nun den Punkt $(x_T y_T)$, d. h. den höchsten Punkt der Trajectoria, als Anfang eines neuen, dem primitiven Systeme der $xy$ parallelen Coordinatensystems der $x\eta$ an, in welchem aber die Axen der $x$, $\eta$ respective den Axen der $y$, $x$ parallel sind, und die Richtung der positiven $x$ der Richtung der positiven $y$ entgegengesetzt, dagegen die Richtung der positiven $\eta$ einerlei mit der Richtung der positiven $x$ ist; so ist offenbar allgemein

$$x_t = x_T + \eta_t, \quad y_t = y_T - x_t.$$

Nach 21) ist also, wenn man $a=0$, $b=0$ setzt:

$$y_T - x_t = \frac{2G + \mu V \sin i}{\mu V \cos i}(x_T + \eta_t) + \frac{2G}{\mu^2} l \frac{V\cos i - \mu(x_T + \eta_t)}{V \cos i};$$

also, wenn man für $x_T$ und $y_T$ ihre Werthe aus dem Obigen setzt:

$$\frac{V\sin i}{\mu}-\frac{2G}{\mu^2}l\left(1+\frac{\mu V\sin i}{2G}\right)-x_t$$

$$=\frac{2G+\mu V\sin i}{\mu V\cos i}\left(\frac{V^2\sin i\cos i}{2G+\mu V\sin i}+y_t\right)$$

$$+\frac{2G}{\mu^2}l\left(\frac{2G}{2G+\mu V\sin i}-\frac{\mu}{V\cos i}y_t\right)$$

$$=\frac{V\sin i}{\mu}+\frac{2G+\mu V\sin i}{\mu V\cos i}y_t$$

$$-\frac{2G}{\mu^2}l\left(1+\frac{\mu V\sin i}{2G}\right)+\frac{2G}{\mu^2}l\left\{1-\frac{\mu(2G+\mu V\sin i)}{2GV\cos i}y_t\right\};$$

folglich, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$-x_t=\frac{2G+\mu V\sin i}{\mu V\cos i}y_t+\frac{2G}{\mu^2}l\left\{1-\frac{\mu^2}{2G}\cdot\frac{2G+\mu V\sin i}{\mu V\cos i}y_t\right\}.$$

Setzen wir nun

$$49)\quad\begin{cases}\mathfrak{x}_t=x_t=y_T-y_t,\\ \mathfrak{y}_t=\dfrac{2G+\mu V\sin i}{\mu V\cos i}y_t=\dfrac{2G+\mu V\sin i}{\mu V\cos i}(x_t-x_T);\end{cases}$$

so erhält die vorstehende Gleichung die sehr einfache Form:

$$50)\ldots\ldots\quad\mathfrak{x}_t+\mathfrak{y}_t+\frac{2G}{\mu^2}l\left(1-\frac{\mu^2}{2G}\mathfrak{y}_t\right)=0$$

oder

$$51)\ldots\ldots\quad l\left(1-\frac{\mu^2}{2G}\mathfrak{y}_t\right)=-\frac{\mu^2}{2G}(\mathfrak{x}_t+\mathfrak{y}_t),$$

oder

$$1-\frac{\mu^2}{2G}\mathfrak{y}_t=e^{-\frac{\mu^2}{2G}(\mathfrak{x}_t+\mathfrak{y}_t)},$$

also

$$52)\ldots\ldots\quad\mathfrak{y}_t=\frac{2G}{\mu^2}\left\{1-e^{-\frac{\mu^2}{2G}(\mathfrak{x}_t+\mathfrak{y}_t)}\right\}.$$

Entwickelt man

$$l\left(1-\frac{\mu^2}{2G}\mathfrak{y}_t\right)$$

in eine Reihe, so wird die Gleichung 38):

$$x_t + y_t - \frac{2G}{\mu^2}\left(\frac{\mu^2}{2G}y_t + \frac{\mu^4}{8G^2}y_t^2 + \frac{\mu^6}{16G^3}y_t^3 + \ldots\right) = 0.$$

d. i.

$$x_t - \frac{\mu^2}{4G}y_t^2\left(1 + \frac{\mu^2}{3G}y_t + \frac{\mu^4}{8G^2}y_t^2 + \ldots\right) = 0.$$

Kann man sich für berechtigt halten, alle die zweite übersteigende Potenzen von $\mu$ enthaltenden Glieder mit hinreichender Annäherung zu vernachlässigen, so wird die vorstehende Gleichung

$$x_t - \frac{\mu^2}{4G}y_t^2 = 0 \text{ oder } y_t^2 = \frac{4G}{\mu^2}x_t.$$

d. i. nach 49)

$$\frac{(2G+\mu V\sin i)^2}{\mu^2 V^2\cos i^2}v_t^2 = \frac{4G}{\mu^2}x_t,$$

also

$$53) \ldots\ldots\ldots v_t^2 = \frac{4GV^2\cos i^2}{(2G+\mu V\sin i)^2}x_t,$$

welches die Gleichung einer Parabel ist, die für $\mu = 0$ in die bekannte Gleichung der Trajectoria der Wurfbewegung im leeren Raume übergeht.

Führt man in diese Gleichung statt $x_t$, $y_t$ wieder $x_t$, $y_t$ ein, so wird dieselbe:

$$\left(x_t - \frac{V^2\sin i\cos i}{2G+\mu V\sin i}\right)^2$$

$$= \frac{4GV^2\cos i^2}{(2G+\mu V\sin i)^2}\left\{\frac{V\sin i}{\mu} - \frac{2G}{\mu^2}l\left(1+\frac{\mu V\sin i}{2G}\right) - y_t\right\},$$

also, wie man hieraus nach einigen leichten Transformationen sogleich findet:

$$54) \ldots\ y_t = \frac{V\sin i}{\mu}\left(1-\frac{\mu V\sin i}{4G}\right) - \frac{2G}{\mu^2}l\left(1+\frac{\mu V\sin i}{2G}\right)$$

$$+ \frac{(2G+\mu V\sin i)\tan i}{8G}x_t - \frac{(2G+\mu V\sin i)^2}{4GV^2\cos i^2}x_t^2,$$

welche Gleichung natürlich nur näherungsweise, unter der oben gemachten Voraussetzung, richtig ist.

# XIV.

## Geometrischer Ort der Mittelpunkte aller durch einen festen Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnitts.

Von

Herrn Professor *E. Lommel*

in Schwyz.

---

Der im Archiv schon mehrfach behandelte Lehrsatz:

> „Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller durch einen festen Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnitts ist ebenfalls ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen ähnlich und in ähnlicher Lage ist;“

lässt sich leicht auf folgende elementare Art beweisen.

A. Der gegebene Kegelschnitt habe einen Mittelpunkt (Ellipse oder Hyperbel). In Taf. V. Fig. 11. sei $O$ der Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts, $OX$ die Richtung seiner Hauptaxe (der grossen Axe bei der Ellipse, der reellen Axe bei der Hyperbel) und $P$ der feste Punkt, so erhält man den Mittelpunkt $M$ einer beliebigen durch $P$ gehenden Sehne $PM$, wenn man parallel $PM$ einen Durchmesser $UV$ des Kegelschnitts zieht und zu diesem den conjugirten Durchmesser $OM$ bestimmt. Alsdann ist $M$ ein Punkt des gesuchten geometrischen Ortes. Seien nun $Q$ und $R$ die Durchschnittspunkte der Geraden $PO$ mit dem Kegelschnitt, also $QR$ einer seiner Durchmesser; zieht man alsdann durch $Q$ eine Sehne $QS$ parallel $UV$ (d. h. auch parallel $PM$) und verbindet den Punkt $S$ des Kegelschnitts mit $R$, so ist bekanntlich auch $SR$ parallel $OM$, und demnach Dreieck $QRS \sim$ Dreieck $POM$, und es verhält sich

$$OM : RS = OP : RQ$$

Da also die Radien Vectoren der gesuchten krummen Linie aus $O$ ($OM$) zu den parallelen Radien Vectoren des gegebenen Kegelschnitts aus $R$ ($RS$) in einem constanten Verhältniss stehen, so muss der gesuchte Ort ein Kegelschnitt sein, der mit dem gegebenen ähnlich und in ähnlicher Lage ist. Man erkennt zugleich, dass der gefundene Kegelschnitt durch die Punkte $O$ und $P$ geht, welche den Punkten $R$ und $S$ des gegebenen Kegelschnitts resp. entsprechen. Es ist daher $OP$ einer seiner Durchmesser und sein Mittelpunkt liegt in der Mitte der Linie $OP$. Da alle Linien, welche man im zweiten Kegelschnitt zieht, zu den homologen Linien des ersten Kegelschnitts sich verhalten müssen wie $OP$ zu $QR$, so hat man, wenn man die Halbaxen des ersten mit $a$ und $b$, die entsprechenden des zweiten Kegelschnitts aber mit $A$ und $B$ bezeichnet:

$$A = a \cdot \frac{OP}{QR} \quad \text{und} \quad B = b \cdot \frac{OP}{QR}.$$

Man sieht daraus, dass der zweite Kegelschnitt mit dem ersten congruent wird, wenn die Entfernung des festen Punktes vom Mittelpunkt des ersten dem Durchmesser gleich ist, welcher in die Verbindungslinie der genannten Punkte fällt. Ist aber jene Entfernung grösser als dieser Durchmesser, so hat der zweite Kegelschnitt grössere, ist sie kleiner, so hat er kleinere Dimensionen als der erste.

Bezeichnet man $OP$ mit $d$ und Winkel $POX$ mit $\varphi$, so ist für die Ellipse

$$QR = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}},$$

und für die Hyperbel

$$QR = \frac{2ab}{\sqrt{b^2 \cos^2\varphi - a^2 \sin^2\varphi}};$$

folglich hat man für die Ellipse:

$$A = \frac{d}{2b}\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi} \quad \text{und} \quad B = \frac{d}{2a}\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi};$$

für die Hyperbel dagegen:

$$A = \frac{d}{2b}\sqrt{b^2 \cos^2\varphi - a^2 \sin^2\varphi} \quad \text{und} \quad B = \frac{d}{2a}\sqrt{b^2 \cos^2\varphi - a^2 \sin^2\varphi}.$$

B. Der Kegelschnitt habe keinen Mittelpunkt, d. h. derselbe sei eine Parabel. Sei $OX$ (Taf. V. Fig. 12.) die Axe, $OD$ die Directrix, $F$ der Brennpunkt der Parabel und $P$ der feste Punkt, so findet man den Mittelpunkt $M$ einer beliebigen durch $P$ gehenden Sehne $PM$, wenn man durch denjenigen Punkt der Parabel, dessen Tangente mit $PM$ parallel ist, einen Durchmesser (parallel $OX$) zieht. Man kann aber diesen Durchmesser leicht bestimmen, indem man vom Brennpunkt $F$ aus eine Senkrechte auf $PM$ fällt, und durch ihren Schnittpunkt $S$ mit der Directrix eine Parallele zu $OX$ zieht. Der Durchschnitt $M$ dieser letzteren mit $PM$ ist alsdann ein Punkt des gesuchten Ortes. Bezeichnet man nun die Coordinaten $OQ$ und $PQ$ des festen Punktes (auf $OX$ und $OD$ als Coordinatenaxen bezogen) resp. mit $m$ und $n$, ferner $OR$ und $MR$ ($= OS = QT$), die Coordinaten des Punktes $M$, resp. mit $x$ und $y$, und endlich $OF$, den halben Parameter der Parabel, mit $p$, so erhält man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $SOF$ und $MTP$:

$$(n-y):(m-x)=p:y,$$

oder:

$$y(n-y)=p(m-x).$$

Aus dem blossen Anblick dieser Gleichung entnimmt man, dass der gesuchte Ort eine Parabel ist, deren Axe mit derjenigen der gegebenen parallel läuft und deren Parameter die Hälfte ist von dem der ersten. Man sieht ferner, dass diese zweite Parabel durch die Punkte $P$ und $Q$ geht; da somit $PQ$ eine zu ihrer Axe *senkrechte* Sehne ist, so muss diese Axe nothwendig durch den *Mittelpunkt* von $PQ$ gehen. Weil endlich alle Parabeln unter einander ähnlich sind, so ist der oben ausgesprochene Lehrsatz auch für die Parabel vollständig bewiesen.

# XV.

## Autre démonstration du théorème de Mr. Beltrami énoncé dans le 42. Tome pag. 356. de ce journal.

Par

Monsieur *R. Lobatto*,

Professeur à l'École polytechnique à Delft.

---

### Théorème.

**Le centre du cercle circonscrit à un triangle coïncide avec le centre de gravité de masses égales placées aux quatre centres des cercles qui touchent les côtés du triangle.**

Soit $ABC$ le triangle. Désignons par $a, b, c$ les côtés opposés aux angles $A, B, C$, et par $R, R_1, R_2, R_3$ les rayons des quatre cercles inscrits; les trois derniers se rapportant aux cercles qui touchent extérieurement les côtés $a, b, c$.

On aura, en nommant $J$ l'aire du triangle:

$$R=\frac{J}{s},\quad R_1=\frac{J}{s-a},\quad R_2=\frac{J}{s-b},\quad R_3=\frac{J}{s-c},$$

$s$ étant égal à $\frac{1}{2}(a+b+c)$.

La distance $x$ du centre de gravité des quatre masses égales, au-dessus de la base $AB$, s'exprime évidemment par

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}\{R+R_1+R_2-R_3\} \\ &= \frac{J}{4}\left\{\frac{1}{s}+\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}-\frac{1}{s-c}\right\} \\ &= \frac{Jc}{4}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}-\frac{1}{s(s-c)}\right\}. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\sin^2\psi C = \frac{w-a \cdot w-b}{ab} \qquad \cos^2\psi C = \frac{s(s-c)}{ab}$$

ou bien

$$w-a \cdot w-b = ab\sin^2\psi C, \quad s(s-c) = ab\cos^2\psi C$$

Substituant ces valeurs dans celle de $x$, celle-ci se changera en

$$x = \frac{Jc}{4ab}\left\{\frac{1}{\sin^2\psi C} - \frac{1}{\cos^2\psi C}\right\}$$

$$= \frac{Jc}{ab} \cdot \frac{\cos C}{\sin^2 C} = \psi c \cot C,$$

résultat, qui exprime la hauteur du centre du cercle circonscrit au-dessus de $AB$.

On prouvera de la même manière, que la hauteur du centre de gravité au-dessus de $AC$ coïncide également avec celle du centre du cercle circonscrit, ce qui établit la vérité du théorème.

---

## XVI.

## Remarques sur une solution donnée par Mr. Jos. Eilles à München, du problème relatif à la cubature d'un cylindre droit coupé par un plan incliné sur sa base.

Par

Monsieur *R. Lobatto*,

Professeur à l'École polytechnique à Delft.

(Voir Tome 42. pag. 186. de ce journal.)

M'étant occupé il y a déjà quelque temps du même problème en y appliquant une méthode tout-à-fait différente, j'ai été porté à comparer mon résultat à celui obtenu par Mr. Eilles. Frappé de la discordance observée entre ces deux résultats, j'examinai attentivement la solution dont il s'agit, et je ne tardai pas à y

remarquer une méprise que je me permets de signaler ici, puisqu'elle a conduit ce géomètre à une formule fautive pour évaluer le volume du cylindre tronqué.

Voici en quoi consiste l'erreur qui s'est glissée dans cette solution. Mr. Eilles suppose sans démonstration que si dans un cercle (Tab. V. Fig. 8.) l'on mène des cordes $NQ$, $LM$, $UW$ etc. parallèles à des distances égales et infiniment petites, les secteurs infiniment petits $PNL$, $PLU$, $PQM$, $PMW$ etc., bases des prismes tronqués, qui composent le volume du cylindre tronqué, auront une valeur commune, qu'il désigne par $g$: corrélation évidemment inexacte.

Pour le faire voir, il suffira de prouver, qu'en supposant ces secteurs ou bien les arcs infiniment petits $UL$, $LN$ etc. égaux entre eux, les cordes $NQ$, $LM$, $UW$ etc. ne seront pas équidistantes. En effet en dénotant le rayon par $r$, un arc quelconque $CU = CW$ par $\varphi$ et $WM = UL$ par $d\varphi$, il est clair, que la distance infiniment petite des deux cordes $UW$, $LM$ aura pour expression

$$r\cos\varphi - r\cos(\varphi + d\varphi) = -rd\cos\varphi = r\sin\varphi d\varphi,$$

d'où il suit, que si l'on attribue diverses valeurs à l'arc $\varphi$, la distance dont il s'agit, variera également de grandeur. Donc, inversement, pour des cordes parallèles et équidistantes, les secteurs correspondants n'auront pas les mêmes valeurs infiniment petites. Il en résulte nécessairement que les hauteurs $h_1$, $h_2$, $h_3$,... ou les arrêtes des prismes, passant par des points équidistants pris sur la circonférence de la base du cylindre, ne formeront aucunement une progression arithmétique. S'il en était ainsi, il faudrait qu'en développant la surface du cylindre, le contour de la section elliptique se changeât en ligne droite, ce qui est manifestement faux, circonstance, qui parait avoir échappé à Mr. Eilles. La formule donnée par ce géomètre étant ainsi basée sur des déductions erronées, je crois pouvoir la considérer comme inexacte.

Si l'on veut adopter le mode de décomposition, qui forme la base de cette solution, on peut partir soit de l'équidistance des cordes parallèles, soit de l'égalité des secteurs infiniment petits. Dans chacune de ces deux hypothèses la recherche de l'évaluation du volume à déterminer exigera nécessairement l'emploi du calcul intégral, que Mr. Eilles semble avoir voulu éviter.

Je vais exposer maintenant la solution à la quelle j'étais parvenu, sans recourir à l'application du calcul intégral. Ma solution est fondée sur le théorème suivant, assez connu des géomètres:

**Le volume d'un prisme droit tronqué à base quelconque, est égal au produit de la base par la hauteur du centre de gravité de la base supérieure.**

Soit *ABCD* (Tab. V. Fig. 9.) le cylindre, *OP* son axe, *EJK* le plan sécant passant par la corde *JK* perpendiculaire au diamètre *AB*. Cherchons d'abord le volume du cylindre tronqué *AEKJ*. Or, ce solide pouvant évidemment être considéré comme un prisme tronqué, ayant pour base le segment circulaire *AJK*, son volume s'exprimera, en vertu du théorème cité, par le produit de l'aire *I* de ce segment par la perpendiculaire *GG'* abaissée du centre de gravité *G* du segment elliptique *EJK* sur la base *I*. Remarquons à présent, que le point *G'*, projection de *G*, est précisément le centre de gravité du segment circulaire, projection du segment elliptique.

D'après une formule connue la distance $G'O$ a pour valeur $\frac{a^3}{12I}$, $a$ désignant la longueur donnée de la corde *JK*. Soit encore $\delta$ l'inclinaison du plan sécant, il viendra

$$GG' = YG' \cdot \operatorname{tg}\delta = (OY + OG')\operatorname{tg}\delta$$

$$= \{\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} + \frac{a^3}{12I}\}\operatorname{tg}\delta.$$

Par conséquent le volume *V* à déterminer s'exprimera par

$$V = \{I\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} + {}^1\!/_{12}a^3\}\operatorname{tg}\delta.$$

Quant à la valeur de $\operatorname{tg}\delta$, on aura, en désignant par $\beta$ la distance *AY* et par *h*, *H* les hauteurs des points *E*, *Y* au-dessus de la base du cylindre, $\operatorname{tg}\delta = \frac{H-h}{\beta}$.

Partant

$$V = \{I\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} + {}^1\!/_{12}a^3\}\frac{H-h}{\beta}.$$

Les quantités $\beta$ et *I* s'expriment facilement en fonction des données. En effet, on a $\beta = r \pm \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$,

$$I = r^2 \operatorname{Arc\,sin\,vers.}\frac{\beta}{r} \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2)},$$

selon que la section *EJK* coupe l'axe *OP* ou son prolongement.

Pour obtenir le volume *V'* de la partie *CDBJKE* il n'y a qu'à soustraire le volume obtenu ci-dessus de $\pi r^2 H$, volume du cylindre.

# XVII.

## Geometrischer Beweis des Satzes von Beltrami über die Relation zwischen dem Mittelpunkt des Kreises um ein ebenes Dreieck und den Mittelpunkten der vier Berührungskreise dieses Dreiecks.

Von

Herrn *Carl Schmidt*

in Spremberg.

Das Archiv giebt Thl. XLII. S. 354 f. den Beweis des folgenden Satzes von Herrn Beltrami in Pisa:

> Der Mittelpunkt des um ein ebenes Dreieck beschriebenen Kreises ist der Schwerpunkt der Mittelpunkte seiner vier Berührungskreise, wenn man sich dieselben mit gleichen Gewichten beschwert denkt.

Der Herr Herausgeber, der den Beweis durch Anwendung eines rechtwinkligen Coordinatensystems und mit Benutzung eines von ihm schon in einem früheren Theile des Archivs entwickelten Systems von Formeln führt, die sich überhaupt bei den Sätzen über die Entfernungen der merkwürdigen Punkte eines ebenen Dreiecks von einander mit grossem Vortheil in Anwendung bringen lassen, stellt — nach einer literarischen Notiz über den Satz — die Aufnahme etwa eingehender elementar-geometrischer Beweise desselben in das Archiv in Aussicht. In Folgendem will ich einen rein geometrischen Beweis geben, der auf zweien der interessantesten Sätze aus der Lehre von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks beruht. Ich will die erforderlichen drei Sätze (2, 3, 4) zuvor anführen.

1. Die Fusspunkte der drei Höhen eines Dreiecks sind die Ecken eines zweiten Dreiecks, dessen Winkel durch die Höhen,

wenn das erste Dreieck spitzwinklig ist, oder durch die Normalen auf den Höhen, wenn es stumpfwinklig ist, halbirt werden.

2. Die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks sind die Höhen eines zweiten Dreiecks, das von den Halbirungslinien der Aussenwinkel des ersten Dreiecks gebildet wird.

3. Die Durchschnittspunkte der Dreieckshöhen, der seitenhalbirenden Transversalen und der Senkrechten aus den Seitenmitten liegen in gerader Linie, und die Entfernung des ersten Durchschnittspunktes vom zweiten ist das Doppelte der Entfernung des zweiten vom dritten.

4. Die Fusspunkte der Höhen und der Seitenmitten liegen in derselben Kreislinie (dem „Kreis der neun Punkte").

5. Lehrsatz. Die Durchschnittspunkte der winkelhalbirenden Transversalen eines Dreiecks, der Senkrechten aus den Seitenmitten und der seitenhalbirenden Transversalen desjenigen Dreiecks, dessen Seiten die Halbirungslinien der Aussenwinkel des ersten Dreiecks sind, liegen in gerader Linie, und die Entfernung des ersten Durchschnittspunkts vom zweiten ist das Dreifache der Entfernung des zweiten vom dritten.

Beweis. In dem Dreiecke $ABC$ (Taf. V. Fig. 10.) seien $AZ$, $BZ$, $CZ$ die winkelhalbirenden Transversalen, ihr Durchschnittspunkt $Z$; $DY$, $EY$, $FY$ seien die Senkrechten aus den Seitenmitten, ihr Durchschnittspunkt $Y$; das Dreieck $GHJ$ sei gebildet von den Halbirungslinien der Aussenwinkel des Dreiecks $ABC$; $GK$, $HL$, $JM$ seien die seitenhalbirenden Transversalen von $GHJ$, und deren Durchschnittspunkt sei $X$: so wird behauptet, dass $Z$, $Y$, $X$ in gerader Linie liegen und dass $ZY$ das Dreifache von $YX$ ist.

Nach 2. sind die Halbirungslinien $AZ$, $BZ$, $CZ$ der Winkel des Dreiecks $ABC$ die Höhen des Dreiecks $GHJ$, es ist also $Z$ der Durchschnittspunkt der Höhen dieses Dreiecks $GHJ$, wie $X$ der Durchschnittspunkt seiner seitenhalbirenden Transversalen ist. Errichtet man in den Seitenmitten $K$, $L$, $M$ desselben Dreiecks $GHJ$ die Senkrechten, und ist $W$ der Durchschnittspunkt derselben, so liegen nach 3. die Punkte $Z$, $X$, $W$ in gerader Linie, und es ist $ZX$ das Doppelte von $XW$.

Verbindet man die Seitenmitten $K$, $L$, $M$ durch gerade Linien, so sind die Seiten des Dreiecks $KLM$ parallel mit den Seiten von $GHJ$, und die Senkrechten $KW$, $LW$, $MW$ sind senkrecht auch zu den Seiten von $KLM$, also die Höhen des letzteren Dreiecks, $W$ demnach der Durchschnittspunkt der Höhen von $KLM$. Ferner sind $N$, $O$, $P$ als Durchschnittspunkte der Transversalen

*GK*, *HL*, *JM* nach den Mitten *K*, *L*, *M* der Seiten von *GHJ* auch die Mitten der Parallelen mit denselben, und es stellen also *KN*, *LO*, *MP* die seitenhalbirenden Transversalen von *KLM* dar, so dass *X* jetzt als Durchschnittspunkt der halbirenden Transversalen im Dreieck *KLM* erscheint. Errichtet man endlich in *N*, *O*, *P* die Senkrechten auf den Seiten von *KLM*, und benennt man den Durchschnittspunkt dieser Senkrechten, aus den Seitenmitten von *KLM*, der in der Figur noch nicht erscheint, mit *Y'*, so sind für das Dreieck *KLM* die Punkte *W*, *X*, *Y'* der Reihe nach das, was die Punkte *Z*, *X*, *W* für das Dreieck *GHJ* waren. Dieselben liegen nach 3. ebenfalls in gerader Linie und *WX* ist das Doppelte von *XY'*.

Es fragt sich, wohin der Punkt *Y'* fällt. *Y'* ist der Mittelpunkt des Kreises durch die Ecken von *KLM*, wie der in der Figur benannte Punkt *Y* der Mittelpunkt des Kreises durch die Ecken von *ABC* ist. In dem Dreieck *GHJ* sind aber *K*, *L*, *M* die Seitenmitten und *A*, *B*, *C* die Fusspunkte der Höhen. Diese sechs Punkte liegen nach 4. in derselben Kreislinie, und es fallen also die beiden Kreise, deren Mittelpunkte *Y'* und *Y* sind, in einander, somit auch ihre Mittelpunkte *Y'* und *Y* selbst. Es lässt sich mithin der Schluss des vorigen Absatzes auch so aussprechen: die Punkte *W*, *X*, *Y* liegen in gerader Linie und *WX* ist das Doppelte von *XY*.

Da nun *Z*, *X*, *W* und ebenso *W*, *X*, *Y* in gerader Linie liegen, so leuchtet ein, dass alle vier Punkte derselben geraden Linie angehören, nämlich der durch *X* und *W* bestimmten. Es ist, wie erwiesen:

$$ZX = 2XW \text{ und } WX = 2XY, \text{ also } ZX = 4XY,$$

d. h.

$$ZY + YX = 4XY, \text{ und daher } ZY = 3YX.$$

Demnach gilt für die Punkte *Z*, *Y*, *X* erstens, dass sie in gerader Linie liegen, zweitens, dass *ZY* das Dreifache von *YX* ist.

6. Anmerkung. Um dem eben rein geometrisch bewiesenen Satze 5. auch noch eine kurze und elegante Fassung zu geben, wird es jetzt erlaubt sein, den statischen Begriff des Schwerpunktes einzuführen. Der Punkt *Z* ist der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises des Dreiecks *ABC*, die Punkte *G*, *H*, *J* sind die Mittelpunkte der drei äusseren Berührungskreise. Sind *G* und *H* mit gleichen Gewichten *p* beschwert, so liegt der Schwerpunkt beider Gewichte in *M*, und wir können uns statt der beiden Gewichte *p* in *G* und *H* den Punkt *M* mit dem Gewichte $2p$ be-

schwert denken. Wirkt auch in $J$ ein Gewicht $p$, so liegt der Schwerpunkt von $2p$ in $M$ und $p$ in $J$ im Punkte $X$, für den bekanntlich $JX$ gleich $2MX$ ist. Nun können wir weiter für $2p$ in $M$ und $p$ in $J$ den Punkt $X$ mit $3p$ belastet denken. Wird endlich auch im Punkte $Z$ ein Gewicht $p$ gedacht, so liegt der Schwerpunkt für $3p$ in $X$ und $p$ in $Z$ auf der Verbindungslinie von $X$ und $Z$, und zwar so, dass die Entfernung desselben von $Z$ das Dreifache seiner Entfernung von $X$ ist. An dieser Stelle liegt aber, wie in 5. bewiesen worden, der Punkt $Y$ als der Mittelpunkt des um das Dreieck $ABC$ beschriebenen Kreises. Es lässt sich also unser Satz genau so aussprechen, wie er an die Spitze dieser Zeilen gestellt ist.

# XVIII.

## Miscellen.

Von Herrn Dr. am Ende in Langensalza.

In Thl. XLII. Hft. II. S. 229. dieses Archivs theilt der Herr Herausgeber einen Satz über das ebene Dreieck als Uebungsaufgabe für Schüler mit und giebt am Schlusse des Beweises der Umkehrung der Vermuthung Raum, dass besagte Umkehrung sich auf eine weit einfachere Art, als es dort geschehen, beweisen lasse. Einen einfacheren Beweis zu liefern, sei der Gegenstand des Folgenden. Wir schicken jedoch demselben noch einen anderen Beweis für den ersten Satz voraus, weil beide Beweise einander in mehrfacher Beziehung entsprechen.

**Lehrsatz.** Ist in dem Dreieck $ABC$ (Taf. V. Fig. 13.), in welchem die Gegenseiten der Winkel $A$, $B$, $C$ resp. $a$, $b$, $c$ heissen mögen, $\angle A = 2\angle B$, so ist $a^2 = b(b+c)$.

**Beweis.** Man fälle von $C$ aus auf $AB$ die Senkr $CD$ und nenne $x$ die Projection von $AC$ auf $AB$. Nach e bekannten Satze der Planimetrie ist nun, je nachdem $\angle A$ oder stumpf ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cx.$$

Macht man nun $DE = AD$, so folgt leicht, dass $BE = b$ Folglich hat man auch:

$$a^2 = 2b^2 \pm 2bx,$$

woraus weiter folgt:

$$\pm x = \frac{a^2 - 2b^2}{2b}.$$

Setzt man diesen Werth von $x$ in der obigen Gleichung ein erhält man:

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{c}{b}(a^2 - 2b^2),$$

folglich:

$$a^2(b+c) = b^3 + bc^2 + 2b^2c$$

oder

$$a^2(b+c) = b(b^2 + 2bc + c^2) = b(b+c)^2,$$

folglich:

$$a^2 = b(b+c), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

**Umkehrung.** Findet in dem Dreieck $ABC$ die Gleic $a^2 = b(b+c)$ statt, so ist $\angle A = 2\angle B$.

**Beweis.** Nach der Voraussetzung ist $a^2 = b^2 + bc$. F hat man $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cx$, folglich ist:

$$b^2 + bc = b^2 + c^2 \mp 2cx,$$

folglich:

$$\pm x = \frac{c-b}{2},$$

folglich:

$$BE = b,$$

d. h. $\triangle BEC$ ist ein gleichschenkliges. Also ist $\angle AEC = 2$ folglich auch $\angle CAE = 2\angle B$, w. z. b. w.

**Bemerkung.** In der Figur (Taf. V. Fig. 13.) stehen leider die staben $x$ nicht an den richtigen Stellen, auch ist der Bogen überflüssig.

## Aus einem Briefe des Herrn Professor Hoüel in Bordeaux an den Herausgeber.

Bordeaux, 31. Décembre 1865.

J'ai reçu ces jours derniers la 9e édition des tables de Köhler. Les correcteurs nouveaux ont encore trouvé moyen de laisser passer une faute qui m'a sauté aux yeux du premier coup. A la dernière page, on trouve, pour le log. de

$$\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} = \frac{63}{256}$$

0,3911005 — 1. La valeur exacte est

$$0{,}391100584147\,32\ldots. - 1.$$

Ainsi le dernièr chiffre est trop faible.

J'ai moi-méme laissé échapper, dans ma seconde édition *), une faute assez grave, et cependant fort apparente. A la page 112, première colonne à gauche, en haut, au lieu de

| | | |
|---|---|---|
| 0 | il faut lire | 00 |
| 1 | | 01 |
| 2 | | 02 |
| 3 | | 03 |
| ⋮ | | ⋮ |
| 9 | | 09 |

*J'ai corrigé* cela à la main dans les exemplaires que j'ai eu entre les mains. Il n'y a que des zéros oubliés à rétablir.

*) Tables de Logarithmes à cinq Décimales. Seconde édition. Paris. 1864.

## Berichtigungen.

Thl. XXIV. S. 405. Z. 5. v. u. statt $\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{y'}{b}\right)^2$ setze man $\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{y}{a}\right)^2$.

Thl. XXIV. S. 407. Z. 1. v. o. statt $\cos u$ setze man $\cos 2u$.

Thl. XXIV. Taf. XII. bei der dritten Figur fehlt die Bezeichnung Fig. 3., was zu ergänzen ist.

In Thl. XXXVI. S. 96. unter Nr. 41) setze man:

$$Z = c \sin B + \frac{hc}{c} \sin B.$$

In Thl. XLII. S. 258. Z. 4. v. u. statt $\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right) + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)\right.$ muss es heissen:

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2.$$

---

**Druckfehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln.**

No. 15. Tafel II. S. 259. unter P. P. zu 35 Zeile 9 statt 30,5 lies 31,
No. 16. Tafel I. S. 89. log. 51599 statt $*6413$ lies $\overline{6413}$.

No. 13. und No. 14. s. Theil XLIII. Heft I. S. 120.

# XIX.

## Ueber die geometrischen Principien des Zeichnens, insbesondere über die der Axonometrie.

Aus den Vorlesungen über Anwendung der Geometrie auf die Künste gehalten im Jahre 1856 am Königl. technischen Institute zu Turin

von

Herrn *Quintino Sella*,
Finanzminister des Königreichs Italien.

[Deutsch von Maximilian Curtze, ordentl. Lehrer am Königl. Gymnasium zu Thorn.]

---

## Vorwort des Herausgebers des Archivs.

Die vorliegende ausgezeichnete Schrift *) ist schon vor länger als zehn Jahren als ein lithographirtes Memoire gedruckt und bei dem Unterrichte auf dem R°. Instituto Tecnico di Torino zum Grunde gelegt worden. In den Buchhandel ist dieselbe, so viel ich weiss, nicht gekommen. Eine kurze Anzeige davon ist im Literar. Berichte Nr. CX. S. 4. (Thl. XXVIII. 1857) gegeben und schon damals von mir der Wunsch ausgesprochen worden, dass eine deutsche Uebersetzung unternommen werden möchte. Dies ist nachher, wenn ich nicht irre, in einer mehr praktischen Zeitschrift in der That auch geschehen; zu Gesicht ist mir diese Uebersetzung nicht gekommen, und ich kann daher über ihren Werth oder Unwerth nicht urtheilen; als besondere Schrift ist dieselbe aber, so viel mir bekannt ist, nicht gedruckt worden und als solche daher auch auf dem Wege des Buchhandels nicht zu beziehen.

Jeder aufmerksame Beobachter der Fortschritte des mathematischen und verwandten Unterrichts auf unseren verschiedenen Lehranstalten,

---

*) Sui principii geometrici del Disegno e specialmente dell' axonometrico, dalle lezioni di Geometria applicata alle arti di Quintino Sella. 4°.

namentlich auch auf Realschulen, Gewerbeschulen u. s. w., wi
aber, und wird diese Bemerkung gewiss mit besonderer
gemacht haben: welche Aufmerksamkeit gegenwärtig auch d
terrichte im geometrischen Zeichnen gewidmet, wie derselbe
mehr und mehr als ein keineswegs zu unterschätzendes allg
Bildungsmittel benutzt, als ein solches in den Schulunterricht
führt, und von den vorgesetzten Behörden überall auf die An
tüchtiger, für diesen wichtigen Unterrichtszweig gehörig vorge
Lehrer sorgfältig Bedacht genommen wird. Eine Schrift, wel
Grundlage für diesen Unterricht mit aller Zuversicht benutzt
könnte, giebt es meines Wissens, wie ich wenigstens mir eine
nach Inhalt und Form denke, in deutscher Sprache nicht. Eine
Schrift soll und darf nach meiner Ansicht nicht eine blosse
durch Beispiele erläuterte praktische Anleitung zum geomet
Zeichnen enthalten; den Schülern Uebung in der richtigen, s
und genauen Ausführung geometrischer Zeichnungen beizubring
lediglich Sache des wirklichen Unterrichts und des betreffende
rers; aber die allgemeinen mathematischen Grundsätze und
lehren in Bezug auf alle gebräuchliche verschiedene Arten d
lichen oder graphischen Darstellung körperlicher Objecte, i
Kürze und nur ganz im Allgemeinen, soll und muss d
Unterrichte zur Grundlage dienende Schrift enthalten, mit
Inhalte muss der Lehrer vollkommen vertraut sein, nach de
muss er seine Schüler mit diesen Grundsätzen bekannt mache
diese letzteren müssen im Stande sein, immer auf diese
pien zurückzugehen und deshalb stets auf die betreffende Schri
gewiesen werden. Einige mathematische Vorkenntnisse sind da
beiden Seiten natürlich nicht zu entbehren; dieselben dürfen abe
über die leichtesten Elementarsätze der ebenen Geometrie u
Lehre von der Lage der Linien und Ebenen im Raume hinaus
und wer dürfte denn überhaupt eine deutliche Einsicht in das
Wesen graphischer Darstellungen körperlicher Gegenstände zu b
sich anmassen, wenn er die genannten Lehren der theore
Geometrie, ganz besonders auch die ersten Elementarsätze

ohne dieselben, da die Schrift immer eine mathematische ist und sein soll und muss — eine sehr präcise und deutliche Darstellung und Entwickelung **aller** gegenwärtig gebräuchlichen Methoden der graphischen Darstellung nach ihrem Wesen, ihrem Gebrauch in den verschiedenen Fällen der Praxis und in ihren wissenschaftlichen Grundlagen, mit einer grossen Mannigfaltigkeit von Beispielen, so dass ich, wie früher a. a. O., auch jetzt noch der vollkommensten Ueberzeugung bin, dass dieselbe nicht genug zur sorgfältigsten Beachtung empfohlen werden kann. Daher habe ich geglaubt, durch Veranstaltung einer deutschen Uebersetzung dieser trefflichen und lehrreichen, zugleich wirklich praktischen Schrift dem Unterrichte im geometrischen Zeichnen einen Dienst zu erweisen und zu dessen immer grösserer Förderung Etwas beizutragen, wobei es aber ein Hauptgesichtspunkt sein musste, zugleich — wie geschehen — die Veranstaltung zu treffen, dass diese Uebersetzung, wenn auch, ihrer möglichsten Verbreitung wegen, ursprünglich im Archiv gedruckt, doch auch als besonderer Abdruck aus demselben und als selbständige Schrift mit besonderem Titel von der Verlagshandlung des Archivs bezogen werden kann.

Bei diesen Bestrebungen und Wünschen ist mir Herr Maximilian Curtze, Lehrer am Gymnasium in Thorn in Westpreussen, durch Uebernahme der Uebersetzung bereitwilligst entgegen gekommen, was ich mit besonderem Danke zu erwähnen nicht unterlassen kann und darf, da meine so viel in Anspruch genommene Zeit und Kraft — wenigstens für jetzt — mir nicht gestattete, mich selbst dieser Arbeit zu unterziehen. Einen weiteren Dank muss ich aber auch dem Zeichnenlehrer an dem genannten Gymnasium, Herrn Templin, hier aussprechen, indem sich derselbe ganz freiwillig, aus reinem Interesse für die Sache, ganz ohne meine Aufforderung, die ich an ihn zu richten gar nicht gewagt haben würde, der wichtigen Anfertigung der Figurentafeln unterzog und durch deren Uebersendung mich freudigst überraschte. Einige kleine Zusätze von meiner Seite wird man nicht übersehen.

Greifswald im April 1865.

Grunert.

---

## An den Leser!

Das isometrische Zeichnen wurde im Jahre 1820 von William Farish, Professor zu Cambridge, in zwei Vorlesungen, die er am 21. Februar und 6. März vor der philosophischen Gesellschaft zu Cambridge hielt, bekannt gemacht. Er wendete es speciell auf die Zeichnung von Maschinen an. Nach Farish beschäftigten sich Mehrere mit dem isometrischen Zeichnen, und Möllinger schlug auch die Projectionsart vor, die er die isometrische für zwei Axen nannte, und die mit der monodimetrischen im Wesentlichen zusammenfällt. Aber erst im Jahre 1844 wurde das Problem des axonometrischen Zeichnens in seiner ganzen Allgemeinheit von Julius Weisbach, gegenwärtig Professor der Mechanik an der Berg-Akademie zu Freiberg in Sachsen, gelöst.

Die von verschiedenen Autoren in's Licht gestellten Vorzüge des axonometrischen Zeichnens erhielten durch die Erfahrung solche Bestätigung, dass dasselbe heute auf vielen Schulen Deutschlands und Englands gelehrt wird. Ich glaube nicht, dass es schon in die französischen Schulen Eingang gefunden hat, und daher ist es auch noch nicht bis zu uns gekommen, da wir hauptsächlich die in Frankreich eingeführten neuen Erfindungen zu beachten und uns anzueignen pflegen *).

Weisbach und Diejenigen, welche die allgemeine Lösung der Fundamental-Aufgaben auseinandergesetzt haben, auf denen das axonometrische Zeichnen beruht, thaten dies mittelst der

*) Man übersehe nicht, dass dies im Jahre 1856 geschrieben ist. G.

sphärischen Trigonometrie, und es konnte deshalb nur den in die Trigonometrie Eingeweiheten gelehrt werden. Da ich mich überzeugt hatte, dass alle Principien desselben vollständig mit Hilfe der gewöhnlichen Geometrie und der ersten Anfänge der Algebra entwickelt werden können, hielt ich es der Mühe werth, einige Vorlesungen des Cursus der Anwendungen der Geometrie auf die Künste der Entwickelung der Principien dieser Zeichnungsart zu widmen, nach Auseinandersetzung derjenigen, auf die sich die gewöhnlichsten Methoden, Körper darzustellen, gründen, deren ich mich zur Erläuterung der Fundamente der Axonometrie bediene. Ich bestimmte einige der praktischen Uebungen, die im Institute gehalten werden, zum Zeichnen verschiedener, zum Theil sehr complicirter Körper, und ich muss gestehen, dass die durch guten Willen Ausgezeichneten über alle meine Erwartung so gut damit fertig wurden, dass ich überzeugt bin, dass das axonometrische Zeichnen der grössten Popularität fähig ist.

# Erster Theil.

## Bestimmung der Form und der Lage eines Körpers.

### Erstes Capitel.

### *Lage eines Punktes auf einer Ebene.*

§. 1. Coordinatenaxen und Anfang der Coordinaten.

In der ebenen Geometrie ist man schon längst über die Bestimmung der Lage der verschiedenen Punkte einer Ebene in Bezug auf zwei Coordinatenaxen einig: wir wollen hier die hauptsächlichsten Definitionen in Erinnerung bringen. — Coordinatenaxen nennt man zwei Gerade $OX$, $OY$ (Fig. 1.), die auf einander senkrecht sind, in Bezug auf welche die Lage aller anderen Punkte bestimmt werden soll, die in der Ebene enthalten sind. Abscissenaxe heisst oftmals die eine dieser beiden Axen, z. B. $OX$, und dann nennt man die andere, nämlich $OY$, die Ordinatenaxe. Anfang der Coordinaten heisst der Durchschnittspunkt beider Axen.

§. 2. Coordinaten, Abscisse, Ordinate.

Coordinaten eines Punktes heissen die Abstände desselben von den Coordinatenaxen. Es sei ein Punkt $M$ (Fig. 2.) gegeben. Zieht man von ihm auf die Axen die beiden Perpendikel $Mm'$, $Mm''$, so heissen die beiden Längen $Mm' = Om''$ und $Mm'' = Om'$ die Coordinaten des Punktes $M$. Abscisse eines Punktes heisst seine der Abscissenaxe parallele Coordinate. Nimmt man $OX$ als Abscissenaxe, so ist die Gerade $Om'$ oder die ihr gleiche $Mm''$ die Abscisse von $M$. Ordinate eines Punktes heisst die der Ordinatenaxe parallele Coordinate desselben. In unserem Falle ist $Om''$ oder $Mm'$ die Ordinate von $M$.

§. 3. Projection eines Punktes.

Unter Projection eines Punktes auf eine Axe versteht man den Punkt, in welchem die Axe von dem Perpendikel, das von dem

Punkte auf sie gefällt ist, geschnitten wird. In unserem Falle ist $m'$ (Fig. 2.) die Projection von $M$ auf die Abscissenaxe und $m''$ seine Projection auf die Axe der Ordinaten.

### §. 4. Die Projectionen oder die Coordinaten eines Punktes bestimmen seine Lage.

Die Lage eines beliebigen Punktes, der in der Ebene der *beiden* Axen liegt, ist vollständig bestimmt:

1. Wenn die Lage seiner Projectionen auf die Axen gegeben ist. Es seien (Fig. 2.) $m'$ und $m''$ die Projectionen eines Punktes, seine Lage sei unbekannt. Errichtet man $m'M$ senkrecht auf die Abscissen-, $m''M$ senkrecht auf die Ordinatenaxe, so ist $M$, der Durchschnittspunkt der beiden Perpendikel, der gesuchte Punkt, derselbe also nun bestimmt.

2. Wenn man die numerischen Werthe seiner Coordinaten kennt. Es seien $14^{mm}$ und $8^{mm}$ die Abscisse und die Ordinate eines Punktes, dessen Projectionen unbekannt sind. Man nehme auf der Abscissenaxe (Fig. 2.) einen Punkt $m'$ so an, dass $Om' = 14^{mm}$ wird; errichtet man dann $m'M$ senkrecht auf der Abscissenaxe und macht es $8^{mm}$ lang, so erhält man den Punkt $M$, dessen Lage man suchte. Man könnte ebenso $Om'' = 8^{mm}$ annehmen und $Mm'' = 14^{mm}$ senkrecht auf der Ordinatenaxe errichten.

### §. 5. Positive und negative Coordinaten.

Liegen die Projectionen des zu bestimmenden Punktes immer auf denselben Theilen der Axen, so heissen seine Coordinaten positiv, und die Zahlen, durch die sie gegeben sind, werden entweder ohne Zeichen oder mit dem Zeichen + geschrieben. Fällt dagegen irgend eine der Projectionen des Punktes auf die Verlängerung einer Axe, so heisst die entsprechende Coordinate negativ, und die Zahl, welche sie ausdrückt, erhält das Zeichen —.

Die Projectionen von $M$ (Fig. 3.) sind $m'$ und $m''$; man sagt daher, die Coordinaten von $M$ seien z. B. $+15^{mm}$ und $+10^{mm}$. Die Projectionen von $M'$ sind $m'''$ und $m''$; die Abscisse von $M'$ ist also $Om'''$, die nicht mehr auf $OX$, sondern auf der Verlängerung $OX'$ gezählt wird. Man sagt daher, die Coordinaten von $M'$ seien $-15^{mm}$ und $+10^{mm}$. In ähnlicher Weise ergibt sich, dass die Coordinaten von $M''$ $-15^{mm}$ und $-10^{mm}$, die von $M'''$ endlich $+15^{mm}$ und $-10^{mm}$ sein werden.

Sind die Vorzeichen der Coordinaten eines Punktes gegeben,

so kann man immer bestimmen, welches der durch die Axen gebildete rechte Winkel oder Quadrant sei, in dem der Punkt liegt. Ist die Abscisse positiv, so befindet sich in unserem Falle der Punkt rechts von der Ordinatenaxe; ist dieselbe dagegen negativ, so liegt der Punkt auf der Linken. Ist die Ordinate positiv, so befindet sich der Punkt oberhalb der Abscissenaxe; ist sie negativ, so liegt er umgekehrt unterhalb derselben.

## Zweites Capitel.

### *Lage eines Punktes oder eines Körpers im Raume.*

§. 6. Methode die Lage eines Punktes zu bestimmen.

Die Lage eines beliebig im Raume gelegenen Punktes bezieht man in analoger Weise auf Ebenen, die man als fest annimmt. Man habe drei Ebenen $XOY$, $YOZ$, $ZOX$ (Fig. 4.), die, unter einander senkrecht, sich in den Geraden $OX$, $OY$, $OZ$ schneiden. Jede dieser Geraden (z. B. $OZ$) ist senkrecht auf jeder der beiden anderen (auf $OX$ und $OY$), und also auch senkrecht auf der durch diese beiden Geraden gebildeten Ebene (auf der Ebene $XOY$ in unserem Falle). Es sei nun ein Punkt $M$ im Raume gegeben. Zieht man von ihm $Mm'$ senkrecht auf die Ebene $XOY$ und dann von $m'$ die Senkrechte $m'n$ auf $OX$, misst dann die drei Längen $On$, $nm'$, $m'M$, so ist die Lage des Punktes $M$ in Bezug auf die drei gegebenen Ebenen vollständig bestimmt. Denn es ist augenscheinlich, dass wenn wir durch einen beliebigen anderen Punkt des Raumes als $M$, z. B. durch $P$, die Senkrechten $Pp'$, $p'q$ in der oben gezeigten Weise ziehen, die Längen $Pp'$, $p'q$, $qO$ entweder sämmtlich oder doch zum Theil von $Mm'$, $m'n$, $nO$ verschieden sind oder wenigstens in dem entgegengesetzten Sinne als diese letzteren gezählt werden müssen.

§. 7. Coordinatenebenen, Coordinatenaxen und Anfangspunkt der Coordinaten.

Coordinatenebenen heissen die Ebenen $XOY$, $YOZ$, $ZOX$ (Fig. 4.), die unter einander senkrecht sind und auf welche die Lage der Punkte des Raumes bezogen wird. Coordinatenaxen heissen ferner die Geraden $OX$, $OY$, $OZ$, in denen die Coordinatenebenen sich schneiden. Diese Geraden sind ebenfalls unter sich senkrecht. Der Punkt $O$, in welchem die drei Coordinaten-Ebenen und Coordinaten-Axen sich schneiden, heisst Anfang der Coordinaten.

§. 8. Coordinaten und Projectionen eines Punktes.

**Coordinaten** eines Punktes heissen die Längen der drei Perpendikel, die von dem Punkte auf die drei Coordinatenebenen gefällt werden können. Die Fusspunkte dieser Perpendikel heissen **Projectionen** des Punktes auf die drei Coordinatenebenen. Es sei $M$ (Fig. 5.) der Punkt im Raume, dann sind $Mm'$, $Mm''$, $Mm'''$ die drei Coordinaten des Punktes, unter der Voraussetzung, dass sie auf den Ebenen $XOY$, $YOZ$, $ZOX$ senkrecht sind. Die Projection von $M$ auf die Ebene $XOY$ ist $m'$; $m''$ und $m'''$ sind die Projectionen auf die Ebenen $YOZ$, $ZOX$.

§. 9. Methode zur Bestimmung der Coordinaten eines Punktes.

Die Senkrechten auf die Coordinatenebenen: $Mm'$, $Mm''$, $Mm'''$, sind den Coordinatenaxen, das heisst $OZ$, $OX$, $OY$, parallel; nimmt man nun $On = Mm''$, $On' = Mm'''$, $On'' = Mm'$ (Fig. 5.) und zieht die Geraden $nm'$, $m'n'$, $n'm''$, $n''m''$, $nm'''$, $n''m'''$, so ist klar, dass man dadurch ein rechtwinkliges Parallelepiped construirt, dessen Seitenkanten alle entweder unter sich parallel oder senkrecht sind und mit den Coordinaten des Punktes $M$, denen sie parallel sind, gleiche Länge haben. Die drei Längen $Mm'$, $m'n$, $nO$, welcher wir uns in §. 6. zur Bestimmung der Lage des Punktes $M$ bedienten, sind daher gleich den drei Coordinaten $Mm'$, $Mm'''$, $Mm''$ des Punktes $M$. Dieselben Längen würden wir auch erhalten haben, wenn wir vom Punkte $M$ die Senkrechte $Mm''$ auf die Ebene $YOZ$ gefällt, darauf von $m''$ die Senkrechte $m''n'$ auf die Axe $OY$ gezogen und dann die drei Längen $Mm''$, $On'$, $m''n'$ gemessen hätten. Hieraus ergiebt sich: **Um die drei Coordinaten eines Punktes zu erhalten, fälle man von demselben auf eine der Coordinatenebenen ein Perpendikel, vom Fusspunkte dieses Perpendikels ein neues auf eine der in der Coordinatenebene liegenden Axen, und messe darauf die Längen jedes der beiden Perpendikel und den Abstand des Fusspunktes des letzten vom Anfange der Coordinaten.**

§. 10. Lage eines Punktes, dessen Coordinaten gegeben sind.

Sind die Coordinaten eines Punktes in Zahlen gegeben, so findet man die Lage desselben auf folgende Weise: **Man nehme auf einer der Axen vom Anfang ausgehend eine Länge gleich der Coordinate, die der Axe parallel ist, mit**

perirt; von dem so erhaltenen Punkte nehme
einer Parallelen zu einer zweiten Axe eine
ich der Coordinate, welche dieser zweiten Axe
t; durch diesen zweiten Punkt ziehe man end-
lich eine Parallele zur dritten Axe und schneide auf ihr
eine Länge gleich der dritten Coordinate ab, dann ist
der so erhaltene Punkt derjenige, dessen Lage wir
suchten.

Es seien die drei Coordinaten eines gegebenen Punktes, die bezüglich den Axen $OX$, $OY$, $OZ$ (Fig. 6.) parallel sind, gleich $14^{mm}$, $24^{mm}$, $22^{mm}$. Man nehme $On = 14^{mm}$, $nm'$ sei ferner parallel $OY$ und gleich $24^{mm}$, endlich sei $m'M = 22^{mm}$ und parallel zu $OZ$, dann ist $M$ der gesuchte Punkt. Man gelangt zu demselben Resultate auf einige andere Arten, z. B. wenn man $On'' = 22^{mm}$ macht, nachher $n''m''$ parallel $OY$ nimmt und gleich $24^{mm}$ macht, und endlich $m''M = 14^{mm}$ und parallel $OX$ annimmt.

### §. 11. Negative und der Null gleiche Coordinaten.

Wenn der im Raume gegebene Punkt nicht zwischen den Theilen der Ebenen, die wir betrachteten, enthalten ist, so können einige oder alle Coordinaten negativ werden.

Ist der Punkt $M$ so gelegen, wie in Fig. 7., so sagt man, da man, um von $O$ nach $n$ zu gelangen, nicht nach $X$, sondern nach $X'$ zu vorwärts gehen muss, dass die Coordinaten von $M$ (wenn ihre numerischen Werthe dieselben sind, wie in dem in §. 10. behandelten Falle) $-14^{mm}$, $+24^{mm}$, $+22^{mm}$ sind. Muss man, nachdem man in $n$ angekommen ist, nicht in der Richtung $OY$ (Fig. 8.) vorwärts gehen, sondern auf der Verlängerung $OY'$, um nach $m'$ zu gelangen, so sagt man ferner, dass die Coordinaten des Punktes $M$ $-14^{mm}$, $-24^{mm}$, $+22^{mm}$ seien, und sollen $-14^{mm}$, $-24^{mm}$, $-22^{mm}$ die Coordinaten des Punktes sein, so will das sagen, dass, wenn man einmal wie im vorhergehenden Falle, nach $m'$ (Fig. 9.) gelangt ist, man nicht in der Richtung $OZ$ fortschreiten darf, sondern in der ihrer Verlängerung $OZ'$, um den Punkt $M$ zu erreichen.

Die Bestimmung des Zeichens der verschiedenen Coordinaten des Punktes $M$ in den verschiedenen Fällen ist eben so leicht, wenn derselbe in irgend einem anderen Theile des Raumes ausserhalb derer liegt, die wir als Beispiele gebraucht haben. Umgekehrt kann man mit gleicher Leichtigkeit immer die Lage eines drei gegebenen Coordinaten entsprechenden Punktes finden, wie auch die Zeichen beschaffen sein mögen. Ist eine der Coordinaten

gleich Null, so will das sagen, der Punkt befindet sich auf der, den nicht verschwindenden Coordinaten parallelen Coordinatenebene. Es sei $M$ (Fig. 10.) auf der Ebene $XOY$ gelegen und es sei $On = 14^{mm}$, $nM = 24^{mm}$, so sind $14^{mm}$, $24^{mm}$, 0 die drei Coordinaten des Punktes $M$. Sind zwei Coordinaten gleich Null, so befindet sich der Punkt auf der Axe, welche der nicht verschwindenden Coordinate parallel ist, und sind endlich alle drei Coordinaten gleich Null, so fällt der Punkt mit dem Anfange der Coordinaten zusammen.

### §. 12. Form und Lage der Linien und Flächen.

Kann man die Lage eines Punktes bestimmen, so hat es keine Schwierigkeit, die Form und Lage der Linien und der Oberflächen der Körper zu bestimmen.

Ist eine Gerade gegeben, so sucht man die Coordinaten eines jeden ihrer Endpunkte, die Lage und die Grösse der Geraden ist dann vollständig bestimmt.

Ist eine krumme Linie gegeben, so bezeichnet man, gemäss dem, was schon in der ebenen Geometrie gelehrt wird, auf derselben so viele Punkte, als man für nöthig hält, damit, wenn man durch dieselben eine Curve zieht, diese sich hinreichend der gegebenen anschmiegt. Kennt man die Coordinaten eines jeden dieser Punkte, so ist auch hier die Lage und die Natur der Curve, welche sie verbindet, bestimmt.

Ist die Oberfläche, deren Lage man festlegen will, ein Polygon, so genügt es, die Coordinaten jedes seiner Scheitel zu messen. Ist sie eben, aber mit krummlinigem Umfang, so bestimmt man diesen Umfang mittelst der vorher angegebenen Methode.

Ist endlich die Fläche, deren Natur und Lage man bestimmen will, nicht eben, so muss man auf derselben so viel Punkte annehmen, als man für nöthig hält, damit aus ihrer Lage mit hinreichender Genauigkeit auch auf die der anderen geschlossen werden könne. Misst man die Coordinaten jedes dieser Punkte, so ist die Lage und Natur der Oberfläche hinlänglich bestimmt *).

*) In der höheren Geometrie nimmt man zuweilen gegen einander schiefe Coordinatenebenen an, indem man dann unter Coordinaten eines Punktes die Längen der Geraden versteht, die man durch ihn parallel zu jeder Axe bis zum Durchschnittspunkt mit der Ebene der beiden anderen legt. Solche Coordinaten, deren wir hier nur beiläufig Erwähnung thun, heissen schiefe, während die, welche wir annehmen, rechtwinklige genannt werden.

# Zweiter Theil.

## Das Zeichnen der Körper, deren Grenzlinien und Grenzflächen man der Lage und der Form nach kennt.

§. 13. Nothwendigkeit, die Körper durch Zeichnungen darzustellen.

Die Zahlen, welche die Coordinaten der Punkte eines Körpers ausdrücken, deren Lage zu kennen hinreicht, um eine hinreichend exacte Vorstellung von der Form und Lage des Körpers selbst zu erhalten, schliessen Alles in sich, was zur Bestimmung der einen und der anderen und zur Auflösung aller geometrischen Probleme nöthig ist, die in Bezug auf dieselben gegeben werden können. Aber diese Zahlen haben eine grosse Unbequemlichkeit, die nämlich, dass sie uns nicht mittelst unserer Sinne eine augenblickliche Idee der Form und der Lagenbeziehungen der Körper geben. Daher entsteht die Nothwendigkeit, solche Körper durch Zeichnungen darzustellen, welche so gut als möglich den doppelten Vortheil vereinigen, genau die Form und die Lage zu bestimmen und die eine sowohl wie die andere unseren Augen darzustellen. Die Methoden des Zeichnens, von denen wir in der Kürze die geometrischen Grundlagen angeben wollen, sind die der cotirten Ebenen, der descriptiven Geometrie, der Perspective und der Axonometrie.

## Erstes Capitel.

## *Cotirte Ebenen**).

§. 14. Darstellung eines Punktes.

Es sei ein Punkt $M$ im Raume gegeben. Man projicire ihn (Fig. 11.) auf die Coordinatenebene $XOY$ und $m'$ sei diese Projection. Nimmt man jetzt an, dass die Ebene des Papiers, auf dem man die Zeichnung macht, genau mit der Ebene $XOY$ zusammenfällt, so kann man auf diesem Papierblatte den Punkt $m'$

*) Für „Piani quotati" im Original haben wir hier die dem Französischen entlehnte Benennung „Cotirte Ebenen (plans cotés)" — m. s. z. B. Salneuve: Cours de Topographie et de Géodésie. p. 209. — beibehalten, eben so nachher „Cote", weil diese Benennungen wohl in Deutschland am meisten gebräuchlich sind. „Cote" heisst jede Bezeichnung und „coter" heisst mit Ziffern oder Buchstaben bezeichnen. Zuweilen findet man in deutschen Schriften auch „Quote." G.

und zugleich die Axen $OX$, $OY$ in ihrer wahren Lage zeichnen. Hat man dies gethan, so weiss man, dass der Punkt $M$ auf einer zu dem Papier senkrechten Geraden liegt, die durch den Punkt $m'$ geht. Man weiss aber noch nicht, um wieviel er sich über oder unter der Ebene des Papiers befindet. Man messe die Coordinate $Mm'$ und sie sei gleich $22^{mm}$. Schreibt man nun diese Zahl neben $m'$ und kommt dahin überein, dass dies die Coordinate von $M$ bezeichnen soll, die der Axe $OZ$ parallel ist, welche nicht in der Ebene des Papiers enthalten ist, so ist die Lage des Punktes im Raume vollständig bestimmt. Die Zahl, die man so neben die Projection eines Punktes schreibt, und die nichts Anderes ist, als die dritte Coordinate desselben, die der nicht in der Zeichnung enthaltenen Axe parallel ist, heisst die Cote des Punktes.

Liegt der Punkt, statt oberhalb der Zeichnungsebene, unterhalb derselben, so ist seine Cote negativ. Würde also neben die Projection von $M$ (Fig. 12.) die Cote $-22^{mm}$ geschrieben, so würde das heissen, der Punkt $M$ befände sich auf der zu der Zeichnungsebene senkrechten Geraden, die durch $m'$ geht, und zwar $22^{mm}$ unterhalb des Blattes.

### §. 15. Darstellung einer Geraden.

Man habe jetzt eine Gerade $MN$ (Fig. 13.). Man bestimme die Projectionen ihrer Endpunkte $M$ und $N$ auf der Ebene $XOY$, mit welcher man das Zeichnungsblatt zusammenfallend annimmt. Es seien $m'$ und $n'$ diese Projectionen und die Coten der Punkte $M$ und $N$ seien z. B. $17^{mm}$ und $20^{mm}$; zieht man dann die Gerade $m'n'$, so stellt diese die Gerade $MN$, die im Raume liegt, vor, und ist das, was man Projection der Geraden $MN$ nennt. Es ist leicht zu zeigen, dass die Ebene, welche durch $MN$ und $m'n'$ geht, senkrecht auf der Ebene $XOY$ ist. Daher nennt man Projection einer Geraden auf eine Ebene den Durchschnitt dieser Ebene mit einer anderen, die auf ihr senkrecht steht und durch die in Rede stehende Gerade geht, oder die Gerade, welche die Projectionen der Endpunkte der Geraden im Raume auf die Ebene verbindet.

Ist die Projection einer Geraden mit den Coten ihrer Endpunkte oder, wie man zu sagen pflegt, die cotirte Projection einer Geraden gegeben, so ist letztere vollständig der Grösse und Lage nach gegeben.

### §. 16. Darstellung einer Curve.

Wir müssen jetzt eine krumme Linie darstellen. Man be-

derselben so viele Punkte, als man nothwendig hält, ufeinanderfolge genügt, um diese Curve hinreichend n. Es seien $M$, $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$, $N$ (Fig. 14.) diese der Curve, und $m'$, $p'$, $q'$, $r'$, $s'$, $t'$, $n'$ die Projectio- r Ebene $XOY$ oder der Papierebene. Die Linie, h alle diese Punkte geht, ist das, was man die Pro- r Curve $MN$ nennt. Schreibt man nun neben jeden $m'$, $p'$, $q'$, $r'$, $s'$, $t'$, $n'$ die Coten der Punkte $M$, $P$, $Q$, $R$, $T$, $N$, so ist klar, dass die Lage und die Natur der Curve im aume dadurch vollständig bestimmt ist.

§. 17. Zeichnung eines Polyeders.

Es sei z. B. ein Tetraeder $ABCD$ (Fig. 15.) gegeben. Man zeichne die Projectionen seiner Seitenkanten auf die Ebene $XOY$, so Projectionen auf das Zeiche ck $a'b'c'$, von dessen Scheiteln nach $a$, d n des oberen Scheitels des Tetraeders, ausgehen. ur die man so erhält, ist das, was man die Projection des ers nennt. Schreibt man nun neben jeden so projicirten Sc. die Cote, so erhält man die cotirte Projection oder, wie man gt, die cotirte Ebene, und das Tetraeder ist sowohl der l als der Lage nach vollständig bestimmt. In ähnlicher Weis verfährt man für irgend ein beliebiges Polyeder.

§. 18. Zeichnung eines beliebigen Körpers.

Ist der zu zeichnende Körper nicht blos von Ebenen begrenzt, sondern zum Theil oder gänzlich von krummen Flächen, so kann man ihn durch die cotirten Projectionen so vieler seiner Oberfläche angehörenden Punkten darstellen, als man für hinlänglich hält, damit durch die Kenntniss ihrer Lage eine völlig hinreichende Kenntniss der Form und Lage des Körpers entsteht. Je mehr Punkte der Oberfläche man nimmt, deren cotirte Projectionen man hat, um so genauer wird die Bestimmung des Körpers. Um aber eine zweckmässige Auswahl der zu projicirenden Punkte zu treffen, macht man von einigen allgemeinen Methoden Gebrauch.

Man setzt z. B. voraus, dass der Körper von vielen, der Ebene der Zeichnung parallelen Ebenen geschnitten werde, und zeichnet auf ersterer die Projectionen der Curven, nach denen jede Ebene die Oberfläche des Körpers schneidet. Die Gesammtheit dieser Curven mit zweckmässig angegebenen Coten kann den Körper mit aller Genauigkeit, die man wünscht, darstellen. Es sei z. B. eine Halbkugel (Fig. 16.) gegeben, deren Grundfläche parallel der Ebene $XOY$ ist. Denken wir uns nun die Halbkugel von

gleich weit von einander abstehenden Parallelebenen zu $XOY$ geschnitten, die sie vollständig einschliessen, so schneidet jede von ihnen die Halbkugel in einem Kreise, dessen Radius für die Grundfläche gleich dem der Kugel ist, und nachher abnimmt, bis er für den Gipfelpunkt der Halbkugel verschwindet. Projicirt man nun jede so erhaltene Kreisperipherie und schreibt neben jede so entstandene Kreisperipherie die entsprechende Cote, d. h. die Höhe ihrer Ebene über der Ebene der Zeichnung, so sind viele Punkte der Halbkugel genau bestimmt, und man hat so angefangen, mit einer gewissen Annäherung die Form und die Lage der Kugel zu bestimmen.

Um nun die Lage von Punkten der Halbkugel zu bestimmen, die nicht unter denen enthalten sind, die wir vorher bestimmt haben, könnte man die Kugel noch durch andere Zwischenebenen der anderen Ebenen schneiden, und indem man alsdann die cotirten Projectionen der so erhaltenen Zwischenkreise machte, würde man noch bedeutend genauer die Form und die Lage der Halbkugel bestimmen.

Wie auch der Körper beschaffen ist, man kann ihn immer mit hinreichender Genauigkeit darstellen, sobald man ihn sich durch eine hinreichende Zahl von Ebenen geschnitten denkt und die cotirten Projectionen der Curven zeichnet, in denen diese Ebenen den gegebenen Körper schneiden. Sind die Ebenen gleich weit abstehend, so ist es nicht einmal nöthig, auf der Zeichnung die Cote einer jeden aufzuschreiben, und die Gesammtheit der projicirten Curven gibt ausserdem dem Auge selbst eine völlig hinreichend klare Idee von der Form des Körpers*).

### § 19. Aufgaben in Bezug auf cotirte Ebenen, deren Lösung zu kennen von Wichtigkeit ist.

Die Zeichnung der Körper geschieht nicht nur, um dem Beobachter eine Idee ihrer Form und Lage zu geben, sondern vor Allem, um die Mittel zu liefern, um an den Zeichnungen die geometrischen Eigenschaften der dargestellten Körper zu studiren. Es ist also für den Geometrie Studirenden nicht genügend, das Princip der Darstellung der Körper auf einem Blatt Papier zu kennen, sondern er muss, wenn die Zeichnung gegeben ist, so vertraut mit den Folgerungen des Principes sein, nach denen sie ausgeführt ist, um im Stande zu sein, beim ersten Anblick die

*) Ein treffliches Beispiel zu Vorhergehendem bieten die beiden ausgezeichneten Niveau-Karten von Prag und dessen Umgebungen dar, die man bei dem „Studien über die Methoden und Benutzung hypsometrischer Arbeiten von Carl Kořistka. Gotha. 1858. 4°" findet. G.

in die Augen springenden Aufgaben zu lösen, die ihm rden können, und mittelst eines mehr oder weniger lan- zur Lösung der schwierigsten Fragen zu gelangen. So z. B., wenn die cotirte Projection einer Geraden geg daraus ihre Länge bestimmen; ist aber die cotirte Projec eines Polygons gegeben, so kann man die Fläche, die Winkel, die Diagonalen, den Durchschnitt der Ebene, in der es liegt, mit der eines anderen Polygons bestimmen, von dem man ebenfalls die cotirte Projection kennt, und ähnliche Aufgaben lösen. Unser Zweck erlaubt es hier nicht, jetzt in diesen Gegenstand tiefer einzudringen, um so mehr, da wir zu denen zurückkehren müssen, deren man specieller benöthigt ist, wenn man sich mit der Untersuchung und dem Studium der Nivellirungen beschäftigt, die schon auf dem Erdboden bei unseren praktischen Uebungen ausgeführt sind.

## Zweites Capitel.

### *Descri ometrie.*

#### §. 20. Gegenstand der riptiven Geometrie.

Die Zeichnung eines K , die mittelst der Methode der cotirten Ebenen ausgeführt ist, fordert immer, dass jeder wichtige Punkt der Zeichnung von einer Cotenzahl, d. h. von einer Zahl begleitet sei, welche den Werth der dritten Coordinate des Punktes angiebt. Die Methode der cotirten Ebenen kann man also eine gemischte nennen, da sie die Form und die Lage der Körper durch Zeichnungen und Zahlen bestimmt. Will man die Form und die Lage der Körper nur durch Zeichnung, nicht durch Zahlen darstellen, so muss man nothwendigerweise zu anderen Mitteln oder Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen, die den Gegenstand desjenigen Theiles der Geometrie bilden, dem man den Namen **Descriptive Geometrie** gegeben hat.

#### §. 21. Darstellung eines Punktes.

Es sei ein Punkt $M$ im Raume gegeben und man bestimme dessen Projectionen $m'$ und $m''$ (Fig. 17.) auf zwei der Coordinatenebenen, z. B. $XOY$, $XOZ$. Ist die Lage dieser Projectionen des Punktes bekannt, so ist klar, dass die Lage des Punktes $M$ vollständig bestimmt ist, denn der Punkt $M$ befindet sich immer im Durchschnittspunkte der beiden Geraden $m'M$, $m''M$, die auf den betreffenden Coordinatenebenen, von denen sie ausgehen, senkrecht sind.

Auf einem Blatte Papier, das man mit der Ebene $XOY$ zusammenfallen lässt, kann man die Projection $m'$ darstellen. Um auf demselben Blatte die Projection $m''$ darzustellen, denke man sich, die Ebene $XOZ$ drehe sich um die Axe $OX$ um $90^0$, bis sie in die Verlängerung oder Erweiterung der Ebene $XOY$ fällt. Man erhält dann eine Figur, wie die zweite in Fig. 17., in welcher der Punkt $M$ des Raumes durch die beiden Projectionen $m'$ und $m''$ dargestellt wird.

Sind die beiden Projectionen des Punktes auf dem Zeichnungsblatt gegeben, so ist seine Lage im Raume auch vollständig bestimmt, denn es genügt, das Blatt Papier um $OX$ sich drehen zu lassen, bis die Ebene $XOZ$ senkrecht auf $XOY$ steht. Der Punkt $M$ ist dann der Durchschnitt der Senkrechten auf den entsprechenden Coordinaten-Ebenen, die durch die Projectionen $m'$ und $m''$ gehen.

Da man auf dem Blatte nur die Zeichnung der Projectionen auf die Ebenen $XOY$, $XOZ$ macht und nicht im Geringsten die dritte Coordinaten-Ebene $ZOY$ beachtet, so ist es nicht nöthig, in der Zeichnung die Axen $OY$ und $OZ$ beizubehalten. Man zeichnet daher in den Zeichnungen der descriptiven Geometrie nur die Axe $OX$, die dabei den Namen Erdlinie*) annimmt. Betrachtet man nun die Lage der beiden Projectionen eines Punktes in Bezug auf die Erdlinie, so sieht man leicht, dass vor der Drehung der Ebene $XOZ$ die Gerade $m''n$ senkrecht auf $m'n$ ist. Nach der Drehung der Ebene $XOZ$, bis sie die Verlängerung der Ebene $XOY$ wird, bleiben $nm''$ und $nm'$ senkrecht auf $OX$ und bilden also eine einzige Gerade. Daher erhält man folgenden Fundamental-Satz: **Ein Punkt wird durch seine zwei Projectionen dargestellt, die immer durch eine auf der Erdlinie senkrechte Gerade verbunden sind.**

### §. 22. Darstellung einer Linie.

Man habe jetzt eine beliebige gerade oder krumme Linie. Die Lage und Gestalt einer solchen Linie ist vollständig bestimmt, wenn man die zwei Projectionen derselben bestimmt. Sei z. B. eine Gerade $MN$ gegeben und man bestimmt die beiden Projectionen $m'n'$, $m''n''$ auf die Ebenen $XOY$, $XOZ$ (Fig. 18.), so kann man, vorausgesetzt, dass die Ebene $XOZ$ sich um die Erdlinie dreht, bis sie die Verlängerung der Ebene $XOY$ bildet, beide projici-

*) „Linea di terra" im Original. In deutschen Schriften (m. s. z. B. das sehr empfehlenswerthe „Lehrbuch der descriptiven Geometrie" von C. Gugler. 2. Aufl. S. 7.) heisst die in Rede stehende Linie Grundschnitt (Projectionsaxe, Basis). G.

rende Ebenen auf dem Blatte zeichnen, und man hat dann die Gerade $MN$ dargestellt durch $m'n'$ und $m''n''$.

Sind die Projectionen $m'n'$, $m''n''$ einer Geraden gegeben, so ist es sehr leicht, die Lage der Geraden im Raume zu bestimmen, auf die sie sich beziehen. Man denke sich den Theil des Blattes, der oberhalb der Erdlinie liegt, um diese gedreht, bis er auf dem Blatte Papier senkrecht steht, denke sich dann durch $m'n'$ eine zu dem Blatte senkrechte, durch $m''n''$ eine andere Ebene gelegt, die senkrecht auf $XOZ$ ist, so schneiden sich die so gelegten Ebenen in einer Geraden, welche die gesuchte ist.

Eine Curve $AB$ im Raume wird auf gleiche Weise beim Zeichnen durch ihre zwei Projectionen $A'B'$ und $A''B''$ (Fig. 19.) dargestellt, die zwischen den Punkten $A'A''$ und $B'B''$ enthalten sind, welche auf denselben, zu der Erdlinie senkrechten Geraden liegen. Es ist klar, dass jeder Punkt der Curve auf diese Weise vollständig bestimmt ist, da, wenn man einen Punkt, dessen Horizontal-Projection z. B. $m'$ ist, betrachtet, die Vertikal-Projection $m''$ sein wird. Nimmt man also den Punkt $O$ als Coordinaten-Anfang, so sind die Geraden $Om$, $nm'$, $nm''$ die drei Coordinaten des Punktes $M$ im Raume.

### §. 23. Darstellung eines Körpers.

In der descriptiven Geometrie werden die Körper eben so wie die Linien durch Zeichnung ihrer Projectionen auf zwei zu einander senkrechten Ebenen dargestellt, die man nachher so gedreht denkt, dass sie nur eine Ebene bilden. So ist z. B. das Tetraeder des §. 17. durch die Projection $a'b'c'd'$ (Fig. 20.), von welcher wir dort sprachen, und durch $a''b''c''d''$, seine Projection auf eine Ebene, die zu derjenigen, auf welcher die Projection $a'b'c'd'$ liegt, senkrecht ist und sie in der Erdlinie $OX$ schneidet, dargestellt. Diese beiden Projectionen des Tetraeders genügen nicht nur, um dem Beschauer eine Idee seiner Form zu geben, sondern liefern auch alle nothwendigen Data, um die geometrischen Eigenschaften desselben zu studiren und seine Lage in Bezug auf die Projections-Ebenen zu untersuchen.

Auch die Halbkugel des §. 18. kann durch die Projection auf $XOY$ (Fig. 21.) der Kreise, in denen sie durch zur Ebene $XOY$ parallele Ebenen geschnitten wird, und dann durch die Projectionen derselben Kreise auf die Ebene $XOZ$ dargestellt werden. Es ist klar, dass, da die Ebenen dieser Kreise auf $XOZ$ senkrecht sind, ihre Projectionen auf $XOZ$ sich auf Gerade reduciren, welche die Längen der Durchmesser der obigen Kreise haben.

Denkt man sich eine auf der Ebene $XOY$ senkrechte Gerade, die sich so bewegt, dass sie immer die Halbkugel berührt, ohne

in sie einzudringen, so ist klar, dass diese Gerade auf der Ebene *XOY* die Peripherie *OA* beschreiben wird, und dass also die Projection jedes anderen Punktes des Körpers innerhalb der Linie, die man so erhält, eingeschlossen ist. Diese Linie führt daher den Namen Umriss oder Contour der Projection des Körpers auf die Ebene *XOY*.

Denkt man sich in ähnlicher Weise, dass eine zu der Ebene *XOZ* senkrechte Gerade in jeder Lage die Halbkugel berührt, ohne in sie einzudringen, so beschreibt diese Gerade auf der Ebene *XOZ* einen Halbkreis, welcher der Umriss oder Contour der Projection der Halbkugel auf die Ebene *XOZ* ist.

Unter den Punkten, welche man von einem beliebigen Körper in den Projectionen der descriptiven Geometrie darstellt, gehören jedesmal diejenigen, welche den Umriss oder Contour der Projection des Körpers auf die eine oder andere Projections-Ebene bilden, zu den wichtigsten.

### §. 24. Vergleichung zwischen der Methode der cotirten Ebenen und der descriptiven Geometrie.

Wenn man einen gegebenen Punkt, eine Linie oder einen beliebigen Körper, sei es durch die Methode der cotirten Ebenen, sei es durch die von der descriptiven Geometrie gelehrte darstellen soll, so beginnt man mit der Projicirung desselben auf eine Ebene. Dann bezeichnet man nach der Methode der cotirten Ebenen die Höhe jedes Punktes oberhalb oder unterhalb dieser Projections-Ebene durch eine Zahl. Nach den Methoden der descriptiven Geometrie bezeichnet man dagegen diese Höhe dadurch, dass man eine neue Projection des Körpers auf eine zur ersten Projections-Ebene senkrechte Ebene macht.

So bezeichnet man, um das Tetraeder in §. 17. und §. 23. darzustellen, in dem einen Falle die Höhen oder Coten des Tetraeders *ABCD* (Fig. 22.) durch die Zahlen $13^{mm}$, $13^{mm}$, $13^{mm}$, $25^{mm}$, die man neben die Projectionen $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ dieser Scheitel schreibt. Im anderen Falle dagegen verbindet man mit der Projection $a'b'c'd'$ des Tetraeders die Projection $a''b''c''d''$, die auf einer zu der vorhergehenden Ebene senkrechten Ebene liegt, wobei klar ist, dass $\alpha a'' = 13^{mm}$, $\beta b'' = 13^{mm}$, $\gamma c'' = 13^{mm}$, $\delta d'' = 25^{mm}$ ist.

Es ist also nicht schwer, die Zeichnung eines Körpers, die nach der Methode der cotirten Ebenen gemacht ist, in eine andere nach der descriptiven Geometrie zu verwandeln und umgekehrt. Ebenso hat es keine Schwierigkeit, die Probleme, die in §. 19. erwähnt wurden, nach einer der beiden Methoden zu lösen, wenn man die Lösung mittelst der anderen kennt. Ich werde hier nicht auf die Untersuchung dieser Probleme eingehen, da weder die Zeit es

erlaubt, noch ich das Feld betreten mögte, das dem Professor des geometrischen Zeichnens und der descriptiven Geometrie angehört *).

§ 25. Besondere Bemerkungen.

Die Ebene, die wir hier beständig durch die Buchstaben ***XOY*** bezeichnet haben, nimmt man fast immer horizontal an und sie führt den Namen **Horizontal-Projections-Ebene.** Die beiden anderen Coordinaten-Ebenen werden daher vertikal. Die Projection eines Punktes, einer Linie oder eines Körpers auf die Ebene ***XOY*** heisst die **Horizontal-Projection**, der **Grundriss**, die **Ichnographie** u. s. w., wenn der dargestellte Gegenstand ein Gebäude ist; der **Plan** oder die **Karte**, wenn er ein Terrain ist, u. s. w. Die Projection auf eine der Vertikal-Ebenen führt den Namen **Vertikal-Projection, Prospect, Orthographie, Aufriss** u. s. w.

Da die Projectionen einiger Theile eines etwas complicirten Körpers häufig der Deutlichkeit der Zeichnung der anderen Eintrag thun, so denkt man sich oftmals den Körper durch eine Ebene geschnitten und macht dann die Zeichnung des einen der so abgeschnittenen Theile nicht mehr. Man soll z. B. die Zeichnung eines Hauses machen: Die Horizontal-Projection des Daches bedeckt dann die Projectionen der übrigen Theile des Hauses. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, bezeichnet man durch ausgezogene Linien die Projectionen der Theile, die nicht unterhalb irgend eines Theiles der Oberfläche des Körpers liegen, während man durch gestrichelte oder punktirte Linien die Projectionen der Linien bezeichnet, die unterhalb irgend eines Theiles des Körpers liegen. Da aber dieses Hilfsmittel nicht in allen Fällen hinreichend ist, um eine klare Idee der inneren Einrichtung des Hauses zu geben, so denkt man sich dasselbe durch eine Ebene geschnitten, und die Projection dieses Durchschnittes, der man oftmals auch noch die Projection der Theile des Körpers hinzufügt, die noch übrig sind, führt den Namen **Durchschnitt, Schnitt** u. s. w., und kann sowohl horizontal als vertikal sein.

## Drittes Capitel.

### *Perspective.*

§. 26. Gegenstand der Perspective.

Betreffen die cotirten Projectionen oder die von einer Vertikal-Projection begleiteten nicht sehr verwickelte Gegenstände,

*) Man bedenke, dass diese Schrift sich an Vorlesungen anschliesst. G.

so geben sie dem Beobachter eine unmittelbare Idee von der Form und Lage derselben. Werden die Gegenstände aber nur ein wenig complicirt, so ist es oft eine schwierige Arbeit, aus einer Gesammtheit von Projectionen oder von Projectionen und Zahlen eine etwas klare Idee von der Form und Lage derselben zu erlangen. Daher entsteht besonders für die weniger in der Geometrie Erfahrenen die Nothwendigkeit, eine Art der Darstellung von Körpern zu besitzen, die unmittelbarer zu unseren Sinnen spricht und leichter eine Idee von ihrer Form und Lage gibt, selbst auf Kosten der Evidenz der Zeichnung, die aus ihrer geometrischen Genauigkeit hervorgeht. Die Aufgabe, die man zu lösen hat, ist also folgende: Es ist ein Blatt Papier gegeben, man soll auf demselben die Gegenstände in der Art darstellen, dass der Beschauer, der die Zeichnung betrachtet, einen so viel als möglich gleichen Eindruck von derselben erhält, wie der, den er erhalten würde, wenn er die dargestellten Gegenstände wirklich vor sich hätte. Die Auflösung dieser Aufgabe, blos von ihrer geometrischen Seite betrachtet, bildet den Gegenstand des Theiles der Geometrie, den man **Perspective** nennt.

### §. 27. Princip, auf dem die Perspective beruht.

Wir nehmen an, der Beschauer befinde sich in $O$ und betrachte z. B. den Würfel $ABCDEFGH$ (Fig. 23), dann wird er eine gute Darstellung des Körpers auf dem Blatt Papier $MN$ erhalten, wenn seine Augen dieselbe Empfindung haben, wenn sie den Körper selbst oder das Blatt $MN$ ansehen.

Man setzt zuerst voraus, dass der Beobachter den Körper nur mit einem Auge betrachte, weil im anderen Falle, wenn man beiden Augen Rechnung tragen wollte, mit denen der Beobachter den Körper betrachtet, die Auflösung der Aufgabe bedeutend schwerer werden würde. Dies vorausgesetzt ist es klar, dass, wenn von dem Punkte $A$ des Körpers ein Lichtstrahl in das Auge, das in $O$ liegt, gelangt, das Auge dieselbe Empfindung haben wird, wenn dieser Strahl von einem Punkte $a$ ausgeht, der da liegt, wo die Gerade $AO$ die Ebene $MN$ der Zeichnung schneidet. Man stellt daher in der Zeichnung den Punkt $A$ durch einen Punkt $a$ dar, der da liegt, wo die Gerade $OA$ die Ebene der Zeichnung schneidet. Ein zweiter Punkt $B$ wird auf gleiche Weise in der Zeichnung durch den Punkt $b$ repräsentirt, in welchem die Gerade $OB$ das Blatt schneidet. Die Gerade $AB$ würde nun durch die Gerade $ab$ dargestellt werden, und man sieht, wie man in ähnlicher Weise jede andere

gerade oder krumme Linie auf dem Zeichenblatte darstellen könnte, indem man auf demselben die Folge von Punkten zeichnet, in denen eine Gerade, welche, vom Auge ausgehend, alle Punkte der Linie durchläuft, die man darstellen will, das Blatt schneiden wird. Ist der Körper ein Polyeder, so kann man daher jeden Scheitel und jede Seitenkante in Perspective zeichnen; ist er dagegen von einer krummen Fläche begrenzt, so kann man immer den Umriss darstellen, indem man sich eine Gerade vorstellt, die, vom Auge ausgehend, auf der Oberfläche des Körpers hingleitet, ohne irgend wie in den Körper einzudringen, und immer die aufeinander folgenden Durchschnittspunkte dieser Linie mit der Zeichnungsebene verzeichnet.

Man zeichnet also einen beliebigen Körper perspectivisch, indem man annimmt, zwischen das Auge des Beobachters und den Körper selbst sei in einem Abstande, den man für angemessen hält, die Zeichnungsebene gelegt, und indem man dann auf dieser Ebene die Durchschnittspunkte derselben mit den Gesichtslinien zeichnet, welche vom Auge nach den verschiedenen Punkten des Körpers gehen, die man in die Zeichnung aufzunehmen, für hinreichend hält, um die Form und die Lage hinreichend zu charakterisiren.

### §. 28. Praktische Methode die perspectivische Zeichnung eines Körpers zu machen.

Es seien die Coordinaten eines Punktes $M$ gegeben, und $m'$, $m''$ seien seine Projectionen nach den Methoden der descriptiven Geometrie (Fig. 24). Die perspectivische Zeichnung macht man fast immer auf einer Vertikal-Ebene, welche die Horizontal-Projections-Ebene in einer beliebigen Geraden $AB$ schneidet, und die Vertikal-Projections-Ebene in einer Vertikalen, die in unserer Zeichnung, wie etwa $AC$, auf der Erdlinie senkrecht steht. Es seien ferner auch die Coordinaten und also auch die Projectionen $o'$, $o''$ des Auges, oder des Gesichtspunktes gegeben.

Das Problem, um dessen Auflösung es sich handelt, ist nun einfach das folgende: Man soll den Durchschnittspunkt der in $o'm'$ und $o''m''$ projicirten Gesichtslinie mit der Ebene $ABC$ finden. Es genügt folglich, durch die Gesichtslinie eine Ebene zu legen; kann man die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Ebene $BAC$ finden, so ist der gesuchte Punkt der Durchschnitt der gefundenen Durchschnittslinie mit der Gesichtslinie selbst. Legt man nun durch die oben erwähnte Gesichtslinie eine Ver

kal-Ebene, so schneidet diese die Horizontal-Projections-Ebene in $o'n'$, und die Ebene $ABC$ in einer Vertikal-Linie, die sich auf die Horizontal-Ebene in $n'$ und auf die Vertikal-Ebene in $Qn''$ projicirt. Folglich sind $n'$ und $n''$ die Projectionen des perspectivischen Bildes von $M$ im Raume.

Zieht man also seitwärts Senkrechte $AB$, $AC$, welche die Ebene der perspectivischen Zeichnung einschliessen, trägt $An'$ von der vorher entstandenen Projection auf und macht $n'M' = Qn''$, so hat man den Punkt $M'$ als das perspectivische Bild von $M$.

Aehnlich wird man das Bild jedes anderen Punktes construiren und also auch das jeder Linie und jedes Körpers.

### §. 29. Perspective auf einer krummen Fläche.

Ist die Fläche, auf der man die Zeichnung machen will, krumm statt eben, so kann man auf ihr die perspectivische Zeichnung irgend eines Gegenstandes machen, wenn man die Durchschnittspunkte derselben mit den Gesichtslinien verzeichnet, welche von dem Auge aus- und nach den verschiedenen Punkten des Gegenstandes hingehen.

### §. 30. Wirkung der perspectivischen Zeichnungen auf unsere Sinne.

Untersucht man, was wirklich erfolgt, wenn man einen Körper betrachtet, so bemerkt man, dass, weil wir zwei Augen, z. B. $O$ und $O'$ (Fig. 25.), haben, jedes von ihnen einen Strahl $OA$ und $O'A$ nach jedem Punkte $A$ des beobachteten Körpers aussendet. Das Bild von $A$ ist folglich $a'$ für das Auge $O$ und $a''$ für das andere Auge $O'$. In ähnlicher Weise übersieht man, dass das Bild einer Geraden $AB$ des Körpers für das eine Auge $a'b'$ ist und zwar wesentlich verschieden von $a''b''$, dem Bilde derselben Geraden in Bezug auf das andere Auge. Betrachtet man ferner einen runden Körper, so ist sein Umriss für jedes der beiden Augen verschieden, und zwar nicht blos auf der Perspectiv-Ebene, sondern auch auf dem Körper selbst.

Damit also unsere Sinne von der Betrachtung des Bildes dieselbe Wirkung erhalten, als von der des Körpers selbst, ist es nöthig:

1. dass auf der Bildebene das perspectivische Bild des Körpers für jedes der beiden Augen gezeichnet werde;

2) dass jedes Auge auf der Bildebene nur das Bild sieht, welches ihm zugehört*).

Um also eine entsprechende Wirkung bei Betrachtung eines Perspectivbildes hervorzubringen, ist es zunächst nöthig, vollständig in demselben Abstande von demselben zu sein, in welchem der Maler bei dem Zeichnen das Auge annahm, und dann es nur mit einem Auge zu beobachten, statt mit zweien. Färbt man bei Anfertigung des Perspectivbildes die verschiedenen Theile des Körpers mit den verschiedenen Farben, welche der Natur zukommen und der Intensität der Lichtstrahlen, die von dem Körper reflectirt werden, entsprechen, so erhält man ein Bild, welches auf unsere Sinne, besonders, wenn man daran gewöhnt ist, einen Eindruck hervorbringt, der nicht viel von dem unterschieden sein kann, den man beim Beschauen des Körpers selbst empfunden haben würde.

### §. 31. Geometrischer Werth der perspectivischen Bilder.

Ist das perspectivische Bild $a'$ (Fig. 27.) eines Punktes gegeben, so weiss man, wenn man die Lage des Auges $O$ ebenfalls kennt, auf welche das Bild sich bezieht, nichts weiter von dem in $a'$ dargestellten Punkte, als dass er sich auf der Verlängerung der Geraden $Oa'$ befindet. Ist ähnlich die Perspective $a'b'$ einer Geraden gegeben, so weiss man von der Geraden, der dieselbe zugehört, nichts weiter, als dass sie einen Punkt der Verlängerung der Geraden $Oa'$ mit einem Punkte der Verlängerung der Geraden $Ob'$ verbindet. Man kann also aus dem blossen perspectivischen Bilde weder die Grösse, noch die Richtung einer solchen Geraden herleiten. Nichtsdestoweniger ist der geometrische Werth eines perspectivischen Bildes nicht so gering, als man nach den eben angestellten Betrachtungen glauben sollte.

Vor Allem wollen wir bemerken, dass meistentheils die Richtung der Geraden schon bekannt ist. Der grössere Theil der

*) Diese beiden Bedingungen sind in dem Stereoskope realisirt, dessen Relief-Wirkungen wirklich überraschend sind. Man zeichnet auf einem Blatte $MN$ (Fig. 26.) getrennt die beiden perspectivischen Bilder $p$ und $p'$ eines Körpers, welche jedem Auge zukommen. Man betrachtet darauf diese Perspectivbilder mit einem Instrumente, das aus zwei Okularen $O$ und $O'$ besteht, durch welche jedes Auge, welches durch dasselbe hindurchsieht, nur das Bild erblickt, welches ihm zugehört, und zwar durch die Wirkung der Linsen der Okulare in der Lage, in der es sein würde, wenn die Perspective nach den oben gegebenen Regeln gemacht wäre.

Geraden, die man an einem Gebäude, an einem sich bewegenden Körper, an einer Maschine findet, sind entweder vertikal oder horizontal und die Horizontalen sind meistens auf einander senkrecht. Betrachtet man also ein perspectivisches Bild, so ist es selten, dass man nicht die Richtungen eines grossen Theiles der Geraden kennt, die sich in demselben befinden. Denken wir uns nun, es sei die Richtung der Geraden $AB$ (Fig. 28) bekannt und nehmen wir z. B. an, sie sei vertikal, dann ist, da die Projections-Ebene meistentheils auch vertikal ist, das Bild der Geraden $AB$ eine ebenfalls vertikale Gerade.

Wäre ferner z. B. der Abstand der Geraden $AB$ von dem Perspectivbilde $a'b'$ bekannt, so ist klar, dass auch die Grösse $AB$ bekannt wäre. Kennt man umgekehrt die Grösse $AB$, so ist es leicht, aus ihrem Perspectivbilde $a'b'$ den Abstand zu finden.

Es sei $OX$ das Perpendikel, das von $O$ auf $AB$ gefällt ist, $x'$ der Punkt, in dem dasselbe die Gerade $a'b'$ schneidet, dann ist klar, dass man

$$AB : a'b' = Ox' + Xx' : Ox'$$

hat. Kennt man daher $Xx'$, den Abstand der Geraden $AB$ von ihrem Perspectivbilde, und $Ox'$, den Abstand des Auges, so ist es leicht, wenn man die Länge $a'b'$ auf der Zeichnung misst, die Grösse von $AB$ zu bestimmen. Kennt man umgekehrt $AB$, $a'b'$, $Ox'$, so findet man daraus $Xx'$.

Man schliesst also im Allgemeinen, dass man, wenn der Abstand eines Gegenstandes von einem Perspectivbilde bekannt ist, daraus dessen Grösse ableiten kann, und umgekehrt, wenn die Grösse eines Gegenstandes gegeben ist, man auf den Abstand schliessen kann. Da es nun viele Gegenstände gibt, deren Grösse man als bekannt annehmen darf, z. B. die Menschen von mittlerer Statur, die gewöhnlichen Fenster und Aehnliches, so sorgen die Künstler dafür, in ihre Ansichten dergleichen verschiedene Gegenstände hineinzubringen, damit diese den Beschauer unterstützen, nicht nur eine Idee der Wirkung hervorzubringen, die er durch die Augen empfindet, wenn er den Gegenstand ihres Bildes selbst betrachtet, sondern auch eine Idee der Grösse und des relativen Abstandes der dargestellten Objecte.

## §. 32. Parallelperspective.

Wächst der Abstand des Auges von der Bildebene, so bilden die verschiedenen Gesichtslinien, welche in ihm von den verschie-

denen Punkten des Körpers aus zusammenlaufen, unter einander immer kleinere und kleinere Winkel, so dass, wenn das Auge in unendlicher Entfernung von der Bildebene wäre, alle Gesichtslinien unter sich parallel sein würden. Parallelperspective heisst die Perspective eines Körpers, in welcher die Lichtstrahlen, welche vom Körper ausgehend die Bildebene treffen, unter sich parallel sind. Es ist leicht von vorn herein zu erkennen, ob ein Perspectivbild mittelst der Parallelperspective gezeichnet ist, oder nicht, und zwar an folgendem Kriterium: Die Bilder aller Linien, welche im Körper parallel sind, werden, wenn die Perspective Parallel-Perspective ist, ebenfalls durch parallele Gerade gebildet; die Bilder paralleler Linien sind dagegen bei der gewöhnlichen Perspective aus Geraden gebildet, die immer mehr und mehr convergiren.

Es seien $AB$, $CD$ (Fig. 29.) zwei parallele Gerade und $O$ die Lage des Auges. Man nehme an, diese Geraden schneiden die Bildebene in $A$ und $C$, dann gehören diese Punkte offenbar den Perspectivbildern der Geraden $AB$ und $CD$ auf der Bildebene an. Fährt man fort das Bild der Geraden $AB$ zu zeichnen, so zieht man durch einen Punkt $M$ derselben eine Gerade $OM$, die die Bildebene im Punkte $m'$ schneidet, der folglich das Bild von $M$ ist. Wenn der Punkt $M$ sich entfernt, so rückt die Gerade $OM$ nach und nach immer höher, bis, wenn der Punkt $M$ unendlich weit entfernt ist, die Gerade $OM$ parallel zu $AB$ wird. Denken wir uns, $X$ sei der Punkt, in dem die Parallele zu $AB$, die durch $O$ geht, die Bildebene schneidet, so ist klar, dass das Bild der Geraden $AB$, die vom Punkte $A$ ausgeht und nach $B$ hin sich ins Unendliche erstreckt, nichts Anderes ist, als die Gerade $AX$. Construirt man jetzt das Bild einer zweiten zu $AB$ parallelen Geraden $CD$, so ist klar, dass dasselbe durch $C$ geht, und durch denselben Punkt $X$, in welchem $OX$, die Parallele zu $AB$ und $CD$, die Bildebene schneidet. Die beiden Bilder der zwei parallelen Geraden $AB$ und $CD$ sind also nichts Anderes, als die beiden Geraden $AX$, $CX$, die sich in $X$ schneiden; und man sieht also, dass die Bilder aller zu $AB$ und $CD$ parallelen Geraden sämmtlich nach dem Punkte $X$ convergiren.

Es gibt nur einen Fall, in dem die gewöhnliche Perspective paralleler Geraden von parallelen Geraden gebildet wird, der nämlich, wenn die Geraden $AB$, $CD$ parallel zur Ebene $MN$ sind. In diesem Falle würde nämlich auch $OX$ der Ebene $MN$ parallel sein, und diese daher in einer unendlichen Entfernung schneiden; da also der Convergenzpunkt der Bilder dieser Geraden in unend-

licher Entfernung liegen würde, so sieht man, dass alle diese Bilder parallel sind.

Nehmen wir dagegen an, man fertige eine Parallelperspective der beiden parallelen Geraden *AB* und *CD* (Fig. 30.) an, und es sei *AO* die Richtung einer der Gesichtslinien. Um das Perspectivbild von *M'* zu finden, ziehe man *M'O'* parallel zu *AO*, dann liefert der Punkt *m'*, in welchem von dieser Geraden die Ebene *MN* geschnitten wird, die Gerade *Am'*, das Perspectivbild der Geraden *AB*. Denkt man sich durch *AB* eine zu *AO* parallele Ebene gelegt, so ist klar, dass dieselbe die Bildebene genau in der Geraden *Am'*, die wir eben gefunden, schneidet. Um nun das Bild von *CD* zu finden genügt es, durch *CD* eine Ebene zu legen, die ebenfalls parallel zu *AO* ist, und also auch parallel zu der, welche man vorhin durch *AB* legte. Diese Ebene schneidet die Ebene *MN* in einer Geraden *Cm''*, welche parallel zu *Am'* und gleichzeitig das Bild von *CD* ist.

Eben so leicht kann man zeigen, dass die Parallel-Perspectiv-Bilder zweier paralleler Geraden von gleicher Länge auch unter sich gleiche Längen haben, was bei der gewöhnlichen Perspective nicht der Fall ist.

## Viertes Capitel.

### *Axonometrisches Zeichnen.*

#### §. 33. Princip des axonometrischen Zeichnens.

In dem, was wir über die Parallel-Perspective gesagt haben, setzten wir voraus, dass die Richtung der Strahlen in Bezug auf die Bildebene beliebig sei. Nehmen wir nun an, dass die Strahlen, welche vom Körper ausgehend die Zeichnenebene treffen, alle auf dieser Ebene senkrecht sind, so ist das Perspectivbild nichts Anderes, als eine Projection des Körpers auf die Bildebene, und da die Bildebene fast immer vertikal angenommen wird, so wird das Perspectivbild sich auf eine Vertikal-Projection des Körpers reduciren. Nehmen wir dagegen an, man mache die Projection eines Körpers weder auf eine Horizontalebene, noch auf eine Vertikalebene, sondern auf eine mehr oder weniger geneigte Ebene, so erhalten wir die Projection, die man die axonometrische Zeichnung des Körpers nennt. Oder man kann sagen, die axonometrische Zeichnung eines Körpers ist nichts Anderes, als die Parallel-Perspective desselben für senkrechte

Strahlen auf der Bildebene, die man nicht vertikal annimmt. I ein Zeichenblatt entweder horizontal oder vertikal gehalten werden pflegt, so kann man unter axonometrischer Zeichnung nes Körpers auch seine Horizontal- oder Vertikal-Projection ve stehen, die man nachher in der Art gedreht hat, dass sie nic mehr in der Lage ist, die sie von Natur hat.

§. 34. Allgemeine Methode einen Körper zu zeichnen.

Man habe einen beliebigen Körper, von dessen Punkten m die Coordinaten in Bezug auf drei unter sich senkrechte Ebene kennt, und man will die axonometrische Zeichnung, das heiss die Projection des Körpers auf eine neue, von den drei Coord naten-Ebenen verschiedene Ebene anfertigen. Man beginnt m der Projection der drei Coordinatenaxen auf diese Zeichnung Ebene. Es seien $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ (Fig. 31.) die drei Geraden, di man so erhält. Nehmen wir ferner an, man bestimme auf jed der Axen drei Punkte $H$, $H'$, $H''$, deren Abstand vom Anfang der Coordinaten genau gleich der Maasseinheit ist, und es seie $K$, $K'$, $K''$ die Projectionen dieser drei Punkte; hat man dan einen beliebigen Punkt $M$ im Raume, dessen drei den Axen $OX$ $OY$, $OZ$ parallele Coordinaten z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ sind, so findet ma die Projection $M'$ von $M$ auf unserer Zeichnung leicht, inde man $O'n' = \frac{3}{4}O'K$ nimmt, darauf $n'm' = \frac{1}{2}O'K'$ parallel zu $O'Y$ zieht, und endlich $m'M' = \frac{1}{4}O'K''$ parallel zu $O'Z'$ macht.

Denn $O'n'$ ist die Projection von $On = \frac{3}{4}$ der Maasseinheit; die Projection von $mn$ muss parallel der Projection von $OY$ also zu $O'Y'$ sein, und wenn $mn = \frac{1}{2}OH'$, so muss $m'n' = \frac{1}{2}O'K'$ sein (m. s. §. 32.), folglich ist $m'n'$ die Projection von $mn$; ähnlich wird $m'M'$ parallel zu $O'Z'$ und $= \frac{1}{4}O'K''$ die Projection der dritten Coordinate $mM$ des Punktes $M$ sein: $M'$ ist also die Projection des Punktes $M$.

In derselben Weise, wie man die Projection des Punktes $M$ bestimmt, dessen Coordinaten man kennt, kann man die Projection jedes anderen Punktes des Körpers bestimmen, und verbindet man diese Projectionen durch zweckmässige Linien, so ist klar, dass es keine Schwierigkeit hat, die Zeichnung eines beliebigen Körpers zu fertigen. Wir wollen hier aber bemerken, das man auf der Zeichnenebene nothwendig

1. wissen muss, die Projectionen der drei Coordinaten Axen zu bestimmen, und
2. auf den Projectionen dieser Axen die Längen de

Projectionen der Masseinheit aufzutragen, die man sich nach und nach auf jeder Axe im Raume abgetragen denkt.

§ 35. Das Quadrat der Seite eines Würfels ist gleich der Summe der Quadrate der Projectionen der drei Seiten des Würfels auf eine beliebige Gerade.

Bevor wir zur Untersuchung der Relationen schreiten, welche die Lage der Projectionen der Axen mit der Länge der Projectionen der Maasseinheit auf jeder derselben verbinden, wollen wir folgenden Lehrsatz vorausschicken: **Das Quadrat der Seite eines Würfels ist gleich der Summe der Quadrate der Projectionen der drei Seiten des Würfels auf eine beliebige Gerade.**

Es seien $OH$, $OH'$, $OH''$ (Fig. 32.) drei Seiten eines Würfels, die in einem Scheitel desselben zusammentreffen, und man ziehe durch denselben Scheitel eine beliebige Gerade $O\mathfrak{L}$, fälle vom Punkte $H$ die Gerade $HL$ senkrecht auf $O\mathfrak{L}$, fälle in ähnlicher Weise von $H'$ und $H''$ die Geraden $H'L'$, $H''L''$ ebenfalls senkrecht auf $O\mathfrak{L}$, dann sind $OL$, $OL'$, $OL''$ die Projectionen von $OH$, $OH'$ $OH''$ auf die Gerade $O\mathfrak{L}$, und es soll also

$$\overline{OL}^2 + \overline{OL'}^2 + \overline{OL''}^2 = \overline{OH}^2$$

sein.

Nimmt man nämlich auf $O\mathfrak{L}$ (Fig. 32.) einen Punkt $Q$ so an, dass $OQ = OH$ ist, fällt von diesem Punkte $QR$, $QR'$, $QR''$ senkrecht auf $OH$, $OH'$, $OH''$, so ist das Dreieck $OQR'$ dem Dreiecke $OH'L'$ congruent, weil $OQ = OH'$, der Winkel $\mathfrak{L}OH'$ beiden Dreiecken gemeinschaftlich, und die Winkel $QR'O$, $H'L'O$ rechte Winkel sind. Es ist also $OR' = OL'$, und man sieht in gleicher Weise, dass $OR = OL$, $OR'' = OL''$ ist.

Man construire jetzt aus $OR$, $OR'$, $OR''$ das rechtwinkelige Parallelepiped $ORS''R''QSR'S'$, so ist $QO$ dessen Diagonale durch $O$, und es ist folglich

$$\overline{OR}^2 + \overline{OR'}^2 + \overline{OR''}^2 = \overline{OQ}^2;$$

da aber

$$OR = OL, \quad OR' = OL', \quad OR'' = OL''; \quad OQ = OH$$

ist, so hat man auch:

$$\overline{OL}^2 + \overline{OL'}^2 + \overline{OL''}^2 = \overline{OH}^2,$$

was man beweisen sollte.

Hat man so die Wahrheit der Behauptung des Lehrsatzes für den Fall bewiesen, dass die Gerade $O\mathfrak{L}$, auf die man die Geraden $OH$, $OH'$, $OH''$ projicirt, durch den Scheitel $O$ des Würfels geht, so ist sie auch für jede andere Gerade bewiesen. Denn fällt man von $H$, $H'$, $H''$ und $O$ auf eine andere zu $O\mathfrak{L}$ parallele Gerade Senkrechte, so sind die Längen, die zwischen der Projection des Punktes $O$ auf diese Gerade und den Projectionen der Punkte $H$, $H'$, $H''$ auf dieselbe Gerade liegen, gleich $OL$, $OL'$, $OL''$, und der Lehrsatz hört also nicht auf, richtig zu sein.

§. 36. Relationen zwischen den Längen der Projectionen der Längeneinheit auf jede der drei Axen und der Lage der Projectionen dieser Axen.

Es seien $OX$, $OY$, $OZ$ (Fig. 33.) die drei Axen im Raume und $OX'$, $OY'$, $OZ'$ ihre Projectionen auf die Bildebene, die wir durch den Coordinatenanfang $O$ gehend annehmen. Ferner seien $H$, $H'$, $H''$ drei solche Punkte auf den Axen, dass $OH = OH' = OH'' = 1$ ist, und $K$, $K'$, $K''$ seien die Projectionen dieser Punkte. Wir wollen annehmen, die Verhältnisse von $OK$, $OK'$, $OK''$ seien gegeben, so dass man z. B. wisse, es verhalte sich

(A) . . . . . $OK : OK' : OK'' = m : n : p$,

unter $m$, $n$, $p$ drei beliebige bekannte Zahlen verstanden. Man will jetzt wissen, welches die respective Lage von $OX'$, $OY'$, $OZ'$ ist.

Es sei $O\mathfrak{L}$ senkrecht auf der Bildebene. Projicirt man z. B. $OH'$ auf diese Gerade, so ist offenbar $OL' = H'K'$, so dass man schliessen darf, es seien $HK$, $H'K'$, $H''K''$ gleich den Projectionen von $OH$, $OH'$, $OH''$ auf die Gerade $O\mathfrak{L}$. Aus dem vorhergehenden Satze folgt nun, dass die Summe der Quadrate dieser den Projectionen gleichen Linien gleich dem Quadrate der Seite des Würfels ist, der sich aus $OH$, $OH'$, $OH''$ construiren lässt. Folglich ist:

$$\overline{HK}^2 + \overline{H'K'}^2 + \overline{H''K''}^2 = \overline{OH}^2 = 1.$$

Nun ist aber

$$\overline{HK}^2 = \overline{OH}^2 - \overline{OK}^2 = 1 - \overline{OK}^2,$$

$$\overline{H'K'}^2 = OH'^2 - OK'^2 = 1 - \overline{OK'}^2,$$

$$\overline{H''K''}^2 = OH''^2 - OK''^2 = 1 - \overline{OK''}^2;$$

folglich hat man:

$$3 - \overline{OK}^2 - \overline{OK'}^2 - \overline{OK''}^2 = 1,$$

und endlich:

$$\overline{OK}^2 + \overline{OK'}^2 + \overline{OK''}^2 = 2.$$

Kehrt man jetzt zu der Proportion (A) zurück, so erhält man, wenn man jedes Glied auf's Quadrat erhebt,

$$\overline{OK}^2 : \overline{OK'}^2 : \overline{OK''}^2 = m^2 : n^2 : p^2,$$

woraus man Folgendes herleitet:

$$\overline{OK}^2 : \overline{OK'}^2 : \overline{OK''}^2 : \overline{OK}^2 + \overline{OK'}^2 + \overline{OK''}^2 = m^2 : n^2 : p^2 : m^2 + n^2 + p^2.$$

Setzt man hierin

$$\overline{OK}^2 + \overline{OK'}^2 + \overline{OK''}^2 = 2,$$

so erhält man:

$$\overline{OK}^2 : \overline{OK'}^2 : \overline{OK''}^2 : 2 = m^2 : n^2 : p^2 : m^2 + n^2 + p^2,$$

und hieraus findet man:

$$\overline{OK}^2 = \frac{2m^2}{m^2+n^2+p^2}, \quad \overline{OK'}^2 = \frac{2n^2}{m^2+n^2+p^2}, \quad \overline{OK''}^2 = \frac{2p^2}{m^2+n^2+p^2}.$$

Beachtet man noch, dass

$$HK = \sqrt{1 - \overline{OK}^2}, \quad H'K' = \sqrt{1 - \overline{OK'}^2}, \quad H''K'' = \sqrt{1 - \overline{OK''}^2}$$

ist, so erhält man endlich:

$$(B)\ldots \begin{cases} OK = \dfrac{m\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, & HK = \dfrac{\sqrt{n^2+p^2-m^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \\ OK' = \dfrac{n\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, & H'K' = \dfrac{\sqrt{m^2+p^2-n^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \\ OK'' = \dfrac{p\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, & H''K'' = \dfrac{\sqrt{m^2+n^2-p^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \end{cases}$$

Nehmen wir jetzt an, die Ebene $XOY$ schneide die Bildebene in der Geraden $AOB$ (Fig. 34.), dann ist diese Gerade senkrecht auf der Axe $OZ$ und folglich auch auf der Projection $OZ'$ dieser Axe. Man lege nun durch $HK$ eine auf $AB$ senk-

rechte Ebene, welche bestimmt wird, wenn man von dem P punkte $K$ des Perpendikels $HK$ auf der Bildebene auf die Ge $AB$ ein Perpendikel $KJ$ fällt und dann $HJ$ zieht, wo dann bekannten Sätzen der Stereometrie auch $HJ$ auf $AB$ senk sein wird; $HJ$ und $KJ$ sind die Durchschnitte dieser Ebene $XOY$ und der Bildebene; und $KJ$ ist ausserdem parallel zu die ja ebenfalls auf $AB$ senkrecht ist, folglich senkrecht auf $H'$ $HK$ ist senkrecht auf $OK''$; $HJ$ ferner senkrecht auf $OH''$, $HJ$ in der Ebene $XOY$ liegt, auf welcher $OZ$ senkrecht st Die Dreiecke $HJK$, $OH''K''$ haben also gegenseitig auf einan senkrechte Seiten und sind daher einander ähnlich.

Zieht man nun durch $H'$ und $K'$ die Geraden $H'J'$ und beide senkrecht auf $AB$, so erhält man ein Dreieck $H'K'J'$, dem Dreieck $HJK$ und also auch dem Dreieck $OH''K''$ ähnlich

Vergleicht man die beiden Dreiecke $HJK$, $OH''K''$ mit ander, so erhält man:

$$KJ : HK = H''K'' : OK'',$$

und substituirt man für die drei letzten Glieder dieser Propor ihre Werthe aus den Gleichungen (B), so erhält man:

$$KJ : \frac{\sqrt{n^2+p^2-m^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} = \frac{\sqrt{m^2+n^2-p^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} : \frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

und hieraus:

$$KJ = \frac{\sqrt{(n^2+p^2-m^2)(m^2+n^2-p^2)}}{p\sqrt{2}.\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Ausserdem hat man:

$$HJ : HK = OH'' : OK'',$$

und da $OH''=1$ ist, so ist:

$$HJ = \frac{HK}{OK''} = \frac{\sqrt{n^2+p^2-m^2}}{p\sqrt{2}}.$$

Im Dreiecke $H'J'K'$ würde man gleicherweise finden:

$$H'J' = \frac{\sqrt{m^2+p^2-n^2}}{p\sqrt{2}}.$$

Man bemerke nun, dass die Dreiecke $HOJ$, $H'OJ'$ congr sind, da sie bei $J$ und $J'$ rechtwinklig sind, die Hypotenuse $= OH'$ und der Winkel $HOJ$, das Complement von $H'OJ'$, gl dem Winkel $OH'J'$ ist. Es ist folglich:

$$OJ = H'J' = \frac{\sqrt{m^2+p^2-n^2}}{p\sqrt{2}},$$

und endlich schliesst man noch:

$$\frac{KJ}{OJ} = \sqrt{\frac{(n^2+p^2-m^2)\,(m^2+n^2-p^2)}{(m^2+n^2+p^2)\,(m^2+p^2-n^2)}}.$$

Setzt man

$$\frac{m^2+n^2+p^2}{2} = S,$$

so erhält man:

$$\frac{KJ}{OJ} = \sqrt{\frac{(S-m^2)\,(S-p^2)}{S(S-n^2)}}.$$

Verfolgt man bei der Vergleichung der Dreiecke $H'J'K'$ und $OH''K''$ einen ähnlichen Weg, so erhält man:

$$\frac{K'J'}{OJ'} = \sqrt{\frac{(m^2+p^2-n^2)\,(m^2+n^2-p^2)}{(m^2+n^2+p^2)\,(n^2+p^2-m^2)}} = \sqrt{\frac{(S-n^2)\,(S-p^2)}{S(S-m^2)}}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die vorhergehende, so findet man:

$$\frac{\frac{K'J'}{OJ'}}{\frac{KJ}{OJ}} = \frac{m^2+p^2-n^2}{n^2+p^2-m^2} = \frac{S-n^2}{S-m^2}.$$

Die Relationen, welche zwischen der Lage der Projectionen der Axen und den Längen der Projectionen der Längeneinheiten auf jeder Axe Statt finden, sind folglich:

(A) . . . . . $OK : OK' : OK'' = m : n : p$.

(C) *)

$$\frac{KJ}{OJ} = \sqrt{\frac{(m^2+n^2-p^2)\,(n^2+p^2-m^2)}{(m^2+n^2+p^2)\,(m^2+p^2-n^2)}} = \sqrt{\frac{(S-p^2)\,(S-m^2)}{S(S-n^2)}},$$

$$\frac{K'J'}{OJ'} = \sqrt{\frac{(m^2+n^2-p^2)\,(m^2+p^2-n^2)}{(m^2+n^2+p^2)\,(n^2+p^2-m^2)}} = \sqrt{\frac{(S-p^2)\,(S-n^2)}{S(S-m^2)}};$$

*) Man könnte den Gleichungen (C) auch andere äquivalente für die Bestimmung der Lage der Axen substituiren, die einfacher sind. Man findet nämlich leicht:

$$\frac{KJ}{OK} = \frac{\sqrt{(n^2+p^2-m^2)\,(m^2+n^2-p^2)}}{2mp} = \frac{\sqrt{(S-m^2)\,(S-p^2)}}{mp},$$

$$\frac{OJ}{OK} = \frac{\sqrt{(m^2+p^2-n^2)\,(m^2+n^2+p^2)}}{2mp} = \frac{\sqrt{S(S-n^2)}}{mp};$$

aber die graphische Anwendung dieser Gleichungen ist weniger bequem, und um Verwirrungen zu vermeiden, werden wir uns nur der Gleichungen (C) bedienen.

$$(D) \ldots\ldots\ldots \quad S = \frac{m^2+n^2+p^2}{2},$$

$$(E) \ldots\ldots \quad \frac{\frac{KJ}{OJ}}{\frac{K'J'}{OJ'}} = \frac{n^2+p^2-m^2}{m^2+p^2-n^2} = \frac{S-m^2}{S-n^2}.$$

### §. 37. Zeichnung der Projectionen der Axen.

Man muss vor Allem die Verhältnisse der Projectionen gleicher Längen auf den drei Axen kennen, und weiss daher, dass, wenn $OK$, $OK'$, $OK''$ (Fig. 35.) die Projectionen von $OH$, $OH'$, $OH''$, die alle mit der Einheit gleiche Länge haben, sind, etwa

$$OK : OK' : OK'' = m : n : p$$

ist, wo $m$, $n$, $p$ drei bekannte Zahlen bezeichnen.

Handelt es sich nun um die Zeichnung der Projectionen der Axen auf die Bildebene, die wir jetzt mit der des Papieres zusammenfallend annehmen, so ziehe man beliebig $OZ'$ (Fig. 36.) und nehme diese Gerade als Projection der Axe $OZ$ an; dann ziehe man durch $O$ eine Gerade $AB$, die senkrecht auf $OZ'$ steht, nehme von $O$ nach $A$ hingehend eine beliebige Länge $OP'$, errichte in $P'$ ein Perpendikel und nehme auf demselben eine solche Länge $P'Q'$, dass, wenn man

$$S = \frac{m^2+n^2+p^2}{2}$$

setzt,

$$P'Q' = P'O \cdot \sqrt{\frac{(S-p^2)(S-n^2)}{S(S-m^2)}}$$

ist; dann ist $OQ'Y'$ die Projection der Axe $OY$ im Raume.

Nimmt man ebenso $OP$ beliebig, und macht

$$PQ = PO \cdot \frac{P'Q'}{P'O} \cdot \frac{S-m^2}{S-n^2},$$

so erhält man $OQX'$ als Projection der dritten Axe.

Nehmen wir an, dass die Längen der Projectionen der Maasseinheit, auf jeder Axe im Raume genommen, sich verhalten sollen $= 7:5:6$, so ist:

$$m = 7, \quad m^2 = 49, \qquad S - m^2 = 6;$$
$$n = 5, \quad n^2 = 25, \qquad S - n^2 = 30;$$
$$p = 6, \quad p^2 = 36, \qquad S - p^2 = 19;$$
$$m^2 + n^2 + p^2 = 110, \quad S = 55.$$

Folglich wird:

$$P'Q' = P'O\sqrt{\frac{19.30}{55.6}} = P'O\sqrt{\frac{19}{11}} = 1{,}314.P'O,$$

$$PQ = PO.1{,}314.\frac{6}{30} = 0{,}263.PO;$$

und nimmt man also

$$PO = P'O = 0^m{,}100;$$

so ist:

$$PQ = 0^m{,}0263, \quad P'Q' = 0^m{,}1314.$$

§ 38. Grenzen zwischen den Verhältnissen der Projectionen der Einheit, genommen auf den Axen.

Die Zahlen, welche die Verhältnisse der Längen der Projectionen der Maasseinheit auf den drei Axen ausdrücken, die wir durch $m$, $n$, $p$ bezeichnet haben, sind im Allgemeinen durchaus willkürlich und können daher ganz beliebig sein. Aber aus den oben gegebenen Gleichungen lässt sich leicht übersehen, dass, wenn $S$ kleiner als das Quadrat einer der in Rede stehenden Zahlen ist, die Verhältnisse $\frac{PQ}{PO}$ und $\frac{P'Q'}{P'O}$ imaginär werden. Es muss daher z. B. $S > m^2$ sein, d. h. $\frac{m^2+n^2+p^2}{2} > m^2$ oder $n^2+p^2 > m^2$; eben so muss $m^2 + p^2 > n^2$, also $n^2 - p^2 < m^2$ sein.

Wenn es folglich möglich sein soll, drei Axen im Raume so zu legen, dass die auf jeder derselben aufgetragene Maasseinheit auf die Zeichnenebene in der Art sich projicire, dass die Längen der drei Projectionen unter sich im Verhältniss dreier beliebiger Zahlen stehen, so ist es nöthig, dass das Quadrat jeder Zahl kleiner als die Summe der Quadrate der beiden anderen und grösser als die Differenz derselben beiden Quadrate ist.

§ 39. Relationen zwischen der Lage der Projectionen der Axen und den Verhältnissen der Längen der Projectionen gleicher auf jeder Axe gemessener Abstände.

Es seien umgekehrt die Projectionen der Axen gegeben und

man erhält die Verhältnisse der Längen der Projectionen der Einheit bestimmen, die auf jeder derselben abgetragen ist.

Sind auf dem Zeichnenblatt $OX'$, $OY'$, $OZ'$ (Fig. 37. *)) gegeben, so ziehe man $AB$ senkrecht auf $OZ'$ und dann $PQ$ und $P'Q'$ beliebig, nur senkrecht auf $AB$. Wir wollen annehmen, es sei

$$(F) \ldots\ldots\ldots \frac{PQ}{OP} = a, \quad \frac{P'Q'}{OP'} = b;$$

so ist ebenfalls gegeben:

$$\frac{KJ}{OJ} = a, \quad \frac{K'J'}{OJ'} = b.$$

Man beachte nun, dass die beiden rechtwinkligen Dreiecke $OHJ$, $OH'J'$ die Seiten $OH = OH'$ und die Winkel $HOJ = 90^0 - H'OJ' = OH'J'$ haben, und folglich congruent sind. Daher ist $HJ.OJ = H'J'.OJ'$; aber man sieht, dass $\frac{KJ}{HJ} = \frac{K'J'}{H'J'}$ und multiplicirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man $KJ.OJ = K'J'.OJ'$.

Dies vorausgeschickt, ist nun ferner klar, dass

$$\overline{OK}^2 = \overline{OJ}^2 + \overline{KJ}^2, \quad \overline{OK'}^2 = \overline{OJ'}^2 + \overline{K'J'}^2$$

ist. Was $OK''$ betrifft, so beachte man, dass die Projectionen von $OH$ und $OH'$ auf die Gerade $AB$ $OJ$ und $OJ'$ sind. Die Projection von $OH''$ auf $AB$ reducirt sich auf einen Punkt, und man hat folglich gemäss des Satzes von den Projectionen der Seiten eines Würfels:

$$\overline{OJ}^2 + \overline{OJ'}^2 = \overline{OH}^2.$$

Soll man die drei Längen $OH$, $OH'$, $OH''$ auf $OZ'$ projiciren, so ist $OK''$ die Projection von $OH''$. Um $OH$ zu projiciren, denke man sich durch $H$ eine Ebene, die auf $OZ'$ senkrecht ist und die Verlängerung von $OZ'$ in $U$ trifft, gelegt, so ist $OU$ die Projection von $OH$. Nun muss die zu $OZ'$ senkrechte Ebene, die wir uns dachten, durch die Gerade $HK$ gehen, welche senkrecht auf $OZ'$ ist, und die Ebene der Zeichnung in einer Geraden $UK$ schneiden, die senkrecht zu $OZ'$ ist, folglich ist $OU = KJ$. Es ist also $KJ$ die Länge der Projection von $OH$ auf $OZ'$, ebenso $K'J'$ die Länge der Projection von $OH'$ auf $OZ'$, folglich:

$$\overline{OK''}^2 + \overline{KJ}^2 + \overline{K'J'}^2 = \overline{OH}^2,$$

und daher nach Obigem:

*) Zu vergleichen mit Fig. 34. G.

$$\overline{OK'}^2 + \overline{KJ}^2 + \overline{K'J}^2 = \overline{OJ}^2 + \overline{OJ'}^2,$$

oder auch:

$$\overline{OK''}^2 = \overline{OJ}^2 + \overline{OJ'}^2 - \overline{KJ}^2 - \overline{K'J}^2,$$

folglich:

$$\overline{OK}^2 : \overline{OK'}^2 : \overline{OK''}^2$$

$$= \overline{OJ}^2 + \overline{KJ}^2 : \overline{OJ'}^2 + \overline{K'J}^2 : \overline{OJ}^2 + \overline{OJ'}^2 - \overline{KJ}^2 - \overline{K'J'}^2.$$

Dividirt man nun durch $OJ.KJ = OJ'.K'J'$ (s. oben), so entsteht:

$$\overline{OK}^2 : \overline{OK'}^2 : \overline{OK''}^2 = \frac{OJ}{KJ} + \frac{KJ}{OJ} : \frac{OJ'}{K'J'} + \frac{K'J'}{OJ'} : \frac{OJ}{KJ} + \frac{OJ'}{K'J'} - \frac{KJ}{OJ} - \frac{K'J'}{OJ'},$$

$$\overline{OK}^2 : \overline{OK'}^2 : \overline{OK''}^2 = \frac{1}{a} + a : \frac{1}{b} + b : \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - a - b;$$

und daher endlich:

$$(G)\ldots\ OK : OK' : OK'' = \sqrt{\frac{1}{a} + a} : \sqrt{\frac{1}{b} + b} : \sqrt{\frac{1}{a} - a + \frac{1}{b} - b}.$$

Da man in jedem Falle die Werthe von $a$ und $b$ kennt, so ist es leicht, hiernach das Verhältniss der Projectionen der drei gleichen auf den Axen genommenen Längen zu finden *).

---

*) Man kann die Relationen (G) auch aus den Gleichungen (C) entwickeln. Es sei:

$$a = \sqrt{\frac{(S-p^2)(S-m^2)}{S(S-n^2)}}, \quad b = \sqrt{\frac{(S-p^2)(S-n^2)}{S(S-m^2)}};$$

hieraus ergiebt sich:

$$ab = \frac{S-p^2}{S} = \frac{m^2+n^2-p^2}{m^2+n^2+p^2}, \quad \frac{a}{b} = \frac{S-m^2}{S-n^2} = \frac{n^2+p^2-m^2}{m^2+p^2-n^2};$$

$$1-ab = \frac{2p^2}{m^2+n^2+p^2}, \quad 1+\frac{a}{b} = \frac{2p^2}{m^2+p^2-n^2};$$

$$m^2+n^2+p^2 = \frac{2p^2}{1-ab}, \quad m^2+p^2-n^2 = \frac{2p^2}{1+\frac{a}{b}};$$

$$m^2+n^2 = \frac{2p^2}{1-ab} - p^2 = p^2\frac{1+ab}{1-ab}, \quad m^2-n^2 = \frac{2p^2}{1+\frac{a}{b}} - p^2 = p^2\frac{b-a}{b+a}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt weiter:

$$m^2 = p^2\frac{b+a^2b}{(1-ab)(b+a)}, \quad n^2 = p^2\frac{a+b^2a}{(1-ab)(b+a)};$$

### §. 40. Isometrisches Zeichnen.

Will man, dass alle drei Projectionen der Maasseinheiten, auf jeder der drei Axen gerechnet, einander gleich sein sollen, so haben wir $m:n:p=1:1:1$. Man zieht also aus den Gleichungen (C) und (F) $\frac{P'Q'}{OP'}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ und ähnlich $\frac{PQ}{OP}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, d. h., die projicirte Axe $OZ'$ ist gegen $OX'$ und $OY'$ gleich geneigt. Aehnlich ist kein Grund vorhanden, nach dem nicht auch $OX'$ gegen $OZ'$ und $OY'$ gleich geneigt sei, und man schliesst also hieraus, dass $OX'$, $OY'$, $OZ'$ unter sich gleiche Winkel von 120° bilden (Fig. 38.). Eine Zeichnung, die mit so gelegenen Axen gemacht ist, heisst isometrisch. Die Längen, die man in der Zeichnung zur Darstellung der Coordinaten nehmen muss, bleiben unverändert, welches auch die Axe, der sie parallel sind, sein mag, und die Projectionen der Axen bilden unter sich Winkel von 120°.

### §. 41. Monodimetrisches Zeichnen.

Wir wollen jetzt annehmen, dass zwei der drei Projectionen der Einheit, auf jeder Axe gezählt, einander gleich sein sollen, und dass die Länge der dritten Projection von ihnen verschieden sei. Macht man z. B. $m=n$ (Fig. 39.), so giebt die Gleichung (F): $\frac{PQ}{OP}=\frac{P'Q'}{OP'}$. Das will sagen, die Projection der Axe $OZ$ ist gegen $OX'$ und $OY'$ gleich geneigt. Folglich sind die Projectionen der Axen, auf welchen gleiche Längen aufgetragen auch gleiche Projectionen geben, gleich gegen die Projectionen der dritten Axe geneigt. Indem man das, was im §. 38. gesagt ist, auf diesen speciellen Fall anwendet, in dem z. B. $m=n$ sein mag, so findet man $p>0$, $p<m\sqrt{2}$.

Eine Zeichnung eines Körpers, die mittelst so gelegener Axen gefertigt wird, heisst monodimetrisch: die Projectionen gleicher Längen zu zweien der Axen parallel genommen, werden gleich, die Projection der dritten Axe ist gegen die Projectionen dieser beiden gleich geneigt, und das Verhältniss zwischen der Länge der Projection der Längeneinheit auf der dritten Axe und

---

hieraus:

$$m^2:n^2:p^2=b+a^2b:a+b^2a:(1-ab)(b+a),$$

und dividirt man durch $ab$, so ist:

$$m^2:n^2:p^2=\frac{1}{a}+a:\frac{1}{b}+b:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(1-ab).$$

der Länge der Projection derselben Einheit auf einer der anderen beiden Axen genommen, kann niemals grösser als $\sqrt{2}$ sein.

### §. 42. Anisometrisches Zeichnen.

Man nennt endlich die Zeichnung der Körper **anisometrisch**, wenn die Axen in Bezug auf die Zeichnenebene in der Art gelegen sind, dass die Projectionen der Längeneinheit, auf jeder derselben genommen, sämmtlich unter einander ungleich werden. In diesem Falle sind die Zahlen $m$, $n$, $p$ sämmtlich verschieden, und die von den drei Projectionen der Axen gebildeten Winkel sind alle unter einander ungleich *).

### §. 43. Passendste Auswahl der Projectionen der Axen.

Indem wir so die Art, die Projectionen der Axen nach Wunsch zu zeichnen, kennen, ist es demjenigen, der sich ein wenig an diese Zeichnungsart gewöhnt hat, nicht schwer, in jedem Specialfalle die Lage zu finden, in welche man die Projectionsebene in Bezug auf den Körper legen muss, damit die Wirkung der Zeichnung eine wohlthuende werde.

Die isometrische Zeichnung eines Würfels z. B. (Fig. 40.) würde keine gute Wirkung hervorbringen, da die Projectionen zweier gegenüberliegender Scheitel in einen einzigen Punkt zusammenfallen würden.

Die monodimetrische Zeichnung eines Würfels, wenn z. B. $m:n:p=3:1:3$ (Fig. 40.) wäre, ist von guter Wirkung.

Die isometrische Zeichnung einer Maschine, z. B. eines Rades an der Welle (Fig. 41.), kann von guter Wirkung sein.

In der isometrischen Zeichnung erscheinen die Breiten fast immer in Bezug auf die Höhe und die Länge des Körpers etwas vergrössert.

Die monodimetrische Zeichnung (Fig. 42.) desselben Rades an der Welle, worin $m:n:p=2:1:2$ ist, ist von besserer Wirkung.

Das monodimetrische Zeichnen ist bei den meisten Maschinen

---

*) Ich wende die Namen monodimetrisches und anisometrisches Zeichnen, obwohl viele andere Namen schon von mehreren deutschen Geometern vorgeschlagen sind, aus dem einzigen Grunde an, weil wir sie Weisbach, dem ersten Verbreiter des axonometrischen Zeichnens, in seiner ganzen Allgemeinheit genommen, verdanken.

von guter Wirkung; da aber die Projection der einen Axe, z. B. $OY$, die Projection der beiden anderen Axen halbirt, so werden die Linien, welche in der Ebene liegen, die durch $OY$ gelegt den Winkel der beiden anderen Axen halbirt, alle in derselben Geraden projicirt. Man bediene sich z. B. der monodimetrischen Projection $m:n:p = 3:1:3$ des Rhombendodekaeders (Fig. 43.). Sie ist von der allerschlechtesten Wirkung, weil zwölf Seitenkanten sich zu vier und vier in einer Geraden projiciren.

Die anisometrische Projection desselben Rhombendodekaeders $m:n:p = 10:5:9$ (Fig. 43.) dagegen ist von diesem Uebelstande frei.

Allgemeine Regeln über die passendste Auswahl der Projectionen der Axen lassen sich gar nicht aufstellen; aber ein wenig Uebung in Specialzeichnungen, die man macht, zeigt bald die passendsten Lagen.

### §. 44. Methode, die Durchschnitte zu zeichnen.

Wenn die darzustellenden Gegenstände in ihrem Innern Theile enthalten, deren Anordnung zu kennen von Nutzen ist, so kann man diese Theile entweder mit gestrichelten Linien darstellen, oder indem man den Körper durch eine gewisse Ebene schneidet, die das Innere offen legt.

Bei axonometrischen Zeichnungen stellt man die durchschnittenen Gegenstände sehr bequem auf die Art dar, dass man die beiden Theile des geschnittenen Gegenstandes mit denselben Axen, die aber auf verschiedene Weise liegen, darstellt.

Es seien $OX'$, $OY'$, $OZ'$ (Fig. 44.) die Projectionen der Axen, mit welchen man den ersten Theil des Gegenstandes darstellt. Dann ist klar, dass man, ohne die Verhältnisse der Projectionen der auf den Axen genommenen Längeneinheiten zu verändern, annehmen kann, die Axen wären in der Art gezeichnet, dass die Projectionen der Axen $OX'_1$, $OY'_1$, $OZ_1'$ würden, wobei $\angle AOX' = \angle B_1OX_1'$, $\angle BOY' = \angle A_1OY'_1$.

Stellte man z. B. mit diesen Axenprojectionen die beiden Hälften eines rechtwinkligen hohlen Parallelepipeds dar (Fig. 45), so erhielte man eine Zeichnung, die eine klare Idee der Anordnung desselben und der Dicke seiner Wände gäbe.

In dem gewählten Beispiele bleibt die Projection $OZ'$ unverändert. Man könnte auch andere analoge Lagen der Axen annehmen, bei welchen entweder die Lage von $OY'$ oder von $OX'$ sich nicht änderte.

## §. 45. Praktische Bemerkungen über die Ausführung der Zeichnungen.

Nach dem, was in §. 33. gesagt ist, hat es keine Schwierigkeit, einen beliebigen Körper darzustellen, von dessen Punkten man die Coordinaten kennt, oder von dem man eine Zeichnung nach der Methode der cotirten Ebenen oder der descriptiven Geometrie besitzt. Die verschiedenen Kanten oder Umrisse des Körpers bezeichnet man in der Zeichnung durch ausgezogene Linien, wenn die Perpendikel auf die Zeichenebene, welche durch sie hindurch gehen, keinen Theil des Körpers, der weiter von der Zeichnenebene entfernt ist, treffen. Solche Kanten oder Umrisse dagegen, die von Theilen des dargestellten Gegenstandes verdeckt sind, welche weiter von der Bildebene entfernt sind, und die sich den zum Zeichnenblatte senkrechten Geraden, die durch jene Kanten gehen, nähern, zeichnet man entweder gar nicht, oder deutet sie durch gestrichelte Linien an.

Die runden Körper sind immer schwer zu zeichnen. Der Umriss des Körpers, den man stets zeichnet, ist die Projection derjenigen Linie, in welcher eine auf der Zeichnenebene Senkrechte den Körper berühren würde, wenn sie weder sich von ihm entfernen, noch in ihn eindringen würde, im ganzen Verlaufe der Bewegung. Die Projection des Körpers ist immer innerhalb dieses Umrisses enthalten. Es ist schwer, allgemeine Regeln über diesen Gegenstand aufzustellen, aber da die runden Körper oft, wenn sie von Ebenen in gewisser Richtung geschnitten werden, als Durchschnittsfiguren Kreise geben, so wollen wir ein dahin gehörendes Beispiel wählen.

Vor Allem wollen wir eine leichte Methode entwickeln, um die Projection einer Kreisperipherie zu zeichnen. Man bestimmt die Projectionen dreier Punkte $A$, $B$, $C$, von denen zwei auf demselben Durchmesser liegen, und der dritte auf dem zu dem vorhergehenden senkrechten Durchmesser. $A'$, $B'$, $C'$ seien diese Projectionen (Fig. 46.). Man ziehe $A'B'$, nehme $O'A' = \frac{1}{2} A'B'$ und $D'O' = C'O'$, ziehe dann durch $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ Parallelen zu $A'B'$ und $C'D'$, so erhält man ein Parallelogramm, in welchem die Projection des Kreises eingeschrieben sein muss. Es ist leicht zu sehen, dass die Berührende des Kreises in $C$ parallel zu $AB$ ist, und folglich ist die Projection dieser Berührenden in $C'$ parallel zu $A'B'$.

Genügt dies noch nicht, um die Projection des Kreises in hinreichender Weise zu bestimmen, so nehme man $AE = \frac{1}{2} AO$

und ziehe $EF$ senkrecht auf $AE$; nimmt man dann in unserer Projection des Kreises $A'E'$ gleich der Hälfte von $A'O'$, so ist

$$E'F' : EF = O'C' : OC.$$

Man erhält somit den Punkt $F'$ durch eine leichte graphische Construction. Man sieht leicht, wie man unmittelbar dadurch die Punkte $F'$, $G'$, $H'$, $K'$ erhält. Nimmt man ähnlich $L'$ in der Mitte von $O'D'$ an, wo dann $L'M' : LM = O'A' : OA$ ist, so erhält man die Punkte $M'$, $N'$, $P'$, $Q'$. Reichen diese acht Punkte noch nicht hin, so findet man mit Leichtigkeit soviel als man will, indem man $AO$ nicht blos in zwei, sondern in drei, vier, fünf Theile theilt, Senkrechte auf $AO$ durch die Theilpunkte legt und in derselben Art wie oben weiter operirt. Auf diese Weise erhält man sechszehn, vierundzwanzig, zweiunddreissig u. s. w Punkte der Projection des Kreises.

Es sei jetzt die axonometrische Zeichnung einer Plinthe, eines Torus und einer Leiste zu fertigen, deren Dimensionen man kennt, oder von denen der Grundriss und der Aufriss gegeben sind (Fig. 47.). Die Zeichnung der Plinthe zu machen, hat nicht die geringste Schwierigkeit. Man denke sich nun die Oberfläche des Torus z. B. in vier Theile durch horizontale, gleichweit von einander abstehende Ebenen getheilt, die ihn in Kreisperipherien schneiden werden, deren Projectionen zu zeichnen nicht schwierig ist. Die Projection der Umrisslinie ist keine andere, als die Linie, welche die Projectionen der vier Peripherien einhüllt, und ist leicht zu zeichnen.

Die Zeichnung der Leiste macht man ähnlich, indem man den oberen und unteren Kreisumfang, mit dem sie endigt, projicirt und dann die gemeinschaftliche vertikale Tangente der Projectionen der beiden Grundflächen zieht.

### §. 46. Maassstab einer axonometrischen Zeichnung.

Von einem Punkte $M$ im Raume habe man die axonometrische Zeichnung $M'$ (Fig. 48.) und die seiner Projection auf die Ebene $XOY$, z. B. $n'$. Zieht man dann $n'p'$ parallel zu $OY'$, so sind $Qp'$, $p'n'$, $n'M'$ die Projectionen der drei Coordinaten.

Man könnte nun §. 36. anwenden, um die absolute Länge dieser Coordinaten im Raume in dem Falle zu finden, in welchem man die Winkel kennt, die die Projectionen der Axen unter einander bilden, oder die Verhältnisse der Längen der Projectionen

dreier gleicher Abstände, auf jeder der drei Axen genommen*). In gleicher Weise sieht man, wie man auf demselben Wege zur Bestimmung der den Axen parallelen Dimensionen des Körpers, von dessen Punkten man die axonometrischen Projectionen besitzt, gegen kann. Da aber der Körper, den man projicirt annimmt, entweder kleiner oder grösser als der Körper zu sein pflegt, den man in Wirklichkeit darstellen will, so wendet man ein viel einfacheres Mittel an, um von den Dimensionen der gemachten Zeichnung zu denen des Körpers selbst zu gelangen.

Wir wollen annehmen, das Verhältniss der Längen der Projectionen dreier gleicher Abstände auf den Axen genommen, sei z. B. $=3:1:3$. Nehmen wir nun an, die Länge der Einheit, auf dem Körper parallel der Axe gemessen, welche wir als die Axe $OX$ annehmen, sei in der Zeichnung durch eine Länge gleich $^1/_{20}$ dieser Einheit dargestellt, so ist klar, dass die Einheit am Körper parallel der Axe genommen, die man als Axe $OY$ annimmt, in der Zeichnung durch $^1/_{60}$ dieser Einheit dargestellt wird, und diejenige, welche parallel der Axe $OZ$ gemessen ist, durch $^1/_{20}$ der Einheit. Vollendet man unter dieser Voraussetzung die Zeichnung, so hat man die axonometrische Projection eines Körpers, der nicht mit dem wirklichen Körper identisch ist, den man darstellen soll, sondern eines ähnlichen und ihm parallelen Körpers. Die Beziehung zwischen den Dimensionen des wirklichen Körpers und denen des Körpers, dessen axonometrische Projection man zeichnet, und zwischen den Dimensionen dieses zweiten und seinen Projectionen ist eine solche, dass die der Axe $OX$ parallele Einheit des wirklichen Körpers in der Zeichnung durch $^1/_{20}$ dieser Einheit dargestellt wird, dass die $OY$ parallele Einheit am Körper in der Zeichnung durch $^1/_{60}$ dieser Einheit gegeben ist, und dass endlich eine Länge parallel zu $OZ$ am Körper durch eine Länge dargestellt wird, die nur $^1/_{20}$ von der wirklichen ist.

Man braucht also nicht zu untersuchen, welches das Verhältniss der Dimensionen des Körpers, dessen axonometrische

*) Aus den Gleichungen (B) in §. 36. ist es nicht schwer zu entnehmen, dass, wenn die Projectionen dreier gleicher Längen parallel zu den Axen unter sich im Verhältniss $= m:n:p$ stehen, und wenn $Op$, $pn$, $nM$ die Längen der drei Coordinaten sind, deren Projectionen $Op'$, $p'n'$, $n'M'$ sind, man

$$Op = Op' \cdot \frac{\sqrt{S}}{m}, \quad pn = p'n' \cdot \frac{\sqrt{S}}{n}, \quad nM = n'M' \cdot \frac{\sqrt{S}}{p}$$

hat, worin

$$S = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}$$

ist.

Proje[illegible]an hat, und denen des Körpers selbst ist, den man darst[illegible]ll, sondern man giebt bloss an, welches Verhältniss a[illegible]r Axe zwischen den auf dem darzustellenden Körper selbst [illegible]senen Abständen und den analogen Abständen auf der Zeichn[illegible]esteht. So würde man in dem gewählten Beispiele sagen [illegible] die Längen auf $OX'$ und $OZ'$ gleich $1/20$ und die auf $O$[illegible]leich $1/60$ der gemessenen Längen sind auf den entsprechenden Axen in dem dargestellten Körper. Man sagt daher, die Zeichnung sei mit dem Maassstab $1/20$ für die Axen $OX'$ und $OZ'$ und mit dem Maassstab $1/60$ für die Axe $OY'$ gemacht. Auch pflegt man die monodimetrischen Zeichnungen mit zwei, die anisometrischen mit drei Maassstäben zu versehen. Es ist auch leicht zu zeigen, dass man dieselben nicht nur zur directen Messung der Coordinaten der Punkte anwenden kann, deren Projectionen man hat, sondern auch zur Messung aller irgend einer Axe parallelen Längen.

§. 47. Geometrischer Werth einer axonometrischen Zeichnung.

Die axonometrische Projection eines Punktes genügt nicht, um die Lage desselben vollständig zu bestimmen. Es sei $M'$ (Fig. 49.) die Zeichnung des Punktes. Um die Coordinaten des Punktes $M$, der sie entspricht, zu erhalten, ist es nöthig, dass man z. B. auch $n'$ kennt, d. h. die Zeichnung der Projection des Punktes auf die Ebene $XOY$. Es würde in diesem Falle leicht sein, $n'p'$ parallel zu $OY'$ zu ziehen, und die drei Coordinaten von $M$ zu messen. Uebrigens gibt die Zeichnung einer Maschine im Allgemeinen die Coordinaten der wichtigsten Punkte derselben, mittelst der Hilfskenntnisse, die man von ihrer Lage hat. So genügt es z. B. auf die Zeichnung des Rades an der Welle in §. 43. nur einen Blick zu werfen, um zu sehen, dass, wenn man die Axen parallel der Höhe, der Länge und Breite annimmt, man die Coordinaten der Mittelpunkte, der Zapfen der verschiedenen Räder, der verschiedenen Punkte der Hebel, der Zahnräder und ähnlicher haben wird.

Die Geraden, die den Axen parallel sind, werden direct mittelst der Maassstäbe, die den Axen entsprechen, gemessen, denen sie parallel sind.

Handelt es sich dagegen um eine der Axe nicht parallele Gerade, z. B. derjenigen, deren axonometrische Projection $A'M'$ (Fig. 49.) ist, so muss man ein rechtwinkeliges Dreieck construiren, dessen Projection $A'D'M'$ sei. Die Länge, deren Projection $D'M'$ ist, ist die Differenz zwischen den in $n'M'$ und $b'A'$ projicirten Coordinaten, diejenige aber, deren Projection $D'A'$ ist,

ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten ebenfalls die Differenzen zwischen den in $b'c'$, $n'p'$ und $Op'$, $Oc'$ projicirten Geraden sind. Da man so die Geraden erhalten hat, die in $A'D'$ und $D'M'$ projicirt sind, so construirt man aus ihnen ein rechtwinkeliges Dreieck, und erhält so die Länge der in $A'M'$ projicirten Geraden. Die Winkel misst man, indem man Dreiecke zeichnet, in denen sie enthalten sind, und im Allgemeinen macht man bei dem grösseren Theile der Probleme von Methoden Gebrauch, die beinahe mit denen identisch sind, die man in der descriptiven Geometrie in Anwendung bringen würde.

### §. 48. Vortheile des axonometrischen Zeichnens.

Die axonometrischen Zeichnungen geben direct die Dimensionen der dargestellten Körper, die den Axen parallel sind, und dies ist kein kleiner Vortheil, da die Axen, auf die man einen Körper bezieht, zum grössten Theile der Höhe, Länge und Breite parallel angenommen werden. Der Hauptvortheil der axonometrischen Zeichnungen, besonders wenn man dieselben auf Maschinen und Gegenstände anwendet, deren Anordnung etwas complicirt ist, ist der, bei'm ersten Anblick sofort eine sehr klare Vorstellung von der Lage und Form der verschiedenen Theile der dargestellten Körper zu geben. Daher versteht man z. B. viel besser die axonometrische Zeichnung eines Theodoliten oder irgend eines ähnlichen Instruments, als die beiden Projectionen, die von ihm nach den gewöhnlichen Methoden der descriptiven Geometrie gemacht sind.

Wir legen zur näheren Erläuterung die isometrische Zeichnung eines Planimeters (Fig. 50.) bei, das von Herrn Goldschmid in Zürich gefertigt ist, und dem mechanischen Cabinet des technischen Institutes gehört*).

Man darf nicht sagen, dass es nicht sehr viele Körper gäbe, die man besser nach den gewöhnlichen Methoden darstellt, aber in vielen Fällen vereinigen die axonometrischen Zeichnungen die ganze Deutlichkeit eines Perspectivbildes mit einem guten Theile der Eigenschaften der Projectionen der descriptiven Geometrie.

---

*) Die beigegebene Zeichnung ist eine erste Probe, die im Königl. technischen Institute nach einer kurzen Auseinandersetzung der Principien des axonometrischen Zeichnens gemacht ist. Andere Proben, die zum Theil noch complicirter sind, wurden ebenfalls dort ausgeführt, wir konnten sie jedoch ihres zu grossen Formates wegen hier nicht beifügen.

# XX.

# Zwei Beweise des im ersten Hefte dieses Bandes (S. 102.) auf andere Art bewiesenen Beltrami'schen Satzes vom Dreiecke und ein Satz vom Viereck.

Von

Herrn *Carl Schmitt*,

Hauptmann im k. k. Genie-Stabe und Professor der höheren Mathematik an der k. k. Genie-Akademie in Bruck bei Znaim.

## I. Analytischer Beweis des Beltrami'schen Satzes.

Wenn

$$t=0, \qquad u=0, \qquad v=0$$

die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ eines Dreiecks $ABC$ ausdrücken, so sind

$$1) \qquad \alpha t-\beta u=0, \quad \beta u-\gamma v=0, \quad \gamma v-\alpha t=0$$

die Gleichungen dreier in einem Punkte $Q$ sich schneidender Eckstrahlen $CQ$, $AQ$, $BQ$ des Dreiecks. Da die zu ihnen in Bezug auf die Winkelhalbirungslinien des Dreiecks symmetrisch gelegenen Eckstrahlen durch

$$2) \qquad \frac{t}{\alpha}-\frac{u}{\beta}=0, \quad \frac{u}{\beta}-\frac{v}{\gamma}=0, \quad \frac{v}{\gamma}-\frac{t}{\alpha}=0$$

ausgedrückt sind, so schneiden sich auch diese in einem Punkte $Q'$, und da jedem Punkte $Q$ ein bestimmter Punkt $Q'$ entspricht, so liegt die Frage nahe: Welches ist der Ort des Punktes $Q'$, wenn der Punkt $Q$ eine Gerade beschreibt?

Ist diese Gerade durch

$$t_0 t+u_0 u+v_0 v=0$$

ausgedrückt, so müssen die aus 1) gezogenen Coordinaten $t$, $u$, $v$ des Punktes $Q$ die Gleichung der Geraden befriedigen.

Dies geschieht, sobald die Bedingung

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

Nimmt man [illegible]

$$[illegible]$$

$A, B, C$ sind die Winkel des Dreiecks [illegible] Gleichung

$$\frac{\sin A}{[illegible]} + \frac{\sin B}{[illegible]} + \frac{\sin C}{[illegible]} = [illegible]$$

d. h. den dem Dreiecke [illegible]

[illegible]

---

## III. Geometrischer Beweis des Beltrami'schen Satzes.

Einen einfachen geometrischen Beweis des Satzes: Wenn drei Eckstrahlen $AQ$, $BQ$, $CQ$ eines Dreiecks sich in einem Punkte $Q$ schneiden, so schneiden sich auch ihre in Bezug auf die Winkelhalbirungslinien des Dreiecks symmetrisch gelegenen $AQ'$, $BQ'$, $CQ'$ in einem Punkte $Q'$, habe ich in meinen „Principien der neueren Geometrie" (S. 33.) gegeben, und wende mich desshalb bloss zum zweiten Theile des Satzes.

Beschreibt $Q$ eine Gerade, so sind $AQ$ und $BQ$ einander entsprechende Strahlen zweier collinearen Büschel, bei denen in $AB$ zwei einander entsprechende Strahlen vereinigt sind. Da ferner $AQ$ und $AQ'$, ebenso $BQ$ und $BQ'$, der Construction zufolge, jedesmal zwei entgegengesetzt gleiche Büschel bilden, so entsprechen auch $AQ'$ und $BQ'$ einander in collinearer Weise; endlich bilden die Seiten $AC$ und $BC$ zwei einander

entsprechende Strahlen. Der Ort des Punktes $Q'$ ist somit ein dem Dreiecke $ABC$ umschriebener Kegelschnitt.

Sind $AQ$ und $BQ$ Parallelstrahlen, so erzeugen sie zwei einstimmig gleiche Büschel; dasselbe gilt dann offenbar auch für $AQ'$ und $BQ'$. Der Ort des Punktes $Q'$ ist mithin der dem Dreiecke umschriebene Kreis.

---

## III. Ein Satz vom Viereck.

Der geometrische Ort des Durchschnittpunktes $Q$ der Diagonalen eines Vierecks $ABCD$, das einem gegebenen Vierecke $TUVW$ so eingeschrieben ist, dass sich die Gegenseiten $AB$ und $CD$, $BC$ und $DA$ des ersteren beziehungsweise in festen Punkten $M$ und $N$ auf den Diagonalen $TV$ und $UW$ des letzteren treffen, ist eine Gerade, deren Schnittpunkte $M'$ und $N'$ mit und in Bezug auf $TV$ und $UW$ die harmonisch Conjugirten von $M$ und $N$ sind.

Beweis. Wenn die Ecken des Vierecks $TUVW$ durch

$$t = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

ausgedrückt werden, so sind

$$\alpha t + \beta u = 0, \quad \beta u + \gamma v = 0, \quad \gamma v + \delta w = 0, \quad \delta w + \alpha t = 0$$

die Gleichungen der vier Ecken eines dem ersteren eingeschriebenen Vierecks $ABCD$, dessen Gegenseiten $AB$ und $CD$ sich im Punkte

$$\alpha t - \gamma v = 0,$$

und dessen zweite Gegenseiten $BC$ und $DA$ sich im Punkte

$$\beta u - \delta w = 0$$

schneiden; der erstere $M$ von diesen beiden Punkten liegt in der Diagonale $TV$, der letztere $N$ in der Diagonale $UW$.

Der Durchschnittspunkt $Q$ der beiden Diagonalen $AC$ und $BD$ wird offenbar durch

$$\alpha t + \beta u + \gamma v + \delta w = 0$$

ausgedrückt. Daraus folgt, dass derselbe jederzeit mit den beiden Punkten

$$\alpha t + \gamma v = 0 \quad \text{und} \quad \beta u + \delta w = 0,$$

h., in Bezug auf $TV$ und $UW$, den harmonisch conjugirten P und $N'$ von $M$ und $N$, in gerader Linie liegt.

Wenn $M$ und $N$ fest sind, so sind es auch $M'$ und $N'$; der rt des Punktes $Q$ ist mithin die Gerade $M'N'$.

Nimmt man die Punkte $M$ und $N$ in unendlicher Ferne, oder rwandelt man das Viereck durch Vereinigung zweier auf einan- r folgenden Seiten in ein Dreieck, u. s. w., so entstehen dar- s Modificationen des vorstehenden allgemeinen Satzes.

Wie heisst der reciproke Satz?

## XXI.

## Ueber den Kegelschnitt der neun Punkte und sein stereometrisches Seitenstück.

Von

Herrn *Heinrich Gretschel*,

Lehrer an der Handelslehranstalt in Leipzig.

Als Zusatz zu dem im ersten Hefte dieses Theiles des Archivs findlichen Aufsatze No. VI. des Herrn Herausgebers er- be ich mir zunächst den nachstehenden geometrischen Beweis s dort mitgetheilten Satzes zu geben und dann das stereome- sche Seitenstück desselben abzuleiten.

### I.

Wir gehen von dem Satze aus:

Die Polaren $p$ eines beliebigen Punktes $P$ in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel $B(k^2)$, (d. h. in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte $k^2$, welche sich in denselben vier reellen oder imaginären Punkten schneiden), schneiden sich sämmtlich in einem Punkte $P'$.

Die Polaren $q$ eines zweiten Punktes $Q$ schneiden sich gleichfalls alle in einem Punkte $Q'$. Die beiden Systeme der $p$ und der $q$ bilden nun ein Paar geradlinige Strahlenbüschel, welche $B(p)$ und $B(q)$ heissen mögen, und wenn wir immer zwei solche Strahlen $p$ und $q$ auf einander beziehen, welche zu denselben Kegelschnitte $k^2$ gehören, so folgt aus der Eindeutigkeit des Entsprechens (d. h. weil jedem Strahl $p$ nur ein einziger Strahl $q$ und umgekehrt entspricht), dass beide Büschel collinear (projectivisch) sind. Dieselben befinden sich aber nicht in collinearer (perspectivischer) Lage; denn es kann $P'Q'$ nicht selbst entsprechend sein, weil sonst in Bezug auf denselben Kegelschnitt sowol $P$ als $Q$ der Pol dieser Geraden sein müsste. Da sonach beide Büschel sich in schiefer Lage befinden, so erzeugen sie einen Kegelschnitt, d. h. die Schnittpunkte $pq$ von je zwei entsprechenden Strahlen $p$ und $q$ liegen auf einem Kegelschnitte, welcher $\varkappa^2$ heissen möge. Da nun aber $pq$ Nichts weiter ist als der Pol der Geraden $PQ$, so hat man den Satz:

Die Pole einer willkürlichen Geraden in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel $B(k^2)$ liegen auf einem Kegelschnitte $\varkappa^2$.

Wendet man diesen Satz auf die unendlich entfernte Gerade an und beachtet, dass deren Pol in Bezug auf einen Kegelschnitt $k^2$ mit dem Mittelpunkte des letzteren identisch ist, so erhält man sofort den Satz:

Die Mittelpunkte der einzelnen Curven $k^2$ eines Kegelschnittbüschels $B(k^2)$ liegen auf einem Kegelschnitte $\varkappa^2$.

Sind $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ die vier Punkte, in denen sich die Kegelschnitte des Büschels $B(k^2)$ schneiden, so muss der Kegelschnitt $\varkappa^2$ durch die Schnittpunkte der Geraden

$A_1 A_2$ und $A_3 A_4$, $A_1 A_3$ und $A_2 A_4$, $A_1 A_4$ und $A_2 A_3$

gehen, denn je zwei solche Gerade sind als eine Hyperbel zu betrachten, deren Mittelpunkt ihr Schnittpunkt ist. Uebrigens bestimmen diese drei Punkte ein Dreieck, in welchem jede Ecke

in Bezug auf alle $k^2$ nur eine einzige Polare hat, nämlich ihre Gegenseite.

Ferner geht der Kegelschnitt $\varkappa^2$ durch die Halbirungspunkte der Strecken

$$A_1 A_2,\ A_1 A_3,\ A_1 A_4,\ A_2 A_3,\ A_2 A_4,\ A_3 A_4;$$

denn es lässt sich immer ein Kegelschnitt $k^2$ finden, welcher eine dieser sechs Strecken als Durchmesser hat und der durch die beiden ausserhalb dieser Strecke gelegenen Punkte $A$ hindurchgeht, dessen Mittelpunkt also der Halbirungspunkt der betreffenden Strecke ist.

Bezeichnet man die Halbirungspunkte der genannten Strecken der Reihe nach mit

$$M_{1\cdot 2},\ M_{1\cdot 3},\ M_{1\cdot 4},\ M_{2\cdot 3},\ M_{2\cdot 4},\ M_{3\cdot 4},$$

und zieht die drei Geraden

$$M_{1\cdot 2}\,M_{3\cdot 4},\ M_{1\cdot 3}\,M_{2\cdot 4},\ M_{1\cdot 4}\,M_{2\cdot 3},$$

so halbiren sich je zwei derselben, weil sie die Diagonalen eines Parallelogrammes bilden; so sind z. B. $M_{1\cdot 2}\,M_{3\cdot 4}$ und $M_{1\cdot 4}M_{2\cdot 3}$ die Diagonalen des Parallelogrammes $M_{1\cdot 2}\ M_{2\cdot 3}\ M_{3\cdot 4}\ M_{1\cdot 4}$, dessen Seiten den Geraden $A_1A_3$ und $A_2A_4$ parallel und halb so lang sind als dieselben. Hieraus folgt, weil jede Gerade nur einen einzigen Halbirungspunkt hat, dass die Geraden

$$M_{1\cdot 2}\,M_{3\cdot 4},\ M_{1\cdot 3}\,M_{2\cdot 4},\ M_{1\cdot 4}\,M_{2\cdot 3}$$

sich in einem Punkte schneiden und dort halbiren. Nun sind aber die erwähnten drei Geraden Sehnen des Kegelschnittes $\varkappa^2$; halbiren sich zwei Sehnen eines Kegelschnittes, so sind sie beide Durchmesser und ihr Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes. Diess gibt uns den Satz:

**Der Mittelpunkt des Kegelschnittes $\varkappa^2$ ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt der drei Geraden, welche die Halbirungspunkte von je zwei Verbindungslinien der Punkte $A$ verbinden, die keinen Endpunkt gemein haben.**

Da jede Gerade von den Kegelschnitten des Büschels $B(k^2)$ in ein Paar involutorischen Punktreihen geschnitten wird, welche entweder zwei oder gar keine reelle Doppelpunkte haben, so gibt es entweder zwei Kegelschnitte $k^2$, welche die Gerade berühren, oder keiner dieser Kegelschnitte thut diess. Diese Bemerkung

gilt auch von der unendlich entfernten Geraden. Da nun der Kegelschnitt, welcher die unendlich entfernte Gerade berührt, allemal eine Parabel ist, so gibt es in dem Büschel $B(k^2)$ entweder zwei Parabeln oder gar keine. Das letztere tritt ein, wenn einer der vier Punkte $A$ im Innern des Dreieckes liegt, das die drei andern bilden; man erkennt dann auf den ersten Blick, dass es keine aus einem stetigen Zuge bestehende Curve ohne ausgezeichnete Punkte, also keine Ellipse oder Parabel geben kann, die durch alle vier Punkte geht, und das Büschel $B(k^2)$ muss alsdann aus lauter Hyperbeln bestehen.

Enthält nun das Büschel zwei Parabeln, so gibt es zwei unendlich entfernte Mittelpunkte und der Ort der Mittelpunkte muss eine Hyperbel sein; enthält das Büschel keine Parabeln, liegen alle Mittelpunkte der $k^2$ in endlicher Ferne, so ist ihr Ort eine Ellipse. Also:

**Der Kegelschnitt $x^2$ ist eine Hyperbel, wenn keiner der vier Punkte $A$ im Innern des Dreiecks liegt, welches die drei anderen bilden; er ist eine Ellipse, wenn einer der vier Punkte innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks liegt.**

## II.

Zwei Flächen zweiten Grades $f^2$ schneiden sich in einer Raumcurve vierten Grades $r^4$, d. h. in einer Curve, welche von einer Ebene in höchstens vier Punkten geschnitten wird. Eine willkürliche Ebene schneidet nämlich die beiden Flächen $f^2$ in ein Paar Kegelschnitten $k^2$, welche nicht mehr als vier Punkte gemein haben.

Alle Flächen zweiten Grades, die sich in derselben Raumcurve $r^4$ schneiden, bilden ein **Flächenbüschel zweiten Grades** $B(f^2)$.

Es sei nun $P$ ein beliebiger Punkt, $\pi$ sei seine Polarebene in Bezug auf eine der Flächen $f^2$ des Flächenbüschels. Um zu entscheiden, was für ein Gebilde die sämmtlichen Polarebenen $\pi$ in Bezug auf das Büschel erzeugen, legen wir durch $P$ eine ganz willkürliche Ebene. Diese schneidet die Raumcurve $r^4$ in vier Punkten, das Flächenbüschel $B(f^2)$ also in einem Kegelschnittbüschel $B(k^2)$, und jede Polarebene $\pi$ in einer Geraden $p$, welche Linien die Polaren von $P$ in Bezug auf das Büschel $B(k^2)$ sind.

Diese Polaren $p$ schneiden sich aber in einem Punkte. Hieraus folgt, dass die Polarebenen $\pi$ sich alle in einer Geraden schneiden. Daher der Satz:

**Die Polarebenen $\pi$ eines beliebigen Punktes $P$ in Bezug auf ein Flächenbüschel zweiten Grades $B(f^2)$ schneiden sich in einer Geraden.**

Ebenso schneiden sich sämmtliche Polarebenen $\varrho$ eines Punktes $R$ in einer Geraden $h$ und die Polarebenen $\sigma$ eines Punktes $S$ in einer Geraden $i$. Beziehen wir nun je drei Ebenen $\pi$, $\varrho$, $\sigma$, die zu derselben Fläche $f^2$ gehören, auf einander, so folgt aus der Eindeutigkeit dieser Beziehung, dass die Ebenen $\pi$, $\varrho$, $\sigma$ drei collineare Ebenenbüschel $B(\pi)$, $B(\varrho)$, $B(\sigma)$ bilden, deren Achsen $g$, $h$, $i$ sind. Wie man leicht sieht, befinden sich diese drei Büschel in schiefer Lage. Der geometrische Ort des Schnittpunktes von je drei entsprechenden Ebenen $\pi$, $\varrho$, $\sigma$ ist daher eine Raumcurve dritten Grades $r^3$. Denn eine beliebige Ebene schneidet das Büschel $B(\pi)$ in einem Strahlenbüschel $B(p)$, das Büschel $B(\varrho)$ in einem Strahlenbüschel $B(r)$ und das Büschel $B(\sigma)$ in einem Strahlenbüschel $B(s)$. Die Mittelpunkte dieser drei Büschel sind die Punkte $G$, $H$, $J$, in denen die Geraden $g$, $h$, $i$ von der Ebene geschnitten werden. Alle drei Büschel sind collinear und in schiefer Lage; daher erzeugen $B(p)$ und $B(r)$ einen durch $G$ und $H$ gehenden, $B(p)$ und $B(s)$ aber einen durch $G$ und $J$ gehenden Kegelschnitt. Da beide Kegelschnitte den Punkt $G$ gemein haben, so haben sie im Allgemeinen noch drei andere Punkte gemein, und jeder derselben ist der Schnittpunkt von drei entsprechenden Strahlen $p$, $r$, $s$, also auch von drei entsprechenden Ebenen $\pi$, $\varrho$, $\sigma$. Also ist der Ort der Schnittpunkte von $\pi$, $\varrho$, $\sigma$ eine Raumcurve dritten Grades. Ein solcher Schnittpunkt dreier Ebenen $\pi$, $\varrho$, $\sigma$ ist aber der Pol der Ebene $PRS$. Daher haben wir den Satz:

**Die Pole einer beliebigen Ebene in Bezug auf ein Flächenbüschel zweiten Grades $B(f^2)$ liegen auf einer Raumcurve dritten Grades $r^3$.**

Da die Pole der unendlich entfernten Ebene in Bezug auf die Flächen $f^2$ die Mittelpunkte dieser Flächen sind, so erhält man sofort den folgenden Satz:

**Die Mittelpunkte aller Flächen zweiten Grades, welche einem Flächenbüschel zweiten Grades $B(f^2)$ angehören, liegen auf einer Raumcurve dritten Grades $r^3$.**

**Diese Curve $r^3$ geht durch die Scheitel der vier**

Kegelflächen zweiten Grades, welche sich durch alle legen lassen, oder, was dasselbe ist, durch diejenigen vier Punkte, deren jeder in Bezug auf sämmtliche Flächen $f^2$ nur eine einzige Polarebene hat.

Dass es nicht mehr als vier solche Punkte geben kann, erhellt daraus, dass zwei in polarer Beziehung stehende Systeme, ein Punktsystem und ein Ebenensystem, vollständig bestimmt sind, sobald fünf Punkte des ersten und die entsprechenden Ebenen des zweiten bekannt sind. Gäbe es also fünf Punkte, die nur eine einzige Polarebene besitzen, so würde kein Punkt mehr als eine Polarebene besitzen.

Giebt es aber einen derartigen Punkt, welcher $T$ heissen möge, so schneidet dessen Polarebene $\tau$ das Büschel $B(f^2)$ in einem Kegelschnittbüschel $B(k^2)$; es gibt also in der Ebene $\tau$ im Allgemeinen drei Punkte, von denen wenigstens einer reell ist, welche in Bezug auf sämmtliche $k^2$ dieselbe Polare besitzen. Jeder solcher in $\tau$ gelegener Punkt hat aber dieselbe Eigenschaft wie $T$, seine Polarebene ist nämlich die durch seine Polare in Bezug auf $B(k^2)$ und durch $T$ zu legende Ebene.

Man sieht hieraus, dass diese vier Punkte ein Tetraeder bestimmen, in welchem jede Fläche die Polarebene der gegenüberliegenden Ecke ist.

Wenn eines der drei Flächenbüschel, welche die Curve $r^4$ erzeugen, in eine einzige Ebene degenerirt, so geht $r^3$ in einen in dieser Ebene liegenden Kegelschnitt über. Denn jedes der beiden anderen Flächenbüschel schneidet diese Ebene in einem Strahlenbüschel und diese zwei Strahlenbüschel erzeugen den fraglichen Kegelschnitt.

Dieser Fall tritt ein, wenn $r^4$ in zwei sich schneidende Kegelschnitte zerfällt. Ist $g$ die gemeinschaftliche Sehne beider Kegelschnitte, so hat jeder Punkt dieser Geraden in Bezug auf sämmtliche Flächen des Büschels nur eine Polarebene. Man erhält dieselbe leicht, wenn man durch diesen Punkt, er möge $I$ heissen, eine Ebene legt, die den einen Kegelschnitt in $M_1$ und $M_2$, den andern in $M_3$ und $M_4$ schneidet. Dann schneiden sich die jederzeit reellen Linien $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$ in $R$; $R$ hat in Bezug auf das Kegelschnittbüschel, welches in der Schnittebene liegt, nur eine einzige Polare $r$. Legt man nun durch $r$ und durch denjenigen Punkt $R'$, welcher die gemeinschaftliche Sehne der beiden gegebenen Kegelschnitte mit $R$ harmonisch theilt, eine

Ebene, so ist dieselbe die gesuchte Polarebene des Punktes $R$ in Bezug auf das Büschel $B(f^2)$. Man erhält also den Satz:

**Die Pole einer beliebigen Ebene in Bezug auf sämmtliche Flächen zweiten Grades, welche zwei sich schneidende Kegelschnitte gemein haben, liegen auf einem Kegelschnitte, und hieraus folgt:**

**Der Ort der Mittelpunkte aller Flächen zweiten Grades, welche zwei sich schneidende Kegelschnitte gemein haben, ist ein Kegelschnitt $x^2$.**

**Dieser Kegelschnitt $x^2$ muss nothwendig in der Ebene liegen, welche durch die Mittelpunkte der zwei gegebenen Kegelschnitte und durch den Halbirungspunkt ihrer gemeinschaftlichen Sehne geht,** denn diese Ebene ist für alle durch die gegebenen zwei Kegelschnitte zu legenden Ebenen eine Diametralebene. Sind $A_1$ und $A_2$, $A_3$ und $A_4$ die zwei Paare von Punkten, in denen diese Ebene die zwei gegebenen Kegelschnitte schneidet, so ist die Frage nach dem Orte der Mittelpunkte aller Flächen zweiten Grades, die sich durch die gegebenen zwei Kegelschnitte legen lassen, identisch mit der Frage nach dem Orte der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche durch $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ gehen. Wir wissen aber, dass dieses ein Kegelschnitt ist, der u. a. durch die Halbirungspunkte von $A_1A_2$ und $A_3A_4$, sowie durch den Schnittpunkt von $A_1A_2$ mit $A_3A_4$ geht; d. h.

**Der Kegelschnitt $x^2$ geht durch die Mittelpunkte der gegebenen Curven zweiten Grades und durch den Halbirungspunkt ihrer gemeinschaftlichen Sehne.**

Wie wir wissen, erhält man den Mittelpunkt der fraglichen Curve, wenn man die Halbirungspunkte von $A_1A_2$ und $A_3A_4$ verbindet und die Verbindungslinie halbirt; d. h.

**Der Mittelpunkt von $x^2$ ist der Halbirungspunkt der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden gegebenen Kegelschnitte.**

Aus diesem Satze folgt weiter, dass $x^2$ eine Ellipse oder Hyperbel ist (d. h. einen in endlicher Ferne liegenden Mittelpunkt hat), sobald die beiden gegebenen Kegelschnitte Ellipsen oder Hyperbeln sind. Ob $x^2$ eine Ellipse oder Hyperbel ist, das hängt davon ab, ob es möglich ist, durch die zwei gegebenen Kegelschnitte ein (elliptisches oder hyperbolisches) Paraboloid zu legen. Ist dieses möglich, so ist $x^2$ eine Hyperbel, und da diese zwei

unendlich entfernte Punkte hat, so muss es dann immer zwei Paraboloide geben, deren unendlich entfernte Mittelpunkte eben die unendlich entfernten Punkte der Hyperbel $\varkappa^2$ sind. Dieser Fall kann aber dann nicht eintreten, wenn der eine der gegebenen Kegelschnitte eine Ellipse, der andere eine Hyperbel ist, denn das hyperbolische Paraboloid hat keine Ellipsen und das elliptische Paraboloid hat keine Hyperbeln als ebene Schnitte. Dann ist also $\varkappa^2$ eine Ellipse. Für den Fall, dass beide Kegelschnitte von gleicher Art sind, muss aber die Curve $\varkappa^2$ eine Hyperbel sein, denn es lässt sich leicht zeigen, dass die vier Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ (in denen die Ebene von $\varkappa^2$ die beiden gegebenen Kegelschnitte trifft) dann nie so liegen können, dass sich der eine innerhalb des von den andern gebildeten Dreiecks befindet, sofern es überhaupt möglich sein soll, durch die gegebenen beiden Curven Flächen zweiten Grades zu legen. Läge nämlich der eine der vier Punkte $A$ im Innern des Dreieckes, welches von den drei übrigen gebildet wird, so würde die Durchschnittslinie der Ebenen der zwei gegebenen Kegelschnitte den einen der letzteren in zwei reellen, den anderen aber in zwei imaginären Punkten, die durch beide Kegelschnitte zu legende Fläche zweiten Grades also in vier Punkten schneiden, was nicht möglich ist.

Ist der eine der gegebenen Kegelschnitte eine Parabel, so muss auch $\varkappa^2$ eine Parabel sein, weil nach der angegebenen Construction der Mittelpunkt von $\varkappa^2$ in unendliche Ferne fällt.

Sind endlich die beiden gegebenen Kegelschnitte Parabeln, so ist $\varkappa^2$ eine gerade Linie, welche durch den Halbirungspunkt der gemeinschaftlichen Sehne beider Parabeln geht. Ist nämlich $B$ der Halbirungspunkt der gemeinschaftlichen Sehne und sind $A_1$ und $A_2$ diejenigen Punkte der beiden Parabeln, welche in der Ebene von $\varkappa^2$ liegen, während $A_3$ und $A_4$ in unendliche Ferne fallen, so handelt es sich um den Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die durch $A_1$ und $A_2$ und die unendlich entfernten Punkte von $BA_1$ und $BA_2$ gehen. Dieser Ort ist ein durch $B$ und den Halbirungspunkt $C$ von $A_1A_2$ gehender Kegelschnitt $\varkappa^2$ (nach dem allgemeinen Theorem in No. I.); da man aber zwei durch $A_1$ und $A_2$ gehende und resp. zu $BA_2$ und $BA_1$ parallele Gerade, die sich in einem Punkte $D$ der $BC$ schneiden, auch als einen solchen Kegelschnitt und $D$ als dessen Mittelpunkt betrachten kann, so muss $\varkappa^2$ mit der Geraden $BC$ drei Punkte $B$, $C$ und $D$ gemein haben, d. h. $\varkappa^2$ muss mit $BC$ coincidiren.

Was schliesslich noch den speziellen Fall betrifft, dass die

beiden gegebenen Kegelschnitte in parallelen Ebenen liegen, so müssen die beiden Kegelschnitte alsdann ähnlich und ähnlich liegend sein, wenn sich Flächen zweiten Grades durch sie sollen legen lassen. Verbindet man die Mittelpunkte beider Linien, so geht die Verbindungslinie durch die Mittelpunkte aller durch sie zu legenden Flächen zweiten Grades. Daher der Satz:

Sind in zwei parallelen Ebenen zwei ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte gegeben, so liegen die Mittelpunkte aller Flächen zweiten Grades, welche diese Curven enthalten, auf derjenigen Geraden, welche den Mittelpunkt der beiden gegebenen Kegelschnitte verbindet.

## XXII.

## Ueber die Näherungswerthe der periodischen Kettenbrüche und ihre Anwendung auf Darstellung der Quadratwurzeln.

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

### §. 1.

Bezeichnet man der Kürze wegen die periodischen Kettenbrüche der einfachsten Form durch

1) . . . $K(a, a, a, a, \ldots) = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}}}\ldots\ldots,$

2) . . . $K(a, b; a, b; \ldots) = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}}}\ldots\ldots,$

3) $K(a_1, a_2, \ldots a_n; a_1, a_2, \ldots a_n; \ldots) = \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2\ldots.+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_1}}}}\ldots.,$

so ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung des rten Pa tialbruches von Nro. 1):

4) . . . . . $K_r(a, a, a, \ldots.) = \dfrac{Z_r}{N_r}$ .

$$= \frac{a^{r-1} + (r-2)\,a^{r-3} + (r-3)_2\,a^{r-5} + (r-4)_3\,a^{r-7} + \ldots.}{a^r + (r-1)\,a^{r-2} + (r-2)_2\,a^{r-4} + (r-3)_3\,a^{r-6} + \ldots.}.$$

Die Näherungswerthe für Nro. 2) zerfallen in zwei Form je nachdem der Partialbruch gerade oder ungerade ist, und m erhält:

5) . . . . . $K_{2r-1}(a, b; a, b; \ldots) = \dfrac{Z_{2r-1}}{N_{2r-1}}$

$$= \frac{(ab)^{r-1} + (2r-3)\,(ab)^{r-2} + (2r-4)_2\,(ab)^{r-3}\ldots..}{a[(ab)^{r-1} + (2r-2)\,(ab)^{r-2} + (2r-3_2\,(ab)^{r-3}\ldots.]},$$

6) . . . . . $K_{2r}(a, b; a, b; \ldots..) = \dfrac{Z_{2r}}{N_{2r}}$

$$= \frac{b[(ab)^{r-1} + (2r-2)\,(ab)^{r-2} + (2r-3)_2\,(ab)^{r-3} + \ldots..]}{(ab)^r + (2r-1)\,(ab)^{r-1} + (2r-2)\,(ab)^{r-2} + \ldots..}.$$

Hierin bedeutet $(x)_p = \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)}{1.\,2.\,3.\,\ldots..\,p}$. Für kann jede ganze Zahl gesetzt werden. Je grösser r angenommen wir desto genauer ist der Näherungswerth.

Für Kettenbrüche von folgender Form:

$$\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a\ldots.}}}} = K(a, -a, a, -a, \ldots.)$$

und

$$K(-a, b; -a, b; \ldots.) = -K(a, -b; a, -b; \ldots.)$$

gelten folgende Gleichungen:

7) . . . . . $K_r(+a, -a, +a, -a, \ldots.) = \dfrac{Z_r}{N_r}$

$$= \frac{a^{r-1} - (r-2)\,a^{r-3} + (r-3)_2\,a^{r-5} - \ldots.}{a^r - (r-1)\,a^{r-2} + (r-2)_2\,a^{r-4} - \ldots.},$$

8) . . . . . $K_{2r-1}(a, -b;\ a, -b; \ldots.) = \dfrac{Z_{2r-1}}{N_{2r-1}}$

$$= \frac{(ab)^{r-1} - (2r-3)(ab)^{r-2} + (2r-4)_2\,(ab)^{r-3} - \ldots.}{a[(ab)^{r-1} - (2r-2)(ab)^{r-2} + (2r-3)_2\,(ab)^{r-3} - \ldots.]},$$

9) . . . . . $K_{2r}(a, -b;\ a, -b; \ldots.) = \dfrac{Z_{2r}}{N_{2r}}$

$$= \frac{b[(ab)^{r-1} - (2r-2)(ab)^{r-2} + (2r-3)_2\,(ab)^{r-3} - \ldots.]}{(ab)^r - (2r-1)(ab)^{r-1} + (2r-2)_2\,(ab)^{r-2} - \ldots.}.$$

Die Reihen in Nro. 4)—9) brechen ab, so oft ein Glied in 0 übergeht oder einen negativen Exponenten erhalten sollte.

Der periodische Kettenbruch Nro. 3), dessen Periode aus $n$ Gliedern besteht, lässt sich auf folgende Weise in einen eingliedrigen periodischen Kettenbruch umwandeln:

10) . . . . . $K(a_1, a_2, \ldots. a_n;\ a_1, a_2, \ldots. a_n; \ldots.)$

$$= \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1}(-)^{n-1} \cfrac{1}{N_n + Z_{n-1}(-)^{n-1}} \cfrac{1}{N_n + Z_{n-1}(-)^{n-1}} \cfrac{1}{N_n + Z_{n-1}..}\right].$$

Er lässt sich sofort selbst wieder nach Nro. 7) und 4) behandeln, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist.

Für ein gerades $n$ gilt:

11) . . . . . $K(a_1, a_2, \ldots. a_n;\ a_1, a_2, \ldots. a_n; \ldots.)$

$$= \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} - \frac{S^{r-1} - (r-2)\,S^{r-3} + (r-3)_2\,S^{r-5} - \ldots.}{S^r - (r-1)\,S^{r-2} + (r-2)_2\,S^{r-4} - \ldots.}\right],$$

für ein ungerades $n$:

12) . . . . . $K(a_1, a_2, \ldots a_n; a_1, a_2, \ldots a_n; \ldots)$

$$= \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} + \frac{S^{r-1} + (r-2)\,S^{r-3} + (r-3)_2\,S^{r-5} + \ldots}{S^r + (r-1)\,S^{r-2} + (r-2)_2\,S^{r-4} + \ldots}\right],$$

worin $S = N_n + Z_{n-1}$ der Kürze wegen gesetzt ist. Hierin bezeichnet $Z_{n-1}$ und $N_{n-1}$ Zähler und Nenner des $(n-1)$ten (vorletzten) Partialbruchs und $N_n$ den Nenner des $n$ten (letzten) Partialbruchs der isolirt gedachten Periode, also von $K(a_1, a_2, \ldots a_n)$. Für $r$ kann jede ganze Zahl 0, 1, 2, 3 .... eingesetzt werden; für $r = 0$ fällt das zweite Glied in Nro. 11) und 12) weg und es entsteht der $(n-1)$te Partialbruch; für $r = 1$ entsteht der $(2n-1)$te; für $r = 2$ der $(3n-1)$te Partialbruch des obigen Kettenbruchs, u. s. w. Bei der Anwendung auf besondere Fälle muss $Z_{n-1}$, $N_{n-1}$ und $N_n$ aus der isolirten Periode $K(a_1, a_2, \ldots a_n)$ auf die gewöhnliche Weise dargestellt werden.

Clausen hat im 3ten Bande S. 88. von Crelle's Journal folgenden Ausdruck für den $r$ten Partialbruch eines eingliedrigen periodischen Kettenbruchs Nro. 1) gegeben:

13)

$$K_r(a, a, \ldots) = \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^r - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^r}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^{r+1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^{r+1}}.$$

Hieran knüpft Herr Director und Professor Dr. Strehlke im 3ten Hefte S. 343. d. 42sten Bandes dieses Archivs die Bemerkung, dass er schon „vor längerer Zeit" einen andern Ausdruck für den einperiodischen Kettenbruch Nro. 1) und einen zweiten für den $2r$ten Partialbruch des zweigliedrigen periodischen Kettenbruchs Nro. 2) gefunden habe, und gibt beide an. Dabei ist jedoch eine Lücke gelassen, denn es fehlt der Ausdruck für den $(2r-1)$ten Partialbruch dieses Kettenbruchs, der oben angegeben ist.

Diese Lücke findet sich gleichfalls ausgefüllt in meiner Abhandlung über Kettenbrüche nebst ihrer Anwendung auf die Berechnung der Quadratwurzeln und diophantischen Gleichungen, welche im 49sten Bde. von Crelle's Journal schon im Jahre 1855 erschienen ist, und die der Herr Prof. Strehlke nicht gekannt zu haben scheint.

Von einem Prioritätsstreite kann im vorliegenden Falle wohl

nicht die Rede sein, da die Sache bei dem vorhandenen Thatbestand sich von selbst entscheidet. Wenn aber durch die Worte „vor längerer Zeit“ ein Prioritätsrecht meiner Abhandlung gegenüber in Anspruch genommen werden sollte, so dürfte eine Wahrung dagegen um so gerechtfertigter erscheinen, da der Druck meiner Abhandlung durch ein besonderes Missgeschick (das eingesendete Manuscript galt für verloren) durch eine lange Reihe von Jahren verzögert wurde.

Die oben mitgetheilten Gleichungen sind vieler Anwendung fähig und haben den Vorzug, dass sie zur Berechnung und Auswerthung im speciellen Falle sehr bequem sind, was ich auch schon in der genannten Abhandlung angedeutet, aber nicht näher ausgeführt habe. Sie verwandeln beispielsweise die Ausziehung der Quadratwurzeln bekanntlich in eine einfache Division, und können zu jedem Grade der Genauigkeit ohne besondere Mühe gesteigert werden.

Auch Herr Dr. Simon hat auf die Wichtigkeit der periodischen Kettenbrüche und ihre Anwendung in einem, mit eben so vieler Sachkenntniss als Scharfsinn geschriebenen, und mit weitern interessanten Folgerungen bereicherten Aufsatze im 33sten Bde. S. 448. u. ff. dieses Archivs aufmerksam gemacht, worauf ich hier verweise.

Die von Clausen gegebene Gleichung Nro. 13) erscheint in kurzem und geschlossenem Ausdrucke. Aber nicht jeder kurze Ausdruck ist eben deswegen zur Anwendung bequem. Namentlich steht er an Brauchbarkeit und Bequemlichkeit dem in Nro. 4) gegebenen weit nach. Soll er zur Auswerthung benutzt werden, so schliesst er die Darstellung eines Wurzelwerthes und dann dessen Potenzirung in sich, was immer eine mühevolle Arbeit verursacht. Man kann ihn aber zur Anwendung bequemer durch Umformung machen, was im Folgenden geschehen soll. Aber auch dann steht er noch immer an Bequemlichkeit dem in Nro. 4) gegebenen nach.

Im Folgenden soll nun die Brauchbarbeit der vorstehenden Gleichungen für die Anwendung näher nachgewiesen und daran weitere Erörterungen über die Eigenschaften der periodischen Kettenbrüche geknüpft werden.

## §. 2.

Der Ausdruck Nro. 13) §. 1. lässt sich dadurch einfacher darstellen, dass man $\frac{1}{2}$ aus Zähler und Nenner wegschafft. Man erhält dann:

$$K_r \quad ,\ldots.) = \frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^r - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^r}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^{r+1} - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^{r+1}}$$

$$= \frac{2(a+\sqrt{a^2+4})^r - 2(a-\sqrt{a^2+4})^r}{(a+\sqrt{a^2+4})^{r+1} - (a-\sqrt{a^2+4})^{r+1}}.$$

Setzt man nun der Kürze wegen $\sqrt{a^2+4} = \sqrt{q}$, so erhält man, wenn man die Binomien entwickelt:

$$\frac{(a+\sqrt{q})^r - (a-\sqrt{q})^r}{(a+\sqrt{q})^{r+1} - (a-\sqrt{q})^{r+1}}$$

$$= \frac{2ra^{r-1}q^{\frac{1}{2}} + 2(r)_3 a^{r-3}q^{\frac{3}{2}} + 2(r)_5 a^{r-5}q^{\frac{5}{2}} + \ldots.}{2(r+1)a\,q^{\frac{1}{2}} + 2(r+1)_3 a^{r-2}q^{\frac{3}{2}} + 2(r+1)_5 a^{r-4}q^{\frac{5}{2}} + \ldots.}.$$

Da in dieser Darstellung $2q^{\frac{1}{2}}$ aus dem Zähler wegfällt, so erhält man, wenn sofort $q = a^2+4$ gesetzt wird:

1)

$$K_r(a, a, \ldots.) = \frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^r - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^r}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^{r+1} - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^{r+1}}$$

$$= \frac{2(ra^{r-1} + (r)_3 a^{r-3}(a^2+4) + (r)_5 a^{r-5}(a^2+4)^2 + \ldots.)}{(r+1)a^r + (r+1)_3 a^{r-2}(a^2+4) + (r+1)_5 a^{r-4}(a^2+4)^2 + \ldots.}.$$

Die Reihen brechen ab, wenn ein Glied in 0 übergeht.

Wie schon oben angegeben wurde, hat man:

$$\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\frac{1}{a}}}} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{-a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{-a}}}} \ldots. = K(a, -a, a, -a, \ldots.);$$

hiefür ist:

2)

$$K_r(a, -a, +a, -a\ldots.) = \frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)^r - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)^r}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)^{r+1} - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)^{r+1}};$$

und hieraus erhält man nach dem angegebenen Entwickelungsgange:

$$3) \ldots\ldots\ldots K_r(a, -a, a, -a, \ldots.)$$

$$= \frac{2(ra^{r-1} + (r)_3 a^{r-3}(a^2-4) + (r)_5 a^{r-5}(a^2-4)^2 + \ldots.)}{(r+1)a^r + (r+1)_3 a^{r-2}(a^2-4) + (r+1)_5 a^{r-5}(a^2-4)^2 + \ldots.}.$$

Aus Nro. 1) und Nro. 3) erhält man sofort mit Rücksicht auf Nro. 4) und Nro. 7) §. 1.:

$$4) \ldots \frac{a^{r-1} + (r-2)a^{r-3} + (r-3)_2 a^{r-5} + (r-4)_3 a^{r-7} \ldots.}{a^r + (r-1)a^{r-2} + (r-2)_2 a^{r-4} + (r-3)_2 a^{r-6} \ldots.}$$

$$= \frac{2(ra^{r-1} + (r)_3 a^{r-3}(a^2+4) + (r)_5 a^{r-5}(a^2+4)^2 + \ldots.)}{(r+1)a^r + (r+1)_3 a^{r-2}(a^2+4) + (r+1)_5 a^{r-4}(a^2+4)^2 + \ldots.}$$

$$= 2\frac{(a+\sqrt{a^2+4})^r - (a-\sqrt{a^2+4})^r}{(a+\sqrt{a^2+4})^{r+1} - (a-\sqrt{a^2+4})^{r+1}},$$

$$5) \quad \frac{a^{r-1} - (r-2)a^{r-3} + (r-3)_2 a^{r-5} - (r-4)_3 a^{r-7} + \ldots.}{a^r - (r-1)a^{r-2} + (r-2)_2 a^{r-4} - (r-3)_3 a^{r-6} + \ldots.}$$

$$= \frac{2(ra^{r-1} + (r)_3 a^{r-3}(a^2-4) + (r)_5 a^{r-5}(a^2-4)^2 + \ldots.}{(r+1)a^r + (r+1)_3 a^{r-2}(a^2-4) + (r+1)_5 a^{r-4}(a^2-4)^2 + \ldots.}$$

$$= 2\frac{(a+\sqrt{a^2-4})^r - (a-\sqrt{a^2-4})^r}{(a+\sqrt{a^2-4})^{r+1} - (a-\sqrt{a^2-4})^{r+1}}.$$

Man kann hiernach in Nro. 4) und Nro. 5) die eine Darstellung durch die anderen ersetzen. Man erkennt aber jetzt schon, dass die erste Form in beiden Darstellungen bei weitem die kürzere und bequemere ist; die zweite Form schreibt bei weitem mehr Geschäfte vor, und die dritte die meisten und mühevolleren. Die zweiten Formen haben den Vortheil vor den dritten, dass die Wurzelausdrücke entfernt sind.

Wendet man diese Gleichungen auf den Kettenbruch

$$K(3, 3, \ldots.) = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3\ldots.}}}$$

an, so ergibt sich für den 8ten Partialbruch direct folgender Werth aus Nro. 4) §. 1. und Nro. 1) dieses Paragraphen:

$$6) \ldots K_8(3, 3\ldots.) = \frac{3^7 + 6.3^5 + 10.3^3 + 4.3}{3^8 + 7.3^6 + 15.3^4 + 10.3^2 + 1}$$

$$= \frac{2187 + 1458 + 270 + 12}{6561 + 5103 + 1215 + 90 + 1} = \frac{3927}{12970},$$

7)

$$K_8(3, 3, \ldots) = \frac{2(8.3^7 + 56.3^5.13 + 56.3^3.13^2 + 8.3.13^3)}{9.3^8 + 84.3^6.13 + 126.3^4.13^2 + 36.3^2.13^3 + 13^4}$$

$$= \frac{2(17496 + 176904 + 255528 + 52728)}{59049 + 796068 + 1724814 + 711828 + 28561}$$

$$= \frac{1005312}{3320320} = \frac{3927}{12970}.$$

Für $K(3, -3, 3, -3\ldots) = \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 \ldots}}}$ ergibt sich aus Nro. 7) in §. 1. und Nro. 3) dieses Paragraphen:

8) $$K_8(3, -3, 3, -3\ldots) = \frac{3^7 - 6.3^5 + 10.3^3 - 4.3}{3^8 - 7.3^6 + 15.3^4 - 10.3^2 + 1}$$

$$= \frac{2187 - 1458 + 270 - 12}{6561 - 5103 + 1215 - 90 + 1} = \frac{987}{2584},$$

9) $$K_8(3, -3, \ldots) = \frac{2(8.3^7 + 56.3^5.5 + 56.3^3.5^2 + 8.3.5^3)}{9.3^8 + 84.3^6.5 + 126.3^4.5^2 + 36.3^2.5^3 + 5^4}$$

$$= \frac{2(17496 + 68040 + 37800 + 3000)}{59049 + 306180 + 255150 + 40500 + 625}$$

$$= \frac{252672}{661504} = \frac{987}{2584}.$$

Diese Darstellungen zeigen deutlich, und deswegen wurden sie etwas ausführlicher angegeben, die Vorzüge, welche die Ausdrücke in Nro. 6) und 8) vor denen in Nro. 7) und 9) haben. Der von Clausen gegebene Ausdruck ist auch nach der Umformung für die Anwendung weit unbequemer, denn er häuft eine Menge Geschäfte und grosse Zahlen zusammen, die in Nro. 6) und 8) nicht nöthig werden. Die Ausdrücke Nro. 6) und 8) geben die Zahlenwerthe in kleinster Form und haben den Vortheil, dass diese in beiden Ausdrücken wiederholt vorkommen, während die Ausdrücke in Nro. 7) und 9) verschiedene Zahlen fordern, also doppelte Arbeit veranlassen.

Die vorstehenden Ausdrücke haben ins Besondere den Vortheil, dass man den Werth eines einzelnen Partialbruches direct und unabhängig darstellen kann, während nach der gewöhnlichen Methode alle vorhergehenden Partialbrüche aufgefunden werden müssen, um einen bestimmten Partialbruch geben zu können, wobei sich ein einmal begangener Fehler durch alle spätern Pa-

lbrüche fortschleppt. Beide Methoden können zur gegenseitigen ntrole dienen. Die Partialbrüche des Kettenbruchs $K(3, 3, \ldots.)$ zum 8ten sind der Reihe nach:

$$P_1 = \frac{1}{3}, \qquad P_5 = \frac{109}{360},$$
$$P_2 = \frac{3}{10}, \qquad P_6 = \frac{360}{1189},$$
$$P_3 = \frac{10}{33}, \qquad P_7 = \frac{1189}{3927},$$
$$P_4 = \frac{33}{109}, \qquad P_8 = \frac{3927}{12970}.$$

ie des Kettenbruchs $K(3, -3. 3, -3\ldots.)$ sind:

$$P_1 = \frac{1}{3}, \qquad P_5 = \frac{55}{144},$$
$$P_2 = \frac{3}{8}, \qquad P_6 = \frac{144}{377},$$
$$P_3 = \frac{8}{21}, \qquad P_7 = \frac{377}{987},$$
$$P_4 = \frac{21}{55}, \qquad P_8 = \frac{987}{2584}.$$

Für eingliedrige periodische Kettenbrüche, deren Element eine rade Zahl ist, gehen die Ausdrücke in Nro. 1) und 3) in einchere Formen über und man erhält nach den nöthigen Reductionen:

10) $$K_r(2a, 2a; \ldots.) = \frac{(a+\sqrt{a^2+1})^r - (a-\sqrt{a^2+1})^r}{(a+\sqrt{a^2+1})^{r+1} - (a-\sqrt{a^2+1})^{r+1}}$$
$$= \frac{ra^{r-1} + (r)_3 a^{r-3}(a^2+1) + (r)_5 a^{r-5}(a^2+1)^2 + \ldots.}{(r+1)a^r + (r+1)_3 a^{r-2}(a^2+1) + (r+1)_5 a^{r-4}(a^2+1)^2 + \ldots.},$$

11)

$$K(2a, -2a, 2a, -2a\ldots.) = \frac{(a+\sqrt{a^2-1})^r - (a-\sqrt{a^2-1})^r}{(a+\sqrt{a^2-1})^{r+1} - (a-\sqrt{a^2-1})^{r+1}}$$
$$= \frac{r.a^{r-1} + (r)_3 a^{r-3}(a^2-1) + (r)_5 a^{r-5}(a^2-1)^2 + \ldots.}{(r+1)a^r + (r+1)_3 a^{r-2}(a^2-1) + (r+1)_5 a^{r-4}(a^2-1)^2 + \ldots.}.$$

## §. 3.

Besondere Brauchbarkeit zeigen die Gleichungen Nro. 4)—6) l. bei Darstellung der Zahlenwerthe der Quadratwurzeln.

Sieht man von der gewöhnlichen Methode, die Quadratwurzeln durch Kettenbrüche zu entwickeln, vorerst ab, so ist zu bemerken, dass sich die Quadratwurzeln aller Zahlen auf ein- und zweigliedrige periodische Kettenbrüche von bestimmter Form zurückführen lassen, wie ich schon in der oben angeführten Abhandlung gezeigt habe.

Jede Quadratwurzel lässt sich unter der allgemeinen Form

$$\sqrt{A} = \sqrt{m^2+p}$$

darstellen, worin $m$ die nächst niedere Quadratwurzel, $p < 2m+1$ ist und $m$ und $p$ ganze Zahlen sind. Verwandelt man nun den vorstehenden Wurzelausdruck in dieser allgemeinen Form in einen Kettenbruch, so ist:

$$\frac{\sqrt{m^2+p}}{1} = m.$$

Der Rest ist $\sqrt{m^2+p}-m$. Wird mit diesem Rest in den vorigen Divisor getheilt, so hat man:

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+p}-m} = \frac{1(\sqrt{m^2+p}+m)}{p} = \frac{2m}{p}.$$

Dieser Quotient ist das erste Element des fraglichen Kettenbruchs. Der entstehende Rest ist $\sqrt{m^2+p}-m$. Wird hiemit in den vorigen Divisor ($p$) dividirt, so entsteht:

$$\frac{p}{\sqrt{m^2+p}-m} = \frac{p(\sqrt{m^2+p}+m)}{p} = 2m.$$

Dieser Quotient ist das zweite Element des gesuchten Kettenbruchs. Setzt man dieses Verfahren fort, so kehren die gefundenen zwei Quotienten wieder. Es ist daher allgemein:

$$\sqrt{m^2+p} = m + \cfrac{1}{\cfrac{2m}{p} + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{\cfrac{2m}{p} + \cfrac{1}{2m} + \cdots}}} = m + K\left(\frac{2m}{p}, 2m; \frac{2m}{p}, 2m; \ldots\right).$$

Durch Anwendung desselben Verfahrens erhält man folgende Darstellung:

2) . . . $$\sqrt{m^2-p} = m + \cfrac{1}{\cfrac{-2m}{p} + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{\cfrac{-2m}{p} + \cfrac{1}{2m} \cdots}}}$$

$$= m + K\left(-\frac{2m}{p}, +2m; -\frac{2m}{p}, +2m; \ldots\right)$$

$$= m - K\left(\frac{2m}{p}, -2m; \frac{2m}{p}, -2m; \ldots\right).$$

Wird $\sqrt{m^2 \pm 1}$ auf dieselbe Weise behandelt, oder was dasselbe ist, wird $p=1$ gesetzt, so entsteht:

3) . . $$\sqrt{m^2+1} = m + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{2m \ldots}} = m + K(2m, 2m, 2m, \ldots),$$

4)

$$\sqrt{m^2-1} = m + \cfrac{1}{\cfrac{-2m}{2m} + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{\cfrac{-2m}{2m} + \cfrac{1}{2m}}}} = m + K(-2m, 2m, -2m, 2m \ldots)$$

$$= m - K(2m, -2m, 2m, -2m, \ldots).$$

Da in Nro. 1)—4) alle Quadratwurzeln begriffen sind, so ist die obige Behauptung gerechtfertigt, dass sich die Quadratwurzeln aller Zahlen durch ein- oder zweigliedrige periodische Kettenbrüche darstellen lassen.

Wendet man nun die Gleichungen Nro. 4)—6) §. 1. auf die Darstellungen in Nro. 1)—4) an, so zeigt sich, dass die Formen Nro. 5) und 6) §. 1. nach den gehörigen Reductionen in eine zusammenfallen und dass man nicht nöthig hat, zwischen geraden und ungeraden Partialbrüchen zu unterscheiden, und es folgt:

5)

$$\sqrt{m^2+p} = m + \frac{p\left[(2m)^{r-1} + (r-2)(2m)^{r-3}.p + (r-3)_2(2m)^{r-5}.p^2 + \ldots\right]}{(2m)^r + (r-1)(2m)^{r-2}.p + (r-2)_2(2m)^{r-4}.p^2 + \ldots},$$

6)

$$\sqrt{m^2-p} = m - \frac{p\left[(2m)^{r-1} - (r-2)(2m)^{r-3}.p + (r-3)_2(2m)^{r-5}.p^2 - \ldots\right]}{(2m)^r - (r-1)(2m)^{r-2}.p + (r-2)_2(2m)^{r-4}.p^2 - \ldots}.$$

Auf diese Gleichungen lässt sich der von Clausen gegebe Ausdruck vorerst nicht anwenden. Dagegen erhält man a Nro. 4) und 7) §. 1. und Nro. 10) und 11) §. 2.:

7)

$$\sqrt{m^2\pm 1}=m\pm\frac{(2m)^{r-1}\pm(r-2)(2m)^{r-3}+(r-3)_2(2m)^{r-5}\pm\ldots.}{(2m)^r\pm(r-1)(2m)^{r-2}+(r-2)_2(2m)^{r-4}\pm\ldots.},$$

8)

$$\sqrt{m^2\pm 1}=m\pm\frac{rm^{r-1}+(r)_3m^{r-3}(m^2\pm 1)+(r)_5m^{r-5}(m^2\pm 1)^2+\ldots.}{(r+1)m^r+(r+1)_3m^{r-2}(m^2\pm 1)+(r+1)_5m^{r-4}(m^2\pm 1)^2+.}$$

Die Gleichungen 5)—7) bieten den Vortheil, dass sie durc die gleichen Zahlenwerthe zwei correspondirende Wurzelwerth geben, was bei Nro. 8) nicht der Fall ist. Wendet man nun di vorstehenden Gleichungen, um ihre Brauchbarkeit zu zeigen, an einen besonderen Fall an, so hat man zur Darstellung von $\sqrt{27}$ und $\sqrt{23}$ $m=5$ und $p=2$ zu setzen, und man erhält, wenn $r=5$ gesetzt wird, aus Nro. 5):

9)

$$\sqrt{27}=5+\frac{2(10^4+3.10^2.2+4)}{10^5+4.10^3.2+3.10.4}=5+\frac{2651}{13515}=5{,}1961524232,$$

auf 8 Decimalstellen richtig, die 9te Zahl ist um die Einheit zu gross. Aus Nro. 6) wird:

10)

$$\sqrt{23}=5-\frac{2(10^4-3.10^2.2+4)}{10^5-4.10^3.2+3.10.4}=5-\frac{2351}{11515}=4{,}795831524,$$

auf 8 Stellen richtig. Die 9te Ziffer ist um eine Einheit zu gross. Wendet man nun die Gleichung 7) auf Darstellung von $\sqrt{26}$ und $\sqrt{24}$ an, so hat man $m=5$ zu setzen. Nimmt man dann $r=6$ an, so entsteht der 6te Partialbruch, und man erhält:

11)

$$\sqrt{26}=5+\frac{10^5+4.10^3+3.10}{10^6+5.10^4+6.10^2+1}=5+\frac{104030}{1050601}=5{,}099019513592,$$

auf 11 Stellen richtig. Die 12te Ziffer ist um die Einheit zu klein.

12)

$$\sqrt{24}=5-\frac{10^5-4.10^3+3.10}{10^6-5.10^4+6.10^2-1}=5-\frac{96030}{950599}=4{,}89897948563,$$

auf 10 Stellen richtig. Die 11te ist um 3 zu klein. Aus Nro. 8) erhält man für $r=6$:

$$13) \quad \sqrt{26} = 5 + \frac{6.5^5 + 20.5^3.26 + 6.5.26^2}{7.5^6 + 35.5^4.26 + 21.5^2.26^2 + 26^3}$$
$$= 5 + \frac{18750 + 65000 + 20280}{109375 + 568750 + 354900 + 17576}$$
$$= 5 + \frac{104030}{1050601},$$

$$14) \quad \sqrt{24} = 5 - \frac{6.5^5 + 20.5^3.24 + 6.5.24^2}{7.5^6 + 35.5^4.24 + 21.5^2.24^2 + 24^3}$$
$$= 5 - \frac{18750 + 60000 + 17280}{109375 + 525000 + 302400 + 13824}$$
$$= 5 - \frac{96030}{950599}.$$

Die Ausdrücke in Nro. 13) und 14) führen auf die gleichen Resultate wie 11) und 12), und diess bestätigt die Richtigkeit der in Nro. 8) aufgestellten Gleichungen. Die Auswerthung geschieht aber mit grösserer Mühe und auf ziemlichem Umweg.

Die Gleichungen 5)—8) haben den Vorzug vor der gewöhnlichen Methode, dass die Umwandlung der Wurzelgrösse in einen Kettenbruch, die bei jener immer nöthig wird, ganz wegfällt.

## §. 4.

Von grosser Brauchbarkeit sind die Gleichungen Nro. 10)—12) §. 1. einerseits für sich selbst, und andererseits dadurch, dass mit ihrer Hülfe die bisher aufgefundenen Darstellungen noch bequemer und convergenter gemacht werden können.

Ist nämlich die Wurzel einer bestimmten Zahl $A$ nach der gewöhnlichen Methode durch einen periodischen Kettenbruch

$$\sqrt{A} = m + K(a_1, a_2, \ldots a_n; a_1, a_2, \ldots a_n; \ldots)$$

dargestellt, so hat man nach den Erörterungen von §. 1. und §. 2. folgenden Ausdruck, je nachdem die Gliederanzahl der Periode ($n$) gerade oder ungerade ist:

$$1) \quad \sqrt{A} = m + \frac{1}{N_{n-1}}[Z_{n-1} \mp K(S, \mp S, S, \mp S, \ldots]$$
$$= m + \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} \mp \frac{2(S+\sqrt{S^2 \mp 4})^r - (S-\sqrt{S^2 \mp 4})^r}{(S+\sqrt{S^2 \mp 4})^{r+1} - (S-\sqrt{S^2 \mp 4})^{r+1}}\right].$$

Die oberen Zeichen gelten für ein gerades, die unteren für ein ungerades $n$, $m$ bedeutet die nächst niedere Wurzel von

$A$, $Z_{n-1}$, $N_{n-1}$, $N_n$, Zähler und Nenner der zwei letzten Partialbrüche des isolirten Kettenbruchs $K(a_1, a_2 \ldots a_n)$, ferner ist $S = N_n + Z_{n-1}$. Hieraus ergeben sich nun nach den bisherigen Entwickelungen folgende Darstellungen zur weitern Benutzung für einen periodischen Kettenbruch von gerader Gliederanzahl:

2)

$$\sqrt{A} = m + \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} - \frac{S^{r-1} - (r-2)S^{r-3} + (r-3)_2 S^{r-5} - \ldots}{S^r - (r-1)S^{r-2} + (r-2)_2 S^{r-4} - \ldots}\right]$$

$$= m + \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} - \frac{2(rS^{r-1} + (r)_3 S^{r-3}(S^2-4) + (r)_5 S^{r-5}(S^2-4)^2 + \ldots)}{\left\{\begin{array}{r}(r+1)S^r + (r+1)_3 S^{r-2}(S^2-4) \\ + (r+1)_5 S^{r-4}(S^2-4)^2 \ldots.\end{array}\right.}\right];$$

für einen mit ungerader Gliederanzahl:

3)

$$\sqrt{A} = m + \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} + \frac{S^{r-1} + (r-2)S^{r-3} + (r-3)_2 S^{r-5} + \ldots}{S^r + (r-1)S^{r-2} + (r-2)_2 S^{r-4} + \ldots}\right]$$

$$= m + \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} + \frac{2(rS^{r-1} + (r)_3 S^{r-3}(S^2+4) + (r)_5 S^{r-5}(S^2+4)^2 \ldots)}{\left\{\begin{array}{r}(r+1)S^r + (r+1)_3 S^{r-2}(S^2+4) \\ + (r+1)_5 S^{r-4}(S^2+4)^2 \ldots.\end{array}\right.}\right].$$

Wendet man die gewonnenen Resultate auf die Darstellung von $\sqrt{13}$ an, so hat man:

$$\sqrt{13} = 3 + K(1, 1, 1, 1, 6; 1, 1, 1, 1, 6; \ldots).$$

Hierin ist $n = 5$, $m = 3$, und aus $K(1, 1, 1, 1, 6)$ erhält man sofort $Z_4 = 3$, $N_4 = 5$, $N_5 = 33$ und $S = 36$. Es kommt daher die Gleichung Nro. 3) zur Anwendung und es ergeben sich, wenn $r = 1, 2, 3, 4$ gesetzt wird, der 9te, 14te, 19te und 24ste Partialbruch für $\sqrt{13}$:

4)

$$\sqrt{13} = 3 + \tfrac{1}{6}\left(3 + \frac{1}{36}\right) = 3 + \frac{109}{180} = 3{,}6055550,$$

$$\sqrt{13} = 3 + \tfrac{1}{6}\left(3 + \frac{36}{36^2+1}\right) = 3 + \frac{3927}{6485} = 3{,}60555124,$$

$$\sqrt{13} = 3 + \tfrac{1}{6}\left(3 + \frac{36^2+1}{36^3+2.36}\right) = 3 + \frac{141481}{233640} = 3{,}6055512754\,64;$$

$$\sqrt{13} = 3 + \tfrac{1}{6}\left(3 + \frac{36^3+2.36}{36^4+3.36^2+1}\right) = 3 + \frac{5097243}{8417525} = 3{,}6055512754639875\ldots$$

Die letzte Zahl ist wohl auf 14 bis 15 Stellen richtig. Die aus der zweiten Form in Nro. 3) fliessenden Ausdrücke sind nicht

geführt. Sie geben die gleichen Werthe. Ihre Auswerthung cht aber mehr Mühe. Für den 24sten Partialbruch ($r=4$) er- lt man:

$$\sqrt{13}=\tfrac{1}{5}[3+\frac{2(4.36^3+4.36(36^2+4))}{5.36^4+10.36^2(36^2+4)+(36^2+4)^2}]=3+\frac{5097243}{8417525}.$$

Die Partialbrüche von $\sqrt{13}$ sollen der Vergleichung wegen r stehen:

) . . . . $P_1=1$, $P_{13}=\frac{2378}{3927}$,

$P_2=\frac{1}{2}$, $P_{14}=\frac{3927}{6485}$,

$P_3=\frac{2}{3}$, $P_{15}=\frac{25940}{42837}$,

$P_4=\frac{3}{5}$, $P_{16}=\frac{29867}{49322}$,

$P_5=\frac{20}{33}$, $P_{17}=\frac{55807}{92159}$,

$P_6=\frac{23}{38}$, $P_{18}=\frac{85674}{141481}$,

$P_7=\frac{43}{71}$, $P_{19}=\frac{141481}{233640}$,

$P_8=\frac{66}{109}$, $P_{20}=\frac{934560}{1543321}$,

$P_9=\frac{109}{180}$, $P_{21}=\frac{1076041}{1776961}$,

$P_{10}=\frac{720}{1189}$, $P_{22}=\frac{2010601}{3320282}$,

$P_{11}=\frac{829}{1369}$, $P_{23}=\frac{3086642}{5097243}$,

$P_{12}=\frac{1549}{2558}$, $P_{24}=\frac{5097243}{8417525}$.

Hieraus bestätigt sich die Richtigkeit der mitgetheilten Glei- ungen. Bei Benutzung der Gleichungen von Nro. 2) und 3) wird Schrift: Canon Pellianus auct. C. F. Degen. Hafn. 1817, die periodischen Kettenbrüche von $\sqrt{2}$ bis $\sqrt{1000}$ angegeben d, gute Dienste thun.

Ganz leicht und ohne weitere Vorbereitung lassen sich die eichungen Nro. 2) und 3) auf eingliedrige periodische Ketten- liche von der Form:

$$\sqrt{A} = \sqrt{m^2+1} = m + K(2m, 2m, 2m..$$

anwenden. Es wird dann am bequemsten sein, zu
des Zeichenwechsels eine ungerade Gliederzahl
fassen. Es gelten dann für die beiden Formen in Nr
Bedingungs-Gleichungen:

6)

$$Z_{n-1} = (2m)^{n-2} + (n-3)(2m)^{n-4} + (n-4)_2(2m)^{n-}$$
$$N_{n-1} = (2m)^{n-1} + (n-2)(2m)^{n-3} + (n-3)_2(2m)^{n-}$$
$$Z_n = (2m)^n + (n-1)(2m)^{n-2} + (n-2)_2(2m)^{n-4}$$
$$S = N_n + Z_{n-1}.$$

Hierin sind für $n$ die Zahlen 3, 5, 7.... zu setzen.

Zur Darstellung von $\sqrt{2} = 1 + K(2, 2, 2, ....)$ erhäl
$n = 5$:

$$Z_4 = 2^3 + 2.2 = 12, \quad N_4 = 2^4 + 3.2^2 + 1 = 29,$$
$$N_5 = 2^5 + 4.2^3 + 3.2 = 70, \quad S = 70 + 12 = 82.$$

Durch Einführung dieser Werthe in Nro. 3) entsteht für r

7)

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{29}(12 + \frac{82}{82^2+1}) = 1 + \frac{1}{29}(12 + \frac{2.2.82}{3.82^2+1(82^2+4}$$
$$= 1 + \frac{80782}{195025} = 1{,}4142135623....,$$

auf 9 Decimalstellen richtig. Dieser Ausdruck fällt mit
14ten Partialbruche zusammen.

## §. 5.

Die in §. 3. gefundenen Resultate:

1) . . . $\sqrt{m^2 \pm p} = m \pm K(\pm \frac{2m}{p}, 2m; \pm \frac{2m}{p}, 2m; ....)$

und

2) . . . $\sqrt{m^2-1} = m - K(2m, -2m; 2m, -2m; ....)$

lassen sich auch nach dem in §. 4. angegebenen Verfahren auf
sehr kurze und bequeme Ausdrücke zurückbringen. Man kann
nämlich in diesen Darstellungen entweder 2, oder 4, oder 6 Glie-
der u. s. w. zusammenfassen und sie sofort wieder als eingliedrige
Kettenbrüche behandeln, wobei die für ein gerades $n$ geltenden

Gleichungen Nro. 2) §. 4. in Anwendung kommen. Da aber für $\sqrt{m^2+p}$ und $\sqrt{m^2-p}$ verschiedene Gesetze gelten, so hat man beide Formen zu trennen.

Die Form $\sqrt{m^2+p}$ ordnet sich unmittelbar dem in Nro. 2) §. 4. liegenden Gesetze unter, daher hat man:

3)

$$\sqrt{m^2+p} = m + \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} - \frac{S^{r-1} - (r-2)S^{r-3} + (r-3)_2 S^{r-5} - \ldots.}{S^r - (r-1)S^{r-2} + (r-2)_2 S^{r-4} - \ldots.}\right]$$

$$= m + \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} - \frac{2(rS^{r-1} + (r)_3 S^{r-3}(S^2-4) + (r)_5 S^{r-5}(S^2-4)^2 \ldots)}{\left\{\begin{array}{l}(r+1)S^r + (r+1)_3 S^{r-2}(S^2-4) \\ \qquad + (r+1)_5 S^{r-4}(S^2-4)^2 \ldots.\end{array}\right\}}\right]$$

unter folgenden Bedingungen:

4)

$$Z_{n-1} = \frac{(2m)^{n-2}}{p^{\frac{n-2}{2}}} + (n-3)\frac{(2m)^{n-4}}{p^{\frac{n-4}{2}}} + (n-4)_2\frac{(2m)^{n-6}}{p^{\frac{n-6}{2}}} + \ldots.,$$

$$N_{n-1} = \frac{(2m)^{n-1}}{p^{\frac{n}{2}}} + (n-2)\frac{(2m)^{n-3}}{p^{\frac{n-2}{2}}} + (n-3)_2\frac{(2m)^{n-4}}{p^{\frac{n-4}{2}}} + \ldots.,$$

$$N_n = \frac{(2m)^n}{p^{\frac{n}{2}}} + (n-1)\frac{(2m)^{n-2}}{p^{\frac{n-2}{2}}} + (n-2)_2\frac{(2m)^{n-4}}{p^{\frac{n-4}{2}}} + \ldots.,$$

$$S = N_n + Z_{n-1}$$

für ein gerades $n$, wie die Voraussetzung verlangt. Die Bedingungs-Gleichungen Nro. 4) ergeben sich aus Nro. 5) und 6) §. 1., wenn $a = \frac{2m}{p}$, $b = 2m$ gesetzt wird, nach den nöthigen Reductionen. Ist $p$ ein Theiler von $2m$, so fällt $p$ weg. Ist aber $p$ kein Theiler, oder nur theilweise ein Theiler, so entstehen Bruchformen, die als solche bei der Einführung beibehalten werden müssen.

Soll hiernach $\sqrt{13} = 3 + K(^6/_4, 6; ^6/_4, 6; \ldots.)$ umgeformt werden, so erhält man aus Nro. 4), wenn $n = 4$ gesetzt, also vier Glieder als eine Periode betrachtet werden:

$$Z_3 = \frac{6^2}{4} + 1 = 10, \quad N_3 = \frac{6^3}{4^2} + \frac{2.6}{4} = \frac{33}{2},$$

$$N_4 = \frac{6^4}{4^2} + \frac{3.6^2}{4} + 1 = 109 \text{ und } S = 119,$$

und man hat für $r=1$, 2 aus Nro. 3):

5)

$$\sqrt{13}=3+\frac{2}{33}(10-\frac{1}{119})=3+\frac{2378}{3927},$$

$$\sqrt{13}=3+\frac{2}{33}(10-\frac{119}{119^2-1})=3+\frac{141481}{233640}.$$

Diese Werthe fallen mit dem 13ten und 19ten Partialbruche von $\sqrt{13}$ zusammen, wie sich aus Nro. 5) §. 4. ergibt.

Man kann übrigens, wenn $p$ kein Theiler von $2m$ ist, $p$ auf folgende Art entfernen. Aus Nro. 4) ist:

5)

$$Z_{n-1}=\frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}[(2m)^{n-2}p+(n-3)(2m)^{n-4}.p^2+(n-4)_2(2m)^{n-6}p^3+\ldots]$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}Z_{n-1}',$$

$$N_{n-1}=\frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}[(2m)^{n-1}+(n-2)(2m)^{n-3}.p+(n-3)_2(2m)^{n-5}.p^2+\ldots]$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}N_{n-1}',$$

$$N_n=\frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}[(2m)^n+(n-1)(2m)^{n-2}.p+(n-2)_2(2m)^{n-4}.p^2+\ldots]=\frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}N_n',$$

$$S=N_n+Z_{n-1}=\frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}(N_n'+Z_{n-1}')=\frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}S_1.$$

Werden diese Werthe in die erste Form Nro. 2) §. 4. eingeführt, so entsteht:

6) . . . $\sqrt{A}=\sqrt{m^2+p}=m+\frac{p^{\frac{n}{2}}}{N_{n-1}'}\left[\frac{Z_{n-1}'}{p^{\frac{n}{2}}}-\frac{P}{Q}\right]$.

Hier hat $P$ folgende Form:

$$P=\left(\frac{S_1}{p^{\frac{1}{2}n}}\right)^{r-1}-(r-2)\left(\frac{S_1}{p^{\frac{1}{2}n}}\right)^{r-3}+(r-3)_2\left(\frac{S_1}{p^{\frac{1}{2}n}}\right)^{r-5}-\ldots.$$

$$=\frac{p^{\frac{1}{2}n}}{p^{\frac{1}{2}rn}}(S_1{}^{r-1}-(r-2)S_1{}^{r-3}.p^n+(r-3)_2S_1{}^{r-5}.p^{2n}\ldots.)=\frac{p^{\frac{1}{2}n}}{p^{\frac{1}{2}rn}}.$$

wenn die Potenzen von $p$ geordnet und die gemeinschaftlichen Factoren ausgeschieden werden. Für $Q$ entsteht auf gleiche Weise:

$$Q = \frac{1}{p^{\frac{1}{2}n}}(S_1{}^r - (r-1)\,S_1{}^{r-2}.p^n + (r-2)_2\,S_1{}^{r-4}.p^{2n} - \ldots.) = \frac{1}{p^{\frac{1}{2}rn}}Q'.$$

Werden diese Werthe in Nro. 6) eingeführt, so ergibt sich:

$$\sqrt{A} = m + \frac{p^{\frac{1}{2}n}}{N_{n-1}'}\left[\frac{Z_{n-1}'}{p^{\frac{1}{2}n}} - \frac{p^{\frac{1}{2}n}.P'}{Q'}\right] = m + \frac{1}{N_{n-1}'}\left[Z_{n-1}' - \frac{p^n P'}{Q'}\right].$$

Schreibt man nun statt $P'$ und $Q'$ die durch sie angezeigten Werthe ein, ebenso die aus Nro. 5) für $N_{n-1}'$, $Z_{n-1}'$, $N_n'$ und $S_1$ geltenden, so erhält man dann folgenden sehr bequemen Ausdruck, da man die Striche weglassen kann,

7) . . . . . $\sqrt{A} = m$

$$+ \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} - \frac{p^n(S^{r-1} - (r-2)\,S^{r-3}.p^n + (r-3)_2\,S^{r-5}.p^{2n}\ldots.)}{S^r - (r-1)\,S^{r-2}.p^n + (r-2)_2\,S^{r-4}.p^{2n}\ldots.}\right]$$

unter folgenden Bedingungen:

8)

$$Z_{n-1} = p\,[(2m)^{n-2} + (n-3)\,(2m)^{n-4}.p + (n-4)_2\,(2m)^{n-6}.p^2\ldots.],$$

$$N_{n-1} = (2m)^{n-1} + (n-2)\,(2m)^{n-3}.p + (n-3)_2\,(2m)^{n-5}.p^2\ldots.$$

$$N_n = (2m)^n + (n-1)\,(2m)^{n-2}.p + (n-2)_2\,(2m)^{n-4}.p^2 + \ldots.$$

$$S = N_n + Z_{n-1}$$

bei geradem $n$. Dieser Ausdruck bringt jeden Kettenbruch auf zwei Glieder zurück und gibt den Werth der fraglichen Partialbrüche in jeder beliebigen Genauigkeit.

Das ganz gleiche Verfahren ist bei der Umwandlung der zweiten Form in Nro. 2) §. 4. anzuwenden, wobei jedoch die die späteren Glieder begleitenden Ausdrücke:

$$\left(\frac{S_1}{p^{\frac{1}{2}n}}\right)^2 - 4, \quad \left[\left(\frac{S_1}{p^{\frac{1}{2}n}}\right)^2 - 4\right]^2, \ldots.$$

zu berücksichtigen sind, die in folgende übergehen:

$$\frac{S_1{}^2 - 4p^n}{p^{\frac{1}{2}2n}}, \quad \frac{(S_1{}^2 - 4p^n)^2}{p^{\frac{1}{2}4n}}, \ldots.$$

Setzt man sofort diese Werthe ein und macht die weiter nöthigen Reductionen, so erhält man aus Nro. 2. §. 4):

9) . . . . . $\sqrt{A} = m$

$$+\frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1}-\frac{2.p^n(rS^{r-1}+(r)_3S^{r-3}(S-4p^n)+(r)_5S^{r-5}(S^2-4p^n)^2\ldots)}{\left\{\begin{array}{r}(r+1)S^r+(r+1)_3S^{r-2}(S^2-4p^n)\\ +(r+1)_5S^{r-4}(S^2-4p^n)^2\ldots.\end{array}\right\}}\right]$$

unter den in Nro. 8) angegebenen Bedingungen.

Wendet man, um die Brauchbarkeit dieser Gleichungen zu zeigen, sie auf Darstellung von $\sqrt{28}$ an, so hat man $m=5$, $p=3$ zu setzen. Nimmt man dann $n=4$ und $r=1$ an, so ist aus Nro. 8) $Z_3=309$, $N_3=1060$, $N_4=10909$ und $S=11218$ und man erhält:

$$\sqrt{28}=5+\frac{1}{1060}(309-\frac{81}{11218})=5+\frac{3466281}{11891080}=5{,}29150262213,$$

auf 10 Decimalstellen richtig. Die 11te ist um die Einheit zu gross.

## §. 6.

Um die Gleichungen Nro. 2) §. 4. auf die Ausdrücke

$$1) \ldots \sqrt{m^2-p}=m+K(-\frac{2m}{p},\ 2m;\ -\frac{2m}{p},\ 2m;\ldots.)$$
$$=m-K\left(\frac{2m}{p},\ -2m;\ \frac{2m}{p},\ -2m;\ldots.\right)$$

anwenden zu können, hat man den Einfluss, welchen die Zeichen auf Zähler und Nenner der einzelnen Partialbrüche üben, anzugeben. Man kann hiebei die entwickelte Darstellung der Partialbrüche eines Kettenbruches $K(a_1, a_2, \ldots. a_n)$:

$$P_1=\frac{1}{a_1},$$
$$P_2=\frac{a_2}{a_1a_2+1},$$
$$P_3=\frac{a_2a_3+1}{a_1a_2a_3+a_1+a_3},$$
$$P_4=\frac{a_2a_3a_4+a_2+a_4}{a_1a_2a_3a_4+a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4+1}$$

u. s. w. zu Grunde legen und dann die Zeichen einführen, oder man kann die Gleichungen Nro. 5) und 6) §. 1. hiefür benutzen. Für die Partialbrüche des Kettenbruches $K(-\frac{2m}{p},\ 2m;\ -\frac{2m}{p},\ 2m;\ldots)$ ergeben sich folgende Formen:

$$P_{2n-1}=\frac{+Z_{2n-1}}{-N_{2n-1}} \text{ und } P_{2n}=\frac{+Z_{2n}}{-N_{2n}}$$

wenn $n$ ungerade ist und

$$P_{2n-1}=\frac{-Z_{2n-1}}{+N_{2n-1}} \text{ und } P_{2n}=\frac{-Z_{2n}}{+N_{2n}}$$

wenn $n$ gerade ist. Für die Partialbrüche des Kettenbruchs $K\left(\frac{2m}{p}, -2m; \frac{2m}{p}, -2m; \ldots\right)$ entsteht

$$P_{2n-1}=\frac{+Z_{2n-1}}{+N_{2n-1}} \text{ und } P_{2n}=\frac{-Z_{2n}}{-N_{2n}}$$

wenn $n$ ungerade ist und

$$P_{2n-1}=\frac{-Z_{2n-1}}{-N_{2n-1}} \text{ und } P_{2n}=\frac{+Z_{2n}}{+N_{2n}}$$

wenn $n$ gerade ist. In beiden Fällen ergibt sich für die Zeichen der Zähler und Nenner ein Cyclus von vier Formen und zwar für den ersten Kettenbruch in folgender Weise:

$$+, \; +, \; -, \; -,$$
$$-, \; -, \; +, \; +,$$

für den zweiten in folgender:

$$+, \; -, \; -, \; +,$$
$$+, \; -, \; -, \; +.$$

Hieraus entnimmt sich folgende Bemerkung:

2) der Nenner eines geraden und der Zähler des unmittelbar vorhergehenden ungeraden Partialbruches haben ungleiche Zeichen, und es ist $\mp N_n \pm Z_{n-1}$ für ein gerades $n$, wo gleichzeitig die obern oder untern Zeichen gelten.

Die Gleichungen Nro. 2) §. 4. gelten unter der Voraussetzung, dass beide Werthe $N_n$ und $Z_{n-1}$ das positive Zeichen führen. Bei ihrer Anwendung auf die Kettenbrüche Nro. 1) muss die in Nro. 2) gemachte Bemerkung in den Calcul aufgenommen werden. Man erhält daher, wenn man die drei Grössen $N_n$, $N_{n-1}$, $Z_{n-1}$ mit den zugehörigen Zeichen einführt:

$$\sqrt{m^2-p}=m-\frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1}+\frac{P}{Q}\right],$$

worin

$P=(N_n-Z_{n-1})^{r-1}-(r-2)(N_n-Z_{n-1})^{r-3}+(r-3)_2(N_n-Z_{n-1})^{r-5}-..$

$Q=(N_n-Z_{n-1})^{r}-(r-1)(N_n-Z_{n-1})^{r-2}+(r-2)_2(N_n-Z_{n-1})^{r-4}-..$

bedeutet. Schreibt man nun der Kürze wegen $N_n - Z_{n-1} = l$ so ergeben sich aus Nro. 2) §. 4. folgende Gleichungen:

3)

$$\sqrt{m^2-p}=m-\frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1}+\frac{D^{r-1}-(r-2)D^{r-3}+(r-3)_2D^{r-5}-...}{D^r-(r-1)D^{r-2}+(r-2)_2D^{r-4}-...}\right.$$

$$\left.=m-\frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1}+\frac{2(rD^{r-1}+(r)_3D^{r-3}(D^2-4)+....)}{(r+1)D^r+(r+1)_3D^{r-2}(D^2-4)+....}\right]\right.$$

unter folgenden Bedingungen:

4)

$$Z_{n-1}=\frac{(2m)^{n-2}}{p^{\frac{1}{2}(n-2)}}-(n-3)\frac{(2m)^{n-4}}{p^{\frac{1}{2}(n-4)}}+(n-4)_2\frac{(2m)^{n-6}}{p^{\frac{1}{2}(n-6)}}-\ldots,$$

$$N_{n-1}=\frac{(2m)^{n-1}}{p^{\frac{1}{2}n}}-(n-2)\frac{(2m)^{n-3}}{p^{\frac{1}{2}(n-2)}}+(n-3)_2\frac{(2m)^{n-5}}{p^{\frac{1}{2}(n-4)}}-\ldots.$$

$$N_n=\frac{(2m)^n}{p^{\frac{1}{2}n}}-(n-1)\frac{(2m)^{n-2}}{p^{\frac{1}{2}(n-2)}}+(n-2)_2\frac{(2m)^{n-4}}{p^{\frac{1}{2}(n-4)}}-\ldots,$$

$$D=N_n-Z_{n-1}.$$

Durch Ausscheidung der $p$ formen sich diese Gleichungen nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren in folgende um:

5)

$$\sqrt{m^2-p}=m-\frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1}+\frac{p^n(D^{r-1}-(r-2)D^{r-3}.p^n+....)}{D^r-(r-1)D^{r-2}.p^n+(r-2)_2D^{r-4}.p^{2n}....}\right]$$

$$=m-\frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1}+\frac{2p^n(rD^{r-1}+(r)_3D^{r-3}(D^2-4p^n)+....)}{(r+1)D^r+(r+1)_3D^{r-2}(D^2-4p^n)+....}\right]$$

unter folgenden Bedingungen:

6)

$$Z_{n-1}=(2m)^{n-2}.p-(n-3)(2m)^{n-4}.p^2+(n-4)_2(2m)^{n-6}.p^3-...,$$

$$N_{n-1}=(2m)^{n-1}-(n-2)(2m)^{n-3}.p+(n-3)_2(2m)^{n-5}.p^2-....,$$

$$N_n=(2m)^n-(n-1)(2m)^{n-2}.p+(n-2)_2(2m)^{n-4}.p^2-....,$$

$$D=N_n-Z_{n-1}.$$

Aus beiden folgt:

7)

$$\sqrt{m^2-1} = m - \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} + \frac{D^{r-1} - (r-2)\,D^{r-3} + (r-3)_2\,D^{r-5} - \ldots}{D^r - (r-1)\,D^{r-2} + (r-2)_2\,D^{r-4} - \ldots}\right]$$

$$= m - \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} + \frac{2(rD^{r-1} + (r)_3\,D^{r-3}(D^2-4) + \ldots)}{(r+1)\,D^r + (r+1)_3\,D^{r-2}(D^2-4) + \ldots}\right]$$

unter folgenden Bedingungen:

8)

$$Z_{n-1} = (2m)^{n-2} - (n-3)\,(2m)^{n-4} + (n-4)_2\,(2m)^{n-6} - \ldots,$$

$$N_{n-1} = (2m)^{n-1} - (n-2)\,(2m)^{n-3} + (n-3)_2\,(2m)^{n-5} - \ldots,$$

$$N_n = (2m)^n - (n-1)\,(2m)^{n-2} + (n-2)_2\,(2m)^{n-4} - \ldots,$$

$$D = N_n - Z_{n-1}.$$

In Nro. 3)—8) bedeutet $n$ eine gerade Zahl, die nach Belieben gewählt werden kann, und wodurch die Kürze des sich ergebenden Ausdrucks und dessen Genauigkeit bestimmt wird.

Will man die Partialbrüche für den Kettenbruch

$$\sqrt{m^2-p} = m - K\left(\frac{2m}{p}, -2m; \frac{2m}{p}, -2m; \ldots\right)$$

nach der gewöhnlichen zurücklaufenden Methode bilden, so gilt folgendes Ableitungsgesetz:

9) . . . . . $P_n = \dfrac{Z_{n-1}\,a_n - Z_{n-2}}{N_{n-1}\,a_n - N_{n-2}}$,

worin $a_n$ das Element bezeichnet, welches zu dem Partialbruch $P_n$ gehört.

Um die Brauchbarkeit dieser Gleichungen zu zeigen, sollen einige Anwendungen hier stehen. Zur Darstellung von $\sqrt{23} = \sqrt{25-2}$ hat man $m=5$, und $p=2$. Setzt man nun $n=4$, $r=1$, so entsteht aus Nro. 6) $Z_3 = 196$, $N_3 = 960$, $N_4 = 9404$, $D = 9208$ und hieraus durch Einführung in Nro. 5):

$$\sqrt{23} = 5 - \frac{1}{960}\left(196 + \frac{16}{9208}\right) = 4 + \frac{439681}{552480} = 4{,}795831523312881,$$

auf wenigstens 13 Stellen richtig, womit §. 3. zu vergleichen ist.

Für $\sqrt{22}$ ist $m=5$, $p=3$ und man erhält aus denselben Gleichungen für $n=4$ und $r=1$, $Z_3 = 291$, $N_3 = 940$, $N_4 = 9109$, $D = 8818$:

$$\sqrt{22} = 5 - \frac{1}{940}\left(291 + \frac{81}{8818}\right) = 4 + \frac{5722801}{8288920} = 4{,}69041575983,$$

auf 10 Stellen richtig.

Behandelt man gleichzeitig zwei correspondirende Wurzeln $\sqrt{m^2 \pm 1}$, so vereinfacht sich die Arbeit, denn man kann aus denselben Zahlen die erforderlichen Werthe für $Z_{n-1}$, $N_{n-1}$, $N_n$, $S$ und $D$ ableiten. So erhält man für $\sqrt{5}$ aus Nro. 7)—9) §. 5, wenn $n = 6$ und $r = 1$ gesetzt wird, $Z_5 = 305$, $N_5 = 1292$, $N_6 = 5473$ und $S = 5778$.

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{1292}\left(305 - \frac{1}{5778}\right) = 2 + \frac{1762289}{7465176} = 2{,}236067977499793,$$

auf wenigstens 13 Stellen richtig. Aus Nro. 7) und 8) dieses Paragraphen ist

$$Z_5 = 209, \quad N_5 = 780, \quad N_6 = 2911, \quad D = 2702,$$

$$\sqrt{3} = 2 - \frac{1}{780}\left(209 + \frac{1}{2702}\right) = 1 + \frac{1542841}{2107560} = 1{,}73205080756894,$$

auf wenigstens 13 Stellen richtig.

Man sieht, auf welch kurze Ausdrücke sich die Wurzelwerthe nach der angegebenen Methode zurückbringen und mit welcher Genauigkeit sie sich bestimmen lassen.

## §. 7.

In jedem periodischen Kettenbruche von der Form:

1) . . . . . $K(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n;\ a_1, a_2 \ldots a_n; \ldots)$

gehören jeder Periode so viele Partialbrüche ($n$) an, als die Periode Glieder oder Elemente hat. Es entstehen daher in jeder Periode $n$ gleich liegende oder correspondirende Partialbrüche, deren Zahl, wie die Periode selbst unendlich ist. Man hat es daher mit $n$ Arten oder Classen gleichliegender Partialbrüche zu thun, die sich auf folgende Art bezeichnen lassen:

2) . . $P_{1+(r+1)n}$, $P_{2+(r+1)n} \ldots P_{p+(r+1)n} \ldots P_{n+(r+1)n}$,

worin $r$ alle Werthe von 0, 1, 2, 3....$\infty$ durchlaufen kann.

Eine Art oder Classe dieser correspondirenden Partialbrüche, die $(n-1)$te, findet sich in den Gleichungen Nro. 9)—11) §. 1. behandelt und auf einen eingliedrigen periodischen Kettenbruch zu-

rückgebracht, woraus in §. 4)—6) mehrfache Anwendungen gemacht wurden.

Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, dass sich alle in Nro. 2) bezeichneten Classen correspondirender Partialbrüche gleichfalls auf eingliedrige periodische Kettenbrüche zurückbringen und sich sofort direct und unabhängig von den vorhergehenden darstellen lassen. Hiezu bieten die in §. 9. meiner angeführten Abhandlung aufgestellten Resultate die Mittel in folgender Weise:

Trennt man die ersten $p$ Glieder der ersten Periode von den übrigen, so theilen sich die folgenden Glieder des Kettenbruchs Nro. 1) selbst wieder in Perioden von $n$ Gliedern, jedoch in anderer Ordnung und in nachstehender Weise:

3)

$$K(a_1, a_2 \ldots a_p;\ a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots a_n, a_1, a_2 \ldots a_p;\ a_{p+1}, \ldots a_n, a_1, a_2 \ldots a_p; \ldots).$$

In beiden Darstellungen Nro. 1) und 3) nimmt jedes Element die gleiche Stelle oder den gleichen Rang ($a_n$ die $n$te) ein, wenn man vom ersten Elemente aus nach der Rechten zählt. Trennt man aber den Kettenbruch Nro. 3) in die isolirten Brüche

$$K(a_1, a_2 \ldots a_p) \text{ und } K(a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots a_n, a_1 \ldots a_p),$$

so ändert sich die Stellung oder der Rang, in welchem die Elemente unter einander erscheinen. Beide Darstellungen werden im Folgenden benutzt werden.

Für die Partialbrüche der $p$ten Classe erhält man nach dem Gesagten folgende Gleichung bei gerader Gliederanzahl ($n$):

4)

$$K(a_1, a_2 \ldots a_p;\ a_{p+1} \ldots a_n, a_1 \ldots a_p;\ a_{p+1} \ldots) = P_{p+(r+1)n}$$

$$= \frac{1}{N^1_p}\left[Z^1_p(-)^p \frac{1}{N^1_{p+1} + \frac{N^1_p}{N^{p+2}_{p+n}}(Z^{p+2}_{p+n} - \frac{M_r}{Q_r})}\right]$$

$$= \frac{1}{N^1_p}\left[Z^1_p(-)^p \frac{N^{p+2}_{p+n} Q_r}{(N^1_{p+1} N^{p+2}_{p+n} + N^1_p Z^{p+2}_{p+n}) Q_r - N^1_p M_r}\right].$$

Hierin bedeutet wie früher:

5)

$$\frac{M_r}{Q_r} = \frac{S^{r-1} - (r-2)S^{r-3} + (r-3)_2 S^{r-5} - \ldots}{S^r - (r-1)S^{r-2} + (r-2)_2 S^{r-4} - \ldots} = \frac{2(rS^{r-1} + (r)_3 S^{r-3}(S^2-4) + \ldots)}{(r+1)S^r + (r+1)_3 S^{r-2}(S^2-4) \ldots}.$$

Bei einer ungeraden Gliederanzahl (n) gilt:

6)

$$K(a_1, a_2, \ldots a_p; a_{p+1}, \ldots a_n, a_1, \ldots a_p; a_{p+1}, \ldots) = P_{p+(r+1)n}$$

$$= \frac{1}{N_p^1}\left[Z_p^1 (-)^p \frac{1}{N_{p+1}^1 + \frac{N_p^1}{N_{p+n}^{p+2}}\left(Z_{p+n}^{p+2} + \frac{U_r}{V_r}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{N_p^1}\left[Z_p^1 (-)^p \frac{N_{p+n}^{p+2} V_r}{(N_{p+1}^1 N_{p+n}^{p+2} + N_p^1 Z_{p+n}^{p+2}) V_r + N_p^1 U_r}\right].$$

Hierin bedeutet:

7) . . . $$\frac{U_r}{V_r} = \frac{S^{r-1} + (r-2) S^{r-3} + (r-3)_2 S^{r-5} + \ldots}{S^r + (r-1) S^{r-2} + (r-2)_2 S^{r-4} + \ldots}$$

$$= \frac{2(r S^{r-1} + (r)_3 S^{r-3}(S^2+4) + \ldots)}{(r+1) S^r + (r+1)_3 S^{r-2}(S^2+4) + \ldots}.$$

Zu Nro. 4)—7) gehören folgende Bedingungen:

8) . . . . . $Z_p^1$, $N_p^1$ und $N_{p+1}^1$

bezeichnen Zähler und Nenner der Partialbrüche aus den oben und unten angeschriebenen Anfangs- und Schluss-Elementen in dem Kettenbruche Nro. 1), wenn die Elemente vom ersten an nach rechts gezählt werden, oder: Zähler und Nenner des vorletzten und Nenner des letzten Partialbruchs in dem isolirten Kettenbruche $K(a_1, a_2, \ldots a_p, a_{p+1})$.

9) . . . . . $Z_{p+n}^{p+2}$, $N_{p+n}^{p+2}$, $N_{p+n+1}^{p+2}$

bezeichnen gleichfalls Zähler und Nenner der Partialbrüche aus den oben und unten angeschriebenen Anfangs- und Schluss-Elementen in Nro. 1), vom ersten Element an gerechnet, oder Zähler und Nenner des vorletzten und Nenner des letzten Partialbruchs aus dem isolirten Kettenbruche

$$K(a_{p+2}, a_{p+3}, \ldots a_n, a_1, a_2, \ldots a_p, a_{p+1}).$$

10) . . . . . $S = N_{p+n+1}^{p+2} + Z_{p+n}^{p+2}$.

Die Werthe der $Z$ und $N$ in Nro. 7)—10) sind nach der gewöhnlichen Methode zu bilden.

Die genannten Gleichungen gelten für die Ableitung der Partialbrüche aller Classen ohne Unterschied. Bei der Anwendung

auf die der zwei letzten, der $(n-1)$ten und $n$ten, sind sie jedoch nicht sehr praktisch. Daher sind die in Nro. 9)—11) §. 1. angegebenen für die Bildung der Partialbrüche der $(n-1)$ten vorzuziehen.

Das Ableitungsgesetz für die Partialbrüche der $n$ten Classe ergibt sich am einfachsten, wenn man in Nro. 4) und 6) $p=0$ setzt. Dann wird bekanntlich $Z_0^1=0$ und $N_0^1=1$ und man erhält für einen periodischen Kettenbruch mit gerader Gliederanzahl $(n)$ aus Nro. 4):

11) $\ldots K(a_1, a_2, \ldots a_n; a_1, a_2, \ldots a_n; \ldots) = P_{(r+1)n}$

$$= \frac{1}{N_1^1 + \frac{1}{N_n^2}(Z_n^2 - \frac{M_r}{Q_r})} = \frac{N_n^2 Q_r}{(N_1^1 N_n^2 + Z_n^2) Q_r - M_r};$$

für einen mit ungerader Gliederanzahl $(n)$:

12) $\ldots K(a_1, a_2, \ldots a_n; a_1, a_2, \ldots a_n; \ldots) = P_{(r+1)n}$

$$= \frac{1}{N_1^1 + \frac{1}{N_n^2}(Z_n^2 + \frac{U_r}{V_r})} = \frac{N_n^2 . V_r}{(N_1^1 . N_n^2 + Z_n^2) V_r + U_r}.$$

Für $M_r$, $Q_r$ gelten die in Nro. 5); für $U_r$, $V_r$ die in Nro. 7) angegebenen Werthe. $N_1^1$, $Z_n^2$, $N_n^2$ und $N_{n+1}^2$ sind aus dem isolirten Kettenbruche $K(a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1})$ zu bilden und es ist $S = N_{n+1}^2 + Z_n^2$.

Bei Ermittelung der Werthe der in Nro. 4)—12) angegebenen Gleichungen wird man dadurch sehr gefördert, dass man die Vorzahlen der $M$, $Q$, $U$ und $V$ nur einmal anzugeben hat, denn sie bleiben für die späteren Partialbrüche immer die gleichen, und dann dadurch, dass man folgenden nicht uninteressanten Satz aus der Lehre der Kettenbrüche zu Hülfe nimmt, der sich leicht aus der entwickelten Darstellung der Partialbrüche bestätigt.

13) Die Summe des Zählers des vorletzten und des Nenners des letzten Partialbruchs ist die gleiche, in welcher Ordnung auch die $n$ Glieder des Kettenbruchs $K(a_1, a_2, \ldots a_n)$, er mag periodisch sein oder nicht, von irgend einem Elemente an, von der Linken zur Rechten, genommen werden.

Diess drückt sich in Zeichen so aus: In den Kettenbrüchen

$K(a_1, a_2 \ldots a_n)$; $K(a_2, a_3 \ldots a_n, a_1)$; $K(a_3, a_4, \ldots a_n, a_1, a_2) \ldots$

$\ldots K(a_{p+2}, a_{p+3}, \ldots a_n, a_1, \ldots a_{p+1}) \ldots K(a_n, a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$

erzeugt der Zähler des vorletzten und der Nenner de letzten Partialbruches immer die gleiche Summe. Es ist dah in Beziehung auf Nro. 1):

$$N_n^1 + Z_{n-1}^1 = N_{n+1}^2 + Z_n^2 = \ldots. N_{p+n+1}^{p+2} + Z_{p+n}^{p+2} = \ldots. = S.$$

Die Bedingungsgleichung in Nro. 10) lässt sich daher auc so angeben:

14) . . . . $S = N_{p+n+1}^{p+2} + Z_{p+n}^{p+2} = N_n^1 + Z_{n-1}^1.$

Man hat daher den Werth für $S$ nur einmal aus den $n$ Gli dern der ersten Periode zu bilden. Der so gefundene Werth gi für alle übrigen Classen der Partialbrüche. Dasselbe gilt vo den Werthen der $M$, $Q$, $U$ und $V$, denn sie bleiben in alle Classen die gleichen. Bei der Anwendung des Symbols $P_{p+(r+1)}$ kann $n$ auch 0 in Nro. 4) und 6) bedeuten, wodurch der $p$te Pa tialbruch der ersten Periode ($P_p$) bezeichnet wird.

## §. 8.

Wir machen nun, um die Brauchbarkeit der in §. 7. gefunde nen Gleichungen zu zeigen, eine Anwendung, und wählen hiezu die Bildung der Partialbrüche von $\sqrt{13}$, die oben §. 4. Nro. 5) ag gegeben sind, und somit zur Vergleichung dienen. Man hat:

1) . . . $\sqrt{13} = 3 + K(1, 1, 1, 1, 6; 1, 1, 1, 1, 6; \ldots.).$

Die Gliederanzahl der Periode ist ungerade. Daher kommt Nro. 6) und 7) §. 7. zur Anwendung. Aus Nro. 5) §. 4. ist

$$S = N_5^1 + Z_4^1 = 33 + 3 = 36.$$

Wird nun $r = 0, 1, 2, 3, \ldots.$ in Nro. 7) §. 7. gesetzt, so erhält man:

$$\frac{U_0}{V_0} = \frac{0}{1}; \quad \frac{U_1}{V_1} = \frac{1}{36}; \quad \frac{U_2}{V_2} = \frac{36}{36^2+1} = \frac{36}{1297}; \quad \frac{U_3}{V_3} = \frac{36^2+1}{36^3+2.36} = \frac{1297}{46728}$$

Ist nun $p = 1$, so erhält man für die Partialbrüche der ersten Classe:

$$K(1; 1, 1, 1, 6, 1; 1, 1, 1, 6, 1; \ldots.).$$

$Z_1^1 = 1$, $N_1^1 = 1$, $N_2^1 = 2$; $N_6^3 = 15$, $Z_6^3 = 8$, und hieraus durch Einführung in Nro. 6) §. 7.:

2) . . . . $P_1 = \frac{1}{1}$,

$$P_6 = 1 - \frac{15.1}{2.15 + 1.8} = 1 - \frac{15}{38} = \frac{23}{38},$$

$$P_{11} = 1 - \frac{15.36}{38.36 + 1.1} = \frac{629}{1369},$$

$$P_{16} = 1 - \frac{15.1297}{38.1297 + 1.36} = \frac{29867}{49322},$$

$$P_{21} = 1 - \frac{15.46728}{38.46728 + 1.1297} = \frac{1076041}{1776961}.$$

Für die zweite Classe $p = 2$ wird:

$$K(1, 1; 1, 1, 6, 1, 1; 1, 1, 6, 1, 1; \ldots.),$$

und hieraus $Z_2^1 = 1$, $N_2^1 = 2$, $N_3^1 = 3$, $Z_7^4 = 13$, $N_7^4 = 15$. Durch Einführung entsteht:

3) . . . $P_2 = \frac{1}{2}$,

$$P_7 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{15.1}{3.15 + 2.13}\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{15}{71}\right) = \frac{43}{71},$$

$$P_{12} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{15.36}{71.36 + 2}\right) = \frac{1549}{2558},$$

$$P_{17} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{15.1297}{71.1297 + 2.36}\right) = \frac{55807}{92159},$$

$$P_{22} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{15.46728}{71.46728 + 2.1297}\right) = \frac{2010601}{3320282}.$$

Für die dritte Classe $p = 3$ wird:

$$K(1, 1, 1; 1, 6, 1, 1, 1; 1, 6, 1, 1, 1; \ldots.),$$

und hieraus $Z_3^1 = 2$, $N_3^1 = 3$, $N_4^1 = 5$, $Z_8^5 = 3$, $N_8^5 = 20$. Durch Einführung in Nro. 6) §. 7. entsteht:

4) . . . $P_3 = \frac{2}{3}$,

$$P_8 = \tfrac{1}{2}\left(2 - \frac{20}{5.20 + 3.3}\right) = \tfrac{1}{2}\left(2 - \frac{20}{109}\right) = \frac{66}{109},$$

$$P_{13} = \tfrac{1}{2}\left(2 - \frac{20.36}{109.36 + 3.1}\right) = \frac{2378}{3927},$$

$$P_{18} = \tfrac{1}{2}\left(2 - \frac{20.1297}{109.1297 + 3.36}\right) = \frac{58674}{141481},$$

$$P_{23} = \tfrac{1}{2}\left(2 - \frac{20.46728}{109.46728 + 3.1297}\right) = \frac{3086642}{5097243}.$$

Die Partialbrüche der vierten Classe sind in Nro. 4) §. 4. angegeben.

Zur Bestimmung der Partialbrüche der 5ten Classe kommt Nro. 12) §. 7. zur Anwendung. Hiefür ist $N_1^1 = 1$, $Z_5^2 = 13$, $N_5^2 = 20$, und man erhält durch Einführung für

$$K(1, 1, 1, 1, 6; 1, 1, 1, 1, 6; \ldots):$$

5) . . . . . $P_5 = \frac{20}{1.20+13} = \frac{20}{33}$,

$$P_{10} = \frac{20.36}{33.36+1} = \frac{720}{1189},$$

$$P_{15} = \frac{20.1297}{33.1297+1.36} = \frac{25940}{42837},$$

$$P_{20} = \frac{20.46728}{33.46728+1.1297} = \frac{934560}{1543321}.$$

Ein zweites Beispiel sei:

6) . . $\sqrt{21} = 4 + K(1, 1, 2, 1, 1, 8; 1, 1, 2, 1, 1, 8; \ldots.)$,

worin eine Periode mit gerader Gliederanzahl vorkommt und für Nro. 4) und 5) §. 7. zur Anwendung kommt. Für die erste Classe $p = 1$ ist:

$$K(1; 1, 2, 1, 1, 8, 1; 1, 2, 1, 1, 8, 1; \ldots.)$$

und

$$Z_1^1 = 1, \quad N_1^1 = 1, \quad N_2^1 = 2, \quad Z_7^4 = 19, \quad N_7^3 = 48, \quad N_8^3 = 91$$

$$S = N_8^3 + Z_7^3 = 91 + 19 = N_6^4 + Z_5^4 = 103 + 7 = 110.$$

Aus Nro. 5) §. 7. entsteht:

$$\frac{M_0}{Q_0} = \frac{0}{1}, \quad \frac{M_1}{Q_1} = \frac{1}{110}, \quad \frac{M_2}{Q_2} = \frac{110}{110^2-1} = \frac{110}{12099}, \quad \frac{M_3}{Q_3} = \frac{110^2-1}{110^3-2.110} = \frac{120}{1330}$$

und man erhält durch Einführung:

7) . . . . $P_1 = \frac{1}{1}$,

$$P_7 = 1 - \frac{48.1}{2.48+1.19} = 1 - \frac{48}{115} = \frac{67}{115},$$

$$P_{13} = 1 - \frac{48.110}{115.110-1.1} = \frac{7369}{12649},$$

$$P_{19} = 1 - \frac{48.12099}{115.12099-1.110} = \frac{810523}{1391275}.$$

Für die zweite Classe

$$K(1, 1; 2, 1, 1, 8, 1, 1; 2, 1, 1, 8, 1, 1; \ldots.)$$

hat man $Z_2^1 = 1, \quad N_2^1 = 2, \quad N_3^1 = 5, \quad Z_8^4 = 19, \quad N_8^4 = 36$

hieraus durch Einführung:

8) . . . $P_2 = \frac{1}{2}$,

$$P_6 = \tfrac{1}{2}(1+\frac{36.1}{5.36+2.19}) = \tfrac{1}{2}(1+\frac{36}{218}) = \frac{127}{218},$$

$$P_{14} = \tfrac{1}{2}(1+\frac{36.110}{218.110-2.1}) = \frac{13969}{23978},$$

$$P_{20} = \tfrac{1}{2}(1+\frac{36.12099}{218.12099-2.110}) = \frac{1536463}{2637362}.$$

Für die dritte Classe

$$K(1, 1, 2;\ 1, 1, 8, 1, 1, 2;\ 1, 1, 8, 1, 1, 2; \ldots.)$$

ist $Z_3^1 = 3$, $N_3^1 = 5$, $N_4^1 = 7$, $Z_9^5 = 43$, $N_9^5 = 48$ und es entsteht:

9) . . . $P_3 = \frac{2}{5}$,

$$P_9 = \tfrac{1}{5}(3-\frac{48.1}{7.48+5.43}) = \tfrac{1}{5}(3-\frac{48}{551}) = \frac{321}{551},$$

$$P_{15} = \tfrac{1}{5}(3-\frac{48.110}{551.110-5}) = \frac{35307}{60605},$$

$$P_{21} = \tfrac{1}{5}(3-\frac{48.12099}{551.12099-5.110}) = \frac{3883449}{6665999}.$$

Für die vierte Classe

$$K(1, 1, 2, 1;\ 1, 8, 1, 1, 2, 1;\ 1, 8, 1, 1, 2, 1; \ldots.)$$

ist $Z_4^1 = 4$, $N_4^1 = 7$, $N_5^1 = 12$, $Z_{10}^6 = 7$, $N_{10}^6 = 60$ und hieraus:

10) . . $P_4 = \frac{4}{7}$,

$$P_{10} = \tfrac{1}{7}(4+\frac{60.1}{12.60+7.7}) = \tfrac{1}{7}(4+\frac{60}{769}) = \frac{448}{769},$$

$$P_{16} = \tfrac{1}{7}(4+\frac{60.110}{769.110-7.1}) = \frac{49276}{84583},$$

$$P_{22} = \tfrac{1}{7}(4+\frac{60.12099}{769.12099-7.110}) = \frac{5419912}{9303361}.$$

Für die fünfte Classe

$$K(1, 1, 2, 1, 1;\ 8, 1, 1, 2, 1, 1;\ 8, 1, 1, 2, 1, 1; \ldots.)$$

hat man aus Nro. 10) §. 1. $Z_5^1 = 7$, $N_5^1 = 12$, $N_6^1 = 103$ und $S = 103 + 7 = 110$, und hieraus durch Einführung:

11) . . . . $P_5 = \frac{5}{12}$,

$$P_{11} = \tfrac{1}{12}(7-\frac{1}{110}) = \frac{769}{1320},$$

$$P_{17} = \tfrac{1}{12}(7 - \frac{110}{12099}) = \frac{84583}{145188},$$

$$P_{23} = \tfrac{1}{12}(7 - \frac{12099}{1330780}) = \frac{9303361}{15969360}.$$

Für die sechste Classe

$$K(1, 1, 2, 1, 1, 8;\ 1, 1, 2, 1, 1, 8; \ldots.)$$

ist aus Nro. 11) §. 7. $N_1^4 = 1$, $Z_6^2 = 43$, $N_6^2 = 60$.

12) . . . $P_6 = \frac{60}{1.60 + 43} = \frac{60}{103}$,

$$P_{12} = \frac{60.110}{103.110 - 1} = \frac{6600}{13329},$$

$$P_{18} = \frac{60.12099}{103.12099 - 110} = \frac{725940}{1246087},$$

$$P_{24} = \frac{60.1330780}{103.1330780 - 12099} = \frac{79846800}{137058241}.$$

Von der Richtigkeit der hier aufgefundenen Partialbrüche kann man sich überzeugen, wenn man sich die Mühe gibt, nach der gewöhnlichen zurücklaufenden Methode die 24 ersten Partialbrüche zu bilden. Es zeigt sich aber aus den angegebenen Resultaten die Brauchbarkeit dieser Gleichungen.

Die Gleichungen des §. 7. sind nicht in der Absicht mitgetheilt, um sie zur Auswerthung der Wurzeln zu empfehlen. Hiefür ist ihre Convergenz nicht rasch genug. Die Partialbrüche der ersten Periode geben nur wenige Decimalstellen und man muss auf spätere Brüche zurückgreifen, um eine grössere Genauigkeit zu erhalten. Will man sie dennoch zu diesem Zwecke benutzen, so wird es am besten sein, hiezu die Gleichungen der letzten oder vorletzten Classe, also Nro. 2) und 3) §. 4. und Nro. 11) und 12) §. 7. zu wählen, da sie hiezu am bequemsten sind. In allen diesen Fällen werden die Gleichungen von §. 5. und 6. viel bessere Dienste leisten, da sie die geringste Vorarbeit bedürfen.

Der Grund, warum die Gleichungen des §. 7. mitgetheilt sind, liegt in der grossen Brauchbarkeit, welche sie in der Anwendung auf die Zahlenlehre und unbestimmte Analytik haben, denn sie lösen dort auf eine ganz einfache und bequeme Weise Probleme, die auf anderem Wege nur mit vieler Mühe gelöst werden. Sie verdienen dort besondere Beachtung. Auf diesen Gegenstand gedenke ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen.

Um aber den Vorzug, welchen die Gleichungen der §§. 5. und 6. vor denen des §. 7. bei der Auswerthung der Wurzeln haben, zu zeigen, wird ein Fall genügen. Wendet man die Gleichung Nro. 3) §. 6. u. ff. auf die Berechnung von $\sqrt{21} = \sqrt{25-4}$ an und setzt $n = 6$, $r = 1$, so wird:

$$Z_5 = 551, \quad N_5 = 1320, \quad N_6 = 12649 \text{ und } D = 12098$$

und hieraus:

13) . . . $\sqrt{21} = 5 - \frac{1}{1320}(551 + \frac{1}{12098}) = 5 - \frac{6665999}{15969360}$

$$= 4 + \frac{9303361}{15969360} = 4{,}582\,575\,694\,955\,840....$$

auf 13 Stellen wenigstens richtig. Dieser Werth fällt nach Nro. 11) mit dem 23sten Partialbruche von $\sqrt{21}$ zusammen.

## §. 9.

Schliesslich soll noch ein Schema hier stehen, welches zeigt, wie auf sehr einfache und bequeme und zugleich gegen Unrichtigkeiten schützende Weise die periodischen Kettenbrüche für Wurzelgrössen:

1) . . $\sqrt{A} = m + K(a_1, a_2, \ldots a_n; a_1, a_2, \ldots a_n; \ldots)$,

worin $m$ die nächst niedere Wurzel von $A$ bedeutet, gefunden werden können. Es beruht darauf, dass die einzelnen Glieder oder Elemente eines Kettenbruchs durch Division des erhaltenen Restes in den vorigen Divisor dargestellt werden und dass damit die Wegschaffung des Wurzelzeichens verbunden wird. Bezeichnet man der Reihe nach die hiebei entstehenden Divisoren durch $d_1, d_2, d_3, \ldots$, die hieraus sich ableitenden Quotienten oder Elemente durch $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, die zugehörigen Reste durch $r_1, r_2, r_3, \ldots$, so ergibt sich folgendes Schema:

| 2) | | | |
|---|---|---|---|
| | $A - m^2 = d_1$ | $\frac{\sqrt{A}+m}{d_1} = a_1$ | $d_1 . a_1 - m = r_1$ |
| | $\frac{A - r_1^2}{d_1} = d_2$ | $\frac{\sqrt{A}+r_1}{d_2} = a_2$ | $d_2 . a_2 - r_1 = r_2$ |
| | $\frac{A - r_2^2}{d_2} = d_3$ | $\frac{\sqrt{A}+r_2}{d_3} = a_3$ | $d_3 . a_3 - r_2 = r_3$ |
| | $\frac{A - r_3^2}{d_3} = d_4$ | $\frac{\sqrt{A}+r_3}{d_4} = a_4$ | $d_4 . a_4 - r_3 = r_4$ |
| | $\frac{A - r_4^2}{d_4} = d_5$ | $\frac{\sqrt{A}+r_4}{d_5} = a_5$ | $d_5 . a_5 - r_4 = r_5$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . |

Man hat nach Angabe dieses Schema's die Horizontalreihen der drei Colonnen von der Linken zur Rechten zu durchlaufen, von der ersten zur zweiten, von dieser zur dritten überzugehen u. s. w., wodurch der Reihe nach die Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gefunden werden. Erscheint $2m$ als Quotient, so ist die Periode geschlossen und die Glieder erscheinen von da an in der gleichen Reihenfolge. Der Werth von irgend einem Gliede der mittleren Colonne $\sqrt{A} + r_p$ liegt zwischen den zwei ganzen Zahlen $m + r_p$ und $m + r_p + 1$, da $\sqrt{A} > m$ und $< m + 1$ ist.

Bemerkt man, dass aus diesem Grunde der Kettenbruch nie abbrechen kann, wenn auch der Divisor in den ganzen Zahlen des Dividenden ohne Rest theilbar ist und dass bei Bildung der Quotienten in der zweiten Colonne immer nur die ganzen Zahlen im Zähler bei der Division maassgebend sind, so kann man das vorstehende Schema noch einfacher in folgender Weise darstellen:

| 3) | $A-m^2=d_1$ | $\frac{m+m}{d_1}=a_1$ | $d_1.a_1-m=r_1$ |
|---|---|---|---|
| | $\frac{A-r_1^2}{d_1}=d_2$ | $\frac{m+r_1}{d_2}=a_2$ | $d_2.a_2-r_1=r_2$ |
| | $\frac{A-r_2^2}{d_2}=d_3$ | $\frac{m+r_2}{d_3}=a_3$ | $d_3.a_3-r_2=r_3$ |
| | $\frac{A-r_3^2}{d_3}=d_4$ | $\frac{m+r_3}{d_4}=a_4$ | $d_4.a_4-r_3=r_4$ |
| | $\frac{A-r_4^2}{d_4}=d_5$ | $\frac{m+r_4}{d_5}=a_5$ | $d_5.a_5-r_4=r_5$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . |

Hieraus erhält man für $\sqrt{31}$ Folgendes, da $A=31$ und $m=5$ ist:

| 4) . . . | $31-25=6$ | $\frac{5+5}{6}=1$ | $6.1-5=1$ |
|---|---|---|---|
| | $\frac{31-1}{6}=5$ | $\frac{5+1}{5}=1$ | $5.1-1=4$ |
| | $\frac{31-16}{5}=3$ | $\frac{5+4}{3}=3$ | $3.3-4=5$ |
| | $\frac{31-25}{3}=2$ | $\frac{5+5}{2}=5$ | $2.5-5=5$ |
| | $\frac{31-25}{2}=3$ | $\frac{5+5}{3}=3$ | $3.3-5=4$ |
| | $\frac{31-16}{3}=5$ | $\frac{5+4}{5}=1$ | $5.1-4=1$ |
| | $\frac{31-1}{5}=6$ | $\frac{5+1}{6}=1$ | $6.1-1=5$ |
| | $\frac{31-25}{6}=1$ | $\frac{5+5}{1}=10$ | $1.10-5=5$ |

Hiernach ist in Rücksicht auf Nro. 1) und 3) durch Einführung:

$$\sqrt{31}=5+K(1,1,3,5,3,1,1,10;\ 1,1,\ldots.)$$

In der ersten und dritten Colonne erscheinen alle Zahlen übersichtlich, deren Kenntniss ausser den Elementen für die weitere Anwendung Bedeutung hat. Degen hat in dem oben angeführten Werke S. 13. d. Vorr. ein anderes, vier Colonnen umfassendes und ziemlich zusammengesetztes Schema zur Darstellung der periodischen Kettenbrüche angegeben, was man hiemit und mit Legendre Théor. d. Nomb. §. V. II. Ed. vergleichen kann.

# XXIII.

## Zur Berechnung der Monddistanzen.

Von

Herrn Doctor *W. Ligowski*,

Professor der Mathematik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und am See-Cadetten-Institut in Berlin.

---

Es sei

$d$ die wahre und $d'$ die scheinbare Distanz zwischen dem Monde und einem Stern,

$h$ „ $h'$ „ Höhe des Sterns,

$H$ „ $H'$ „ Höhe des Mondes, und

$\gamma$ der Winkel zwischen den Scheitelkreisen des Sterns und des Mondes, so ist bekanntlich:

1) . . . . $\cos d = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos\gamma$

und

2) . . . . $\cos d' = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos\gamma$.

Aus Nro. 1) und 2) ergiebt sich:

3) . . $2\sin^2\frac{1}{2}\gamma = \frac{\cos(H-h)-\cos d}{\cos H \cos h} = \frac{\cos(H'-h')-\cos d'}{\cos H' \cos h'}$,

und hieraus, wenn

$$\frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'} = m$$

gesetzt wird:

4) . . $\cos d = \cos(H-h) + m(\cos d' - \cos(H'-h'))$,

welches die nach Dunthorn benannte Formel ist.

Setzt man zur Abkürzung:

$$H-h = \Delta \text{ und } H'-h' = \Delta',$$

welche Differenzen, wie man aus Nro. 4) ersieht, stets positiv genommen werden können, so erhält man:

5) . . . . . $\cos d = \cos \Delta + m(\cos d' - \cos \Delta')$.

Subtrahirt man beide Seiten der vorstehenden Gleichung von $\cos d'$, dann entsteht:

6) . . $\cos d' - \cos d = \cos d' - \cos \Delta - m\,(\cos d' - \cos \Delta')$,

oder wenn man die Differenzen der Cosinus in Produkte verwandelt:

7) . . . . . $\sin \frac{1}{2}(d' + d) \sin \frac{1}{2}(d' - d)$

$= \sin \frac{1}{2}(d' + \Delta) \sin \frac{1}{2}(d' - \Delta) - m \sin \frac{1}{2}(d' + \Delta') \sin \frac{1}{2}(d' - \Delta')$

oder auch:

8) . . . . . $\sin \frac{1}{2}(d' + d) \sin \frac{1}{2}(d' - d)$

$= \sin \frac{1}{2}(d' + \Delta) \sin \frac{1}{2}(d' - \Delta) \left(1 - \frac{m \sin \frac{1}{2}(d' + \Delta') \sin \frac{1}{2}(d' - \Delta')}{\sin \frac{1}{2}(d' + \Delta) \sin \frac{1}{2}(d' - \Delta)}\right)$.

Der Quotient auf der rechten Seite in Nro. 8) ist stets sehr nahe an 1, daher ist, wenn:

9) . . . $\operatorname{cotg}(45^0 + \varphi) = \frac{m \sin \frac{1}{2}(d' + \Delta') \sin \frac{1}{2}(d' - \Delta')}{\sin \frac{1}{2}(d' + \Delta) \sin \frac{1}{2}(d' - \Delta)}$

gesetzt wird, $\varphi$ ein sehr kleiner Winkel.

Da nun:

$$1 - \operatorname{cotg}(45^0 + \varphi) = \frac{\sin(45^0 + \varphi) - \sin(45^0 - \varphi)}{\sin(45^0 + \varphi)} = \frac{2 \cos 45^0 \sin \varphi}{\sin(45^0 + \varphi)},$$

so ergiebt sich nach Nro. 8):

10)

$$\sin \tfrac{1}{2}(d' + d) \sin \tfrac{1}{2}(d' - d) = \frac{2 \cos 45^0 \sin \varphi \sin \frac{1}{2}(d' + \Delta) \sin \frac{1}{2}(d' - \Delta)}{\sin(45^0 + \varphi)}.$$

Wenn der Unterschied $d' - d$ gleich $x$ gesetzt wird, so ist

$$d = d' - x \text{ und } \frac{d' + d}{2} = d' - \frac{x}{2}.$$

Da nun $\frac{x}{2}$ und $\varphi$ sehr kleine Winkel sind, so kann für $\sin \frac{x}{2}$ und $\sin \varphi$ beziehungsweise $\frac{x}{2} \sin 1''$ und $\varphi \sin 1''$ gesetzt werden, wodurch sich aus Nro. 10) ergiebt:

11) $x \sin(d' - \frac{1}{2}x) = \frac{4 \cos 45^0 . \varphi \sin \frac{1}{2}(d' + \Delta) \sin \frac{1}{2}(d' - \Delta)}{\sin(45^0 + \varphi)}$.

Wenn $4\cos 45^0$ durch $a$ bezeichnet wird, dann ist:

$$\log a = 0{,}451545$$

und

$$12) \ldots\ldots x = \frac{a\varphi \sin\frac{1}{2}(d' + \Delta)\sin\frac{1}{2}(d' - \Delta)}{\sin(45^0 + \varphi)\sin(d' - \frac{1}{2}x)}.$$

Weil $\frac{1}{2}x$ sehr klein ist, so erhält man für $x$ einen Näherungswerth $x_1$, wenn im Nenner von Nro. 12) $\frac{1}{2}x$ ausser Acht gelassen wird. Demnach:

$$13) \ldots\ldots x_1 = \frac{a\varphi \sin\frac{1}{2}(d' + \Delta)\sin\frac{1}{2}(d' - \Delta)}{\sin(45^0 + \varphi)\sin d'},$$

und daher genauer:

$$14) \ldots\ldots x = \frac{a\varphi \sin\frac{1}{2}(d' + \Delta)\sin\frac{1}{2}(d' - \Delta)}{\sin(45^0 + \varphi)\sin(d' - \frac{1}{2}x_1)}.$$

Durch Division von Nro. 14) und 13) entsteht:

$$15) \ldots\ldots\ldots \frac{x}{x_1} = \frac{\sin d'}{\sin(d' - \frac{1}{2}x_1)},$$

mithin:

$$16) \ldots \log x = \log x_1 + (\log\sin d' - \log\sin(d' - \tfrac{1}{2}x_1))$$
$$= \log x_1 + (\log\operatorname{cose}(d' - \tfrac{1}{2}x_1) - \log\operatorname{cose} d').$$

Zur Vergleichung der Rechnung nach den vorstehenden Formeln mit der nach den von mir im 40sten Bande des Archivs S. 250. gegebenen Formeln, lasse ich die Berechnung des daselbst mitgetheilten Zahlenbeispiels folgen:

Es war gegeben:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H'$ | $=$ | $65^0$ | $41'$ | $41''$ | $d' = 74^0\ 42'\ 3''$ | $H$ | $=$ | $66^0$ | $5'$ | $34''$ |
| $h'$ | $=$ | $27$ | $32$ | $42$ | | $h$ | $=$ | $27$ | $31$ | $5$ |
| $\Delta'$ | $=$ | $38$ | $8$ | $59$ | | $\Delta$ | $=$ | $38$ | $34$ | $29$ |
| $d'$ | $=$ | $74$ | $42$ | $3$ | | $d'$ | $=$ | $74$ | $42$ | $3$ |
| $d' + \Delta'$ | $=$ | $112$ | $51$ | $2$ | | $d' + \Delta$ | $=$ | $113$ | $16$ | $32$ |
| $\frac{d' + \Delta'}{2}$ | $=$ | $56$ | $25$ | $31$ | | $\frac{d' + \Delta}{2}$ | $=$ | $56$ | $38$ | $16$ |
| $d' - \Delta'$ | $=$ | $36$ | $33$ | $4$ | | $d' - \Delta$ | $=$ | $36$ | $7$ | $34$ |
| $\frac{d' - \Delta'}{2}$ | $=$ | $18$ | $16$ | $32$ | | $\frac{d' - \Delta}{2}$ | $=$ | $18$ | $3$ | $47.$ |

$$\log\cos H = 0{,}607730-1$$
$$\log\sec H' = 0{,}385527$$
$$\log\cos h = 0{,}947857-1$$
$$\log\sec h' = 0{,}052249$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(d'+\Delta') = 0{,}920731-1 \qquad \log\sin\tfrac{1}{2}(d'+\Delta) = 0,$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(d'-\Delta') = 0{,}496359-1 \qquad \log\sin\tfrac{1}{2}(d'-\Delta) = 0,$$
$$0{,}410453-1 \qquad S = 0,$$
$$S = 0{,}413246-1$$
$$\log\operatorname{cotg}(45^\circ+\varphi) = 0{,}997207-1$$
$$\varphi = 11'\,3{,}33'' = 663{,}33''$$
$$\log\varphi = 2{,}821730$$
$$\log a = 0{,}451545$$
$$S = 0{,}413246-1$$
$$\log\operatorname{cosec}(45^\circ+\varphi) = 0{,}149123$$
$$\log\operatorname{cosec} d' = 0{,}015670$$
$$\log x_1 = 2{,}851314$$
$$x_1 = 710{,}09'' = 11'\,50,\,09''$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 = 5'\,55''$$
$$d' = 74^\circ\,42'\,3''$$
$$d'-\tfrac{1}{2}x_1 = 0{,}015875$$
$$\log\operatorname{cosec}(d'-\tfrac{1}{2}x_1)-\log\operatorname{cosec} d' = +0{,}000205$$
$$\log x = 2{,}851519$$
$$x = 710{,}43''$$
$$= 11'\,50,\,43''$$
$$d = 74^\circ\,30'\,12,\,57''.$$

Der in Band XL. für $d$ gefundene Werth war:

$$d = 74^\circ\,30'\,12{,}6''.$$

Ich füge noch ein zweites Beispiel aus der Astronomie von Delambre bei, in welchem das $x$ ziemlich gross wird.

Gegeben:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H'$ | = | 17° | 47′ | 27″ | $d'$ = | 101° | 46′ | 43″ | $H$ | = | 18° 38′ |
| $h'$ | = | 56 | 16 | 50 | | | | | $h$ | = | 56 16 |
| $\Delta'$ | = | 38° | 29′ | 23″ | | | | | $\Delta$ | = | 37 37 |
| $d'$ | = | 101 | 46 | 43 | | | | | $d'$ | = | 101 46 |
| $d'+\Delta'$ | = | 140 | 16 | 6 | | | | | $d'+\Delta$ | = | 139 24 |
| $\frac{d'+\Delta'}{2}$ | = | 70 | 8 | 3 | | | | | $\frac{d'+\Delta}{2}$ | = | 69 42 |
| $d'-\Delta'$ | = | 63° | 17′ | 20″ | | | | | $d'-\Delta$ | = | 64 9 |
| $\frac{d'-\Delta'}{2}$ | = | 31 | 38 | 40 | | | | | $\frac{d'-\Delta}{2}$ | = | 32 4 |

$\log\cos H = 0{,}976587 - 1$
$\log\sec H' = 0{,}021282$
$\log\cos h = 0{,}744493 - 1$
$\log\sec h' = 0{,}255608$
$\log(d' + \Delta') = 0{,}973354 - 1$ $\quad \log\sin\frac{1}{2}(d'+\Delta) = 0{,}972158 - 1$
$\log(d' - \Delta') = 0{,}719867 - 1$ $\quad \log\sin\frac{1}{2}(d'-\Delta) = 0{,}725131 - 1$
$0{,}691191 - 1 \qquad S = 0{,}697289 - 1$
$S = 0{,}697289 - 1$
$\operatorname{tg}(45^0 + \varphi) = 0{,}993902 - 1$
$\varphi = 24' 8{,}1'' = 1448{,}1''$
$\log\varphi = 3{,}160799$
$\log a = 0{,}451545$
$S = 0{,}697289 - 1$
$\operatorname{se}(45^0 + \varphi) = 0{,}147487$
$\log\operatorname{cose} d' = 0{,}009242$
$\log x_1 = 3{,}466362$
$x_1 = 2926{,}6'' = 48' 46{,}6''$
$\frac{1}{2}x_1 = 24' 23{,}3''$
$d' = 101^0 46' 43''$
$d' - \frac{1}{2}x_1 = 101^0 22' 19{,}7''$
$\operatorname{ie}(d' - \frac{1}{2}x_1) = 0{,}008611$
$\left.\begin{matrix}(d'-\frac{1}{2}x_1)\\ \operatorname{cose} d'\end{matrix}\right\} = -0{,}000631$
$\log x = 3{,}465731$
$x = 2922{,}34''$
$= 48' 42{,}34''$
$d = 101^0 58' 0{,}66''.$

:h der Formel von Borda ergiebt sich:

$$d = 101^0 58'.$$

entwickelten Formeln werden bei Anwendung von fünf- Logarithmen bedeutend bequemer für die Berechnung. spiel hierzu wählen wir dasjenige, welches W. von Fre- seinem Handbuche der Nautik S. 323. nach verschie- lethoden berechnet hat.

Gegeben:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $H'$ | $= 58^0\ 45{,}5'$, | $d' = 51^0\ 33{,}4'$ | $H$ | $= 59^0\ 25{,}6'$ |
| $h$ | $= 62^0\ 44{,}5'$, | | $h$ | $= 62^0\ 44'$ |
| $\Delta'$ | $= 3^0\ 59'$ | | $\Delta$ | $= 3^0\ 18{,}4'$ |
| $d'$ | $= 51^0\ 33{,}4'$ | | $d'$ | $= 51^0\ 33{,}4'$ |
| $d'+\Delta'$ | $= 55^0\ 32{,}4'$ | | $d'+\Delta$ | $= 54^0\ 51{,}8'$ |
| $\frac{d'+\Delta'}{2}$ | $= 27^0\ 46{,}2'$ | | $\frac{d'+\Delta}{2}$ | $= 27^0\ 25{,}9'$ |
| $d'-\Delta'$ | $= 47^0\ 34{,}4'$ | | $d'-\Delta$ | $= 48^0\ 15'$ |
| $\frac{d'-\Delta'}{2}$ | $= 23^0\ 47{,}2'$ | | $\frac{d'-\Delta}{2}$ | $= 24^0\ 7{,}5'$ |

$\log\cos H = 0{,}70641 - 1$
$\log\sec H' = 0{,}28513$
$\log\cos h = 0{,}66099 - 1$
$\log\sec h' = 0{,}33913$
$\log\sin\frac{1}{2}(d'+\Delta') = 0{,}66832 - 1$
$\log\sin\frac{1}{2}(d'-\Delta') = 0{,}60566 - 1$
$0{,}26564 - 1$
$S = 0{,}27485 - 1$
$\log\operatorname{cotg}(45^0+\varphi) = 0{,}99079 - 1$
$\varphi = 36'\ 25{,}4'' = 2185{,}4''$
$\log\varphi = 3{,}33953$
$\log a = 0{,}45154$
$S = 0{,}27485 - 1$
$\log\operatorname{cosec}(45^0+\varphi) = 0{,}14600$
$\log\operatorname{cosec} d' = 0{,}10611$
$\log x_1 = 3{,}31803$
$x_1 = 2079{,}9'' = 34'\ 39{,}9''$
$\frac{1}{2}x_1 = 17'\ 20''$
$d' = 51^0\ 33'\ 24''$
$d'-\frac{1}{2}x_1 = 51^0\ 16'\ 4''$
$\log\operatorname{cosec}(d'-\frac{1}{2}x_1) = 0{,}10786$
$\log\operatorname{cosec}(d'-\frac{1}{2}x_1) - \log\operatorname{cosec} d' = 0{,}00175$
$\log x = 3{,}31978$
$x = 2088'' = 34'\ 48''$
$d = 50^0\ 58'\ 36''$.

$\log\sin\frac{1}{2}(d'+\Delta) = 0{,}66341 - 1$
$\log\sin\frac{1}{2}(d'-\Delta) = 0{,}61144 - 1$
$S = 0{,}27485 - 1$

von Freden findet nach der Formel von Borda für $d$ denselben Werth.

# XXIV.

## Elementare Behandlung des ballistischen Problemes unter Voraussetzung eines der ersten Potenz der Geschwindigkeit direct proportionalen Luftwiderstandes.

Von

Herrn *Heinrich Gretschel*,

Lehrer der Mathematik an der Handelslehranstalt in Leipzig.

---

Im 2. Hefte dieses Theiles des Archivs ist das in der Ueberschrift genannte Problem von dem Herrn Herausgeber mit den Hilfsmitteln der Infinitesimalrechnung ausführlich behandelt worden. Vielleicht ist eine elementare Entwickelung der wichtigsten der dort gefundenen Formeln für Zwecke des Unterrichts nicht ganz ohne Interesse, und es findet deshalb wohl Entschuldigung, wenn die nachstehenden Betrachtungen, welche allerdings sachlich nichts Neues bieten, ein Plätzchen im Archive beanspruchen.

### I.

Ehe wir das gestellte Problem selbst in Angriff nehmen, wollen wir erst die folgende vorbereitende Aufgabe lösen.

Ein Punkt bewege sich unter dem Einflusse zweier Kräfte, welche der Richtung seiner Bewegung gerade entgegenwirken. Die erste dieser Kräfte sei constant; die Verminderung der Geschwindigkeit ist dann der Zeit proportional und ihr Betrag in der Zeiteinheit sei $a$. Die zweite Kraft sei direct proportional der erlangten Geschwindigkeit $v$ und zwar werde der auf die

Masseneinheit wirkende Theil dieser Kraft durch das Product $\mu v$ ausgedrückt, wo $\mu$ eine Constante ist; d. h. wenn die Kraft während einer Zeiteinheit constant wirkte, so würde sie die Geschwindigkeit um $\mu v$ vermindern. — Es soll nun die Geschwindigkeit $v$ des bewegten Punktes zu einer beliebigen Zeit $t$ und der während dieser Zeit zurückgelegte Weg $s$ gefunden werden, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit zur Zeit $t=0$ den Werth $c$ hat.

Um diese Aufgabe zu lösen, theilen wir die Zeit $t$ in $n$ gleichgrosse Theile $\tau$ und denken uns die wirkliche Bewegung so abgeändert, dass die während eines jeden Zeittheilchens $\tau$ stattfindende Verminderung der Geschwindigkeit auf das Ende dieses Theilchens verlegt wird, die Bewegung während eines solchen Zeittheilchens aber eine gleichförmige ist.

Bedeutet dann $v_k$ die Geschwindigkeit während des $k$ten Zeittheilchens, so wird diese am Ende desselben vermindert

wegen der ersten widerstehenden Kraft um $a\tau$ und
„ „ zweiten „ „ „ „ $\mu v_k \tau$;

so dass die Geschwindigkeit im $(k+1)$ten Zeittheilchen den Werth hat

$$(1) \quad \ldots \quad v_{k+1} = v_k - a\tau - \mu v_k \tau = v_k(1-\mu\tau) - a\tau.$$

Demnach ist die Geschwindigkeit:

zur Zeit 0 $\quad v_0 = c \qquad = \dfrac{c\mu+a}{\mu} \qquad -\dfrac{a}{\mu}$,

„ „ $1\tau$ $\quad v_1 = v_0(1-\mu\tau) - a\tau = \dfrac{c\mu+a}{\mu}(1-\mu\tau) \quad -\dfrac{a}{\mu}$,

„ „ $2\tau$ $\quad v_2 = v_1(1-\mu\tau) - a\tau = \dfrac{c\mu+a}{\mu}(1-\mu\tau)^2 - \dfrac{a}{\mu}$,

. . . . . .

„ „ $k\tau$ $\quad v_k = \qquad \dfrac{c\mu+a}{\mu}(1-\mu\tau)^k - \dfrac{a}{\mu}$,

. . . . . .

„ „ $n\tau$ $\quad v_n = \qquad \dfrac{c\mu+a}{\mu}(1-\mu\tau)^n - \dfrac{a}{\mu}$.

Schreiben wir in der letzten Formel $\frac{t}{n}$ statt $\tau$ und lassen $n$

über alle Grenzen wachsen, so erhalten wir den genau richtigen Werth für die Geschwindigkeit $v$ zur Zeit $t$:

$$v = \frac{c\mu + a}{\mu} \lim (1 - \frac{\mu t}{n})^n - \frac{a}{\mu}, \quad n = \infty;$$

d. i. wegen $\lim (1 - \frac{x}{n})^n = e^{-x}$, $n = \infty$:

$$(2) \ldots\ldots\ldots v = \frac{c\mu + a}{\mu} e^{-\mu t} - \frac{a}{\mu}.$$

Zur Berechnung des Weges $s$, welcher in der Zeit $t$ zurückgelegt worden ist, dient die Gleichung:

$$s = \lim \tau (v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}), \quad n = \infty.$$

Nun ist aber

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}$$
$$= \frac{c\mu + a}{\mu} [1 + (1 - \mu\tau) + (1 - \mu\tau)^2 + \ldots + (1 - \mu\tau)^{n-1}] - n\frac{a}{\mu}$$
$$= \frac{c\mu + a}{\mu} \cdot \frac{1 - (1 - \mu\tau)^n}{\mu\tau} - n\frac{a}{\mu},$$

und sonach ist

$$s = \lim \left\{ \frac{c\mu + a}{\mu^2} [1 - (1 - \mu\tau)^n] - n\tau \frac{a}{\mu} \right\}, \quad n = \infty.$$

Setzt man $\tau = \frac{t}{n}$ und lässt $n$ über alle Grenzen wachsen, so erhält man sofort:

$$(3) \ldots\ldots\ldots s = \frac{c\mu + a}{\mu^2} (1 - e^{-\mu t}) - \frac{at}{\mu}.$$

## II.

Wir wenden uns jetzt zu unserer Hauptaufgabe. Ein schwerer Körper werde mit einer Anfangsgeschwindigkeit $V$ unter einem gegebenen Elevationswinkel $i$ fortgeworfen. Auf denselben wirkt die Schwerkraft, welche ihm in der Secunde die Beschleunigung $2G$ nach unten ertheilt, und der Luftwiderstand, von dem wir voraussetzen, er sei der Geschwindigkeit $v$ proportional, also $= \mu v$.

Die wirkliche Bewegung dieses Körpers zerlegen wir nun in

eine horizontale und eine verticale Componente, welche wir einzeln ins Auge fassen.

Für die horizontale Bewegung gelten die Formeln unserer Nr. I., wenn wir

$$c = V\cos i \quad \text{und} \quad a = 0$$

setzen. Es ist daher die horizontale Componente der Geschwindigkeit zur Zeit $t$ (vergl. Formel (2)):

$$(4) \ldots\ldots\ldots v_x = V\cos i.e^{-\mu t}$$

und der in der Zeit $t$ in horizontaler Richtung zurückgelegte Weg beträgt zufolge Gleichung (3):

$$\frac{V\cos i}{\mu}(1-e^{-\mu t}).$$

Wenn also zur Zeit $t = 0$ der bewegte Körper die horizontale Abscisse $a$ hat, so ist seine Abscisse zur Zeit $t$:

$$(5) \ldots\ldots\ldots x = a + \frac{V\cos i}{\mu}(1-e^{-\mu t}).$$

Für die verticale Bewegung muss in den Formeln der Nr. I.

$$c = V\sin i \quad \text{und} \quad a = 2G$$

gesetzt werden. Es ergiebt sich dann aus Gleichung (2) die verticale Geschwindigkeit zur Zeit $t$:

$$(6) \ldots\ldots\ldots v_y = \frac{\mu V\sin i + 2G}{\mu}e^{-\mu t} - \frac{2G}{\mu},$$

und aus (3) erhält man den in der Zeit $t$ in verticaler Richtung zurückgelegten Weg:

$$\frac{\mu V\sin i + 2G}{\mu^2}(1-e^{-\mu t}) - \frac{2Gt}{\mu};$$

hat also zur Zeit $t = 0$ der bewegte Körper die verticale Ordinate $b$, so ist seine Ordinate zur Zeit $t$:

$$(7) \ldots\ldots y = b + \frac{\mu V\sin i + 2G}{\mu^2}(1-e^{-\mu t}) - \frac{2Gt}{\mu}.$$

Die Formeln (4), (5), (6) und (7) sind identisch mit (16), (17), (18) und (19) in der Abhandlung des Herrn Herausgebers des Archivs.

Der Körper hört auf zu steigen, wenn $v_y = 0$ wird; dieses

giebt zur Bestimmung der dazu nöthigen Zeit, welche $T$ heissen möge, zufolge (6) die Gleichung:

$$\frac{\mu V \sin i + 2G}{\mu} e^{-\mu T} - \frac{2G}{\mu} = 0,$$

woraus

$$e^{\mu T} = \frac{\mu V \sin i + 2G}{2G},$$

und also

$$T = \frac{1}{\mu} l(1 + \frac{\mu V \sin i}{2G})$$

folgt, übereinstimmend mit (29) der citirten Abhandlung. Hiermit sind die Grundformeln für die weitere Entwickelung gewonnen.

---

# XXV.

## Beweis einiger geometrischen Sätze.

Von

Herrn Professor Dr. *F. König*,

Oberlehrer am Kneiphöfschen Gymnasio zu Königsberg i. Pr.

---

### I.

Thl. XLII. S. 229. ist von dem Herausgeber des Archivs der Satz:

> Wenn in dem Dreieck $ABC$ der Winkel $A$ doppelt so gross ist, als der Winkel $B$, so ist immer $a^2 = b(b+c)$,

nebst der Richtigkeit seiner Umkehrung bewiesen.

Auch wenn $A = 3B$, $= 4B$ u. s. w. ist, lassen sich leicht Relationen zwischen den Seiten $a$, $b$, $c$ aufstellen, was sogleich aus dem folgenden Beweise des angeführten Satzes erhellt. Beschreibt man nämlich um $ABC$ einen Kreis und legt an denselben in $C$ eine Tangente bis sie die verlängerte $BA$ in $D$ schneidet, so ist $\angle D = \angle B$, also, wenn man $AD$ mit $d$, $CD$ mit $t$ bezeichnet, $t = a$ und $d = b$, und da $t^2 = d(d+c)$, so ist auch

$$a^2 = b(b+c).$$

Lässt man, um die Giltigkeit der Umkehrung dieses Satzes zu zeigen, dieselbe Construction, dann ist aus

$$d : b = t : a$$

$t = \frac{ad}{b}$, welches, in $t^2 = d(d+c)$ gesetzt, giebt:

$$da^2 = b^2(d+c),$$

und da $a^2 = b(b+c)$, so folgt:

$$d = b,$$

d. h. $\angle D = \angle B$ und $A = 2B$.

Ist $A = 3B$, so wird $D = 2B$, also nach dem vorigen Satze:

$$b^2 = d(d+t),$$

und wenn man $d$ und $t$ mit Hilfe der Ausdrücke:

$$ad = bt \quad \text{und} \quad t^2 = d(d+c)$$

eliminirt:

$$bc^2 = (a^2 - b^2)(a-b).$$

Umgekehrt ist $A = 3B$, wenn diese Relation stattfindet.

Setzt man nämlich für $a$ und $c$ die Werthe $\frac{bt}{d}$ und $\frac{t^2-d^2}{d}$, so entsteht:

$$b^2 = d(d+t),$$

d. h. nach der Umkehrung des ersten Satzes $\angle D = 2B$ und $A = 3B$.

Für $A = 4B$ ist $D = 3B$, also im $\Delta ADC$:

$$dt^2 = (b^2 - d^2)(b - d),$$

und wenn man $d$ und $t$ eliminirt:

$$a^2bc^2 = \{(a^2 - b^2)^2 - b^2c^2\}\{(a^2 - b^2) - bc\}.$$

Auch hier ist die Umkehrung des Satzes richtig; denn substituirt man für $a$ und $c$ obige Werthe, so erhält man

$$dt^2 = (b^2 - d^2)(b - d),$$

also ist nach der Umkehrung des vorigen Satzes $\angle D = 3B$ und $A = 4B$.

Offenbar kann man auf dieselbe Weise zwischen $a$, $b$, $c$ Relationen ableiten für $A = 5B$ u. s. w.*).

## II.

Für den viel besprochenen Satz:

> Wenn in dem Dreieck $ABC$ (Taf. X. Fig. 6.)**) die Linien $AD$ und $BE$, von denen die Winkel $A$ und $B$ halbirt werden, gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig, nämlich $A = B$,

der noch Thl. XLII. S. 233. zuletzt bewiesen ist, gebe ich die folgenden Beweise:

**Beweis 1.** Setzt man $BD = x$, $AE = x'$, so darf nur gezeigt werden, dass $x = x'$ sein muss.

1) Liegen $D$ und $E$ in $BC$ und $AC$, so hat man $bx = c(a - x)$ und $ax' = c(b - x')$, woraus

$$a = \frac{cx(c + x')}{c^2 - xx'} \quad \text{und} \quad b = \frac{cx'(c + x)}{c^2 - xx'}.$$

Nun ist aber auch:

$$AD^2 = bc - x(a - x) = BE^2 = ca - x'(b - x'),$$

und für $a$ und $b$ obige Werthe substituirt:

$$\{c^3 + xx'(c + x + x')\}(x - x') = 0.$$

---

*) Diese interessanten Resultate weisen auf ein allgemeines Gesetz hin, dessen Auffindung verdienstlich sein würde. G.

**) Diese Figur hat leider auf den Tafeln dieses Hefts nicht mehr Platz finden können; sie wird im nächsten Hefte auf Taf. X. nachgeliefert. G.

welcher Gleichung nur durch $x = x'$ genügt werden kann, da negative und imaginäre Werthe für $x$ und $x'$ hier unbrauchbar sind

2) Liegen $D$ und $E$ in den Verlängerungen von $CB$ und $CA$ d. h. sind die Nebenwinkel von $A$ und $B$ halbirt, und die Halbirungslinien schneiden die über $A$ und $B$ verlängerten Seiten dann heissen die entsprechenden Gleichungen:

$$bx = c(a + x) \quad \text{und} \quad ax' = c(b + x'),$$

also

$$a = \frac{cx(c + x')}{xx' - c^2}, \quad b = \frac{cx'(c + x)}{xx' - c^2},$$

$$AD^2 = x(a + x) - bc = BE^2 = x'(b + x') - ac,$$

endlich:

$$\{c^3 + xx'(c + x + x')\}(x - x') = 0,$$

also wieder $x = x'$.

3) Liegen $D$ und $E$ in den Verlängerungen von $BC$ und $AC$, dann ist:

$$bx = c(x - a) \quad \text{und} \quad ax' = c(x' - b),$$

$$a = \frac{cx(x' - c)}{xx' - c^2}, \quad b = \frac{cx'(x - c)}{xx' - c^2},$$

$$AD^2 = x(x - a) - bc = BE^2 = x'(x' - b) - ac,$$

folglich:

$$\{c^3 - xx'(x + x' - c)\}(x - x') = 0,$$

d. h. $x = x'$.

Dem anderen Factor, $= 0$ gesetzt, kann durch positive Werthe von $x$ und $x'$ nicht genügt werden, denn da $x$, auch $x' > c$, so ist

$$\begin{array}{r} xx' > c^2 \\ x + x' - c > c \\ \hline \text{also} \quad xx'(x + x' - c) > c^3. \end{array}$$

4) Geht $AD \parallel BC$, $BE \parallel AC$, dann ist:

$$\begin{array}{r} A = 90^0 - \frac{1}{2}B \\ B = 90^0 - \frac{1}{2}A \\ \hline A - B = \frac{1}{2}(A - B), \end{array}$$

also $A = B$ und, wegen $A = 90^0 - \frac{1}{2}A$, $A = B = 60^0$, d. h. das Dreieck ist gleichseitig.

**Beweis** [illegible] Es ist [illegible] viereck ist. Wäre nun [illegible] könnte der Kreis [illegible] wegen [illegible] nur die Verlängerung [illegible] den. Dann wäre aber [illegible] jeder $< 180°$ [illegible] was gegen die Annahme [illegible]

Liegen $D$ und $E$ [illegible] nimmt man $A < 90°$ [illegible] ähnlich.

## XII.

**Beweis des Satzes von E. [illegible]** [illegible] Th. XLII. [illegible]

Behalten wir die [illegible] die Parallelinien mit [illegible] und $C$, $K$ links von $E$. [illegible] $\angle OAM = \angle OAL$ [illegible]

$$\angle CBM = \angle KBA = \angle BAL = \angle OAM$$

d. h. $M$ liegt in der Peripherie des Kreises um $AB$ [illegible] man nun diesen Kreis [illegible] übrig, die Gleichheit der Winkel $MCA$ und $BCN$ nachzuweisen. Es ist aber

$$\angle MCA = \angle MBA = \angle CBK = \angle BCN$$

# XXVI.

## De locis geometricis punctorum in plano trianguli, quae singularia vocantur, annotationes factae

a

Dr^e. *Christiano Fr. Lindman*,

Lect. Strengnesensi.

Inter omnes constat, puncta illa in plano trianguli, quae vocantur singularia, esse centra circuli circumscripti et inscripti, centrum gravitatis et id punctum, ubi altitudines concurrunt. De his punctis Eulerus jam abhinc centum annis disputavit et proprietates quasdam eorum attentione dignissimas invenit. Viam ab eo, ut saepissime, monstratam et praemunitam multi sunt secuti, nec fere quisquam „oleum et operam perdidit". Multae igitur a multis repertae sunt propositiones, de quibus Lexicon Klügelianum cum supplementis locupletissimis Cel. editoris hujus Archivi (Art. Dreyeck) videre licet. Nemo tamen, quantum sciam, in loca horum punctorum geometrica, quibusdam lateribus et angulis trianguli variantibus, inquisivit,*) quod igitur neque injucundum nec inutile fore mihi visum est. Itaque aliquot ex his locis afferre mihi liceat, etiamsi omnia accurate expossuisse et enumerasse mihi sumere non possim.

*) Das neuerlich erschienene Programm: Ueber einige geometrische Oerter der merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von Dr. am Ende. Langensalza. 1863. ist dem Herrn Vf. unbekannt geblieben, wie dies mit solchen Gelegenheitsschriften sehr häufig der Fall ist, namentlich was das Ausland betrifft. Jedenfalls ist aber sowohl die Darstellung als auch der Inhalt des vorliegenden sehr schönen Aufsatzes des Herrn Dr. Lindman dem Herrn Verfasser so vollkommen eigenthümlich, dass es mir nur ganz besondere Freude machen kann, denselben mit dem freundlichsten Danke für dessen Einsendung hier mitzutheilen. G.

[redacted]

basin et latera producta tangunt. Rectae (5), axi ordinatarum parallelae, locus sunt centri circulorum, quorum circumferentiae unum latus et productam basin alterumque latus productum tangunt.

**II. Probl.** Invenire locum geometricum puncti, ubi altitudines concurrunt.

Si $x$ et $y$ sunt coordinatae hujus puncti, aequationes altitudinum per $A$ et $B$ transeuntium erunt

$$y = (c+x)\operatorname{Cot} B, \quad y = (c-x)\operatorname{Cot} A. \quad \ldots\ldots (8)$$

Exterminatis $A$ et $B$ ope aequationum (2) et (8) inveniuntur

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{c^2-x^2}{y}; \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

quae in (1) substitutae dabunt

$$a^2(c^2-x^2)^2 = (a^2-c^2)(a^2-x^2)y^2, \quad \ldots\ldots (10)$$

quae est aequatio loci quaesiti. Locus ille est curva quarti ordinis, cujus aequatio soluta dat

$$y = \pm \frac{a(c^2-x^2)}{\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-x^2)}},$$

unde liquet, curvam, quae quattuor habet ramos in infinitum excurrentes, respectu axium symmetricam esse. Praeterea patet, curvam transire per focos Ellipsis, qui sunt puncta duplicia, easque lineas, quae Ellipsin in verticibus tangunt, asymptotas curvae esse. Ea curvae pars, cujus vertex supra axem abscissarum cadit, Ellipsin in quattuor punctis secat, quorum coordinatae sunt:

$$x_1 = \pm \frac{a}{c}\sqrt{2c^2-a^2}, \quad y_1 = + \frac{a^2-c^2}{c};$$

$$x_2 = \pm \frac{a^2}{\sqrt{2a^2-c^2}}, \quad y_2 = - \frac{a^2-c^2}{\sqrt{2a^2-c^2}};$$

ea pars, cujus vertex sub axi abscissarum jacet, Ellipsin quoque secat in quattuor punctis;

$$x_3 = \pm \frac{a}{c}\sqrt{2c^2-a^2}, \quad y_3 = - \frac{a^2-c^2}{c};$$

$$x_4 = \pm \frac{a^2}{\sqrt{2a^2-c^2}}, \quad y_4 = + \frac{a^2-c^2}{\sqrt{2a^2-c^2}}.$$

Puncta $(x_1, y_1)$ et $(x_3, y_3)$ non saepius exsistunt, quam si est $2c^2 \geqq a^2$, et sita sunt in circumferentia circuli

$$x^2 + y^2 = c^2;$$

tera puncta jacent in hyperbola aequilatera

$$y^2 - x^2 = c^2.$$

irva illa axem ordinatarum secat, quando est $y = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}$.

ae puncta, si est $2c^2 = a^2$, eadem sunt ac puncta extrema axis noris. Circulus nuper nominatus inter curvam et Ellipsin cadit.

Solito modo invenitur superficies ($= A$) supra abscissam $\leqq c$ esse:

$$A_0^x = \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left[ \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + (c^2 - \frac{a^2}{2}) \operatorname{ArcSin} \frac{x}{a} \right],$$

$$A_0^c = \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left[ \frac{c}{2} \sqrt{a^2 - c^2} + (c^2 - \frac{a^2}{2}) \operatorname{ArcSin} \frac{c}{a} \right].$$

Posito $a = c\sqrt{2}$, evadit:

$$A'^c_0 = \frac{c^2}{\sqrt{2}}.$$

Itidem reperitur superficies (finita) intra axem abscissarum, ram et asymptotam:

$$A_c^a = \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left[ \frac{c}{2} \sqrt{a^2 - c^2} - (c^2 - \frac{a^2}{2}) \operatorname{ArcCos} \frac{c}{a} \right].$$

Si est $a = c\sqrt{2}$, invenitur

$$A'^a_c = \frac{c^2}{\sqrt{2}} = A'^c_0.$$

**III. Probl.** Invenire locum geometricum centri gravitatis.

Si $x$ et $y$ sunt coordinatae hujus puncti, habebimus propter ıituḿ situm ejus:

$$\eta = 3y, \quad \xi = 3x; \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

ɜ in (1) substitutae suppeditant:

$$\frac{a^2 y^2}{9} + \frac{b^2 x^2}{9} = \frac{a^2 b^2}{81}, \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

ɜ est aequatio Ellipsis Ellipsi (1) similis.

§. 2.

**Basis (=2c) et differentia laterum (=2a) sint constantes.**

Origine et axibus non mutatis, patet, locum verticis anguli, basi oppositi, esse hyperbolam

$$a^2\eta^2 - b^2\xi^2 = -a^2b^2, \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

quae aequatio prodit, si $bi$ pro $b$ in (1) ponitur. Cetera reperiuntur, si $a^2+b^2$ pro $c^2$ substituitur. Itaque altera rectarum

$$x = \pm a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

locus est centri circulorum inscriptorum, altera locus centri circulorum, quorum circumferentiae basin et latera producta tangunt.

Hyperbolae

$$y^2 - \frac{c+a}{c-a}x^2 = -\frac{c+a}{c-a}c^2, \quad y^2 - \frac{a-c}{a+c}x^2 = -\frac{a-c}{a+c}c^2 \quad (15)$$
$$(c^2 = a^2+b^2)$$

sunt loci centri circulorum, qui unum latus et productam basin alterumque latus productum tangunt.

Eodem modo invenimus ex aequatione (10), curvam

$$a^2(c^2-x^2)^2 = (c^2-a^2)(x^2-a^2)y^2 \quad \ldots\ldots (16)$$

esse locum punctorum, ubi altitudines concurrunt, nec fieri posse, ut sit $x<a$.

Curva illa per focos transit et octo habet ramos in infinitum excurrentes rectaeque $x=\pm a$ sunt asymptotae ejus.

Posito $bi$ pro $b$ in (12) prodit:

$$\frac{a^2y^2}{9} - \frac{b^2x^2}{9} = -\frac{a^2b^2}{81}, \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

quae est aequatio loci centri gravitatis et hyperbolam hyperbolae (13) similem repraesentat.

§. 3.

**Basis (=2c) et angulus ei oppositus (=C) sint constantes.**

Tum vertex anguli situs est in circumferentia circuli, cujus aequatio est

$$\xi^2 + \eta^2 - 2c\eta \operatorname{Cot} C = c^2 \ldots\ldots\ldots (18)$$

**I. Probl.** Invenire locum centri circulorum inscriptorum.

Si coordinatae puncti quaesiti $= x$ et $y$ ponuntur, valores coordinatarum $\xi$ et $\eta$ ex aequatione (4) sumendi sunt et in (18) substituendi, quo facto invenitur:

$$\frac{x^2(c^2-x^2+y^2)^2+4y^2(c^2-x^2)^2}{(c^2-x^2-y^2)^2} - \frac{4cy(c^2-x^2)}{c^2-x^2-y^2} \operatorname{Cot} C = c^2,$$

quae, transformationibus quibusdam factis, dat:

$$x^2 + y^2 + 2cy \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = c^2, \ldots\ldots\ldots (19)$$

$$x^2 + y^2 - 2cy \operatorname{Cot} \tfrac{1}{2} C = c^2; \ldots\ldots\ldots (20)$$

unde liquet, locum quaesitum esse circulum.

Ille circulus problemati ipsi satisfacit; circumferentia hujus unum latus et cetera latera producta tangit.

**II. Probl.** Invenire locum geometricum puncti, ubi altitudines concurrunt.

Si $\xi$ et $\eta$ ex aequat. (9) substituuntur in (18), prodit, exstincto factore $c^2 - x^2$,

$$x^2 + y^2 + 2cy \operatorname{Cot} C = c^2, \ldots\ldots\ldots (21)$$

quae est aequatio circuli circulo (18) aequalis, sed coordinatae centri ejus sunt $x = 0$, $y = -c \operatorname{Cot} C$.

**III. Probl.** Invenire locum geometricum centri gravitatis.

Valoribus coordinatarum $\xi$ et $\eta$ ex (11) sumtis et in (18) substitutis, habebimus:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3} cy \operatorname{Cot} C = \frac{c^2}{9}. \ldots\ldots\ldots (22)$$

Itaque locus quaesitus est circulus, cujus radius est $= \frac{c}{3 \operatorname{Sin} C}$ = parti tertiae radii circuli (18) et coordinatae centri sunt $x = 0$ et $y = \frac{1}{3} c \operatorname{Cot} C$.

§. 4.

**Basis ($=2c$) et differentia angulorum ad basin ($B-A=2\alpha$) sint constantes.**

**I. Probl.** Invenire locum geometricum centri circulorum inscriptorum.

Ex aequationibus (3) inveniuntur

$$\operatorname{tg} B=\frac{2y(c-x)}{(c-x)^2-y^2},\quad \operatorname{tg} A=\frac{2y(c+x)}{(c+x)^2-y^2};$$

quae cum aequatione $B-A=2\alpha$ conjunctae dabunt

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{4xy(c^2-x^2+y^2)}{(c^2-x^2)^2-2y^2(c^2+x^2)+y^4+4y^2(c^2-x^2)}$$
$$=\frac{4xy(c^2-x^2+y^2)}{(c^2-x^2+y^2)^2-4x^2y^2}.$$

Aequatio illa in has duas facilę disjungitur:

$$y^2-2xy\operatorname{Cot}\alpha-x^2+c^2=0 \quad \ldots\ldots (23)$$
$$y^2+2xy\operatorname{tg}\alpha-x^2+c^2=0; \quad \ldots\ldots (24)$$

quae sunt aequationes duarum hyperbolarum aequilaterarum, e quibus illa est locus centri circulorum inscriptorum eorumque, qui basin et latera producta tangunt, haec est locus centri circulorum, qui unum latus et productam basin et alterum latus productum tangunt.

**II. Probl.** Invenire locum geometricum punctorum, ubi altitudines concurrunt.

Exterminatis $A$ et $B$ ex aequationibus (8) et $B-A=2\alpha$ invenitur

$$y^2-2xy\operatorname{Cot}2\alpha-x^2+c^2=0, \quad \ldots\ldots (25)$$

quae est aequatio hyperbolae aequilaterae. Haec hyperbola quoque est locus verticis anguli $C$ basi oppositi.

**III. Probl.** Invenire locum geometricum centri gravitatis.

Ope aequationum (2) et (11) et $B-A=2\alpha$ variabiles $\eta$, $A$, $B$ exterminantur, quo facto invenitur:

$$y^2-2xy\operatorname{Cot}2\alpha-x^2+\frac{c^2}{9}=0, \quad \ldots\ldots (26)$$

quae est aequatio hyperbolae aequilaterae.

§. 5.

**Basis (=2c) et altitudo (=h) sint constantes.**

Locus verticis anguli, basi oppositi, est recta

$$\eta = h. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

**I. Probl.** **Invenire locum geometricum circulorum inscriptorum.**

Valor ipsius $\eta$ e (4) in (27) substitutus dabit

$$hy^2 = (h-2y)(c^2-x^2) \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$

quae est aequatio loci quaesiti. Soluta illa respectu variabilium habebimus:

$$y = \frac{1}{h}(-c^2+x^2 \pm \sqrt{(c^2-x^2)(c^2+h^2-x^2)}), \quad x = \pm\sqrt{c^2 - \frac{hy^2}{h-2y}}.$$

E priore perspicitur esse $y=0$, si est $x=c$, et necesse esse, sit $c^2 \gtreqless x^2$ aut $x^2 \gtreqless c^2+h^2$, si fieri poterit, ut $y$ sit realis. Itidem patet, curvam rectae $\eta=h$ occurrere, si est $x=\pm\sqrt{c^2+h^2}$.

Posterior aequatio, cui forma illa

$$x = \pm\sqrt{\frac{h}{h-2y}\left[\frac{c}{h}(\sqrt{c^2+h^2}-c)-y\right]\cdot\left[y+\frac{c}{h}(\sqrt{c^2+h^2}+c)\right]}$$

dari potest, docet maximum ipsius $y$ valorem, qui quidem sit $< \frac{h}{2}$, esse $= \frac{c}{h}(\sqrt{c^2+h^2}-c)$. Quod si est $y > \frac{h}{2}$, variabilis $x$ continue crescit, et crescente et decrescente $y$ usque ad $y=\frac{h}{2}$, ubi est $x=\infty$. Curva occurrit axi abscissarum, quando est $x=\pm c$, et axi ordinatarum, quando est $y=\frac{c}{h}(-c\pm\sqrt{c^2+h^2})$.

Facile patet, curvam quattuor habere ramos in infinitum excurrentes, quorum asymptota est recta $y=\frac{h}{2}$, praetereaque partim praeclusam, tantisper dum sit $x^2 \lesseqgtr c^2$.

Differentiando invenitur

$$y' = \frac{x}{h}\left(2 \mp \frac{2c^2+h^2-2x^2}{\sqrt{(c^2-x^2)(c^2+h^2-x^2)}}\right),$$

unde liquet, tangentes per puncta $x=0$, $y=\frac{c}{h}\left(-\frac{c}{h} \pm \sqrt{c^2+h^2}\right)$

§. 4.

Basis $(=2c)$ et differentia angulorum praeclusae $(B-A=2\alpha)$ sint constant

**I. Probl.** Invenire locum geometricum inscriptorum. $-k^2)F(k,\frac{\pi}{2})\Big]$.

Ex aequationibus (3) inveniuntur

$$\operatorname{tg} B=\frac{2y(c-x)}{(c-x)^2-y^2},\quad \operatorname{tg} A$$ etricum punctorum, ncurrunt.

quae cum aequatione $B-A=2\alpha$ c in (27), prodit

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{4xy(c}{(c^2-x^2)^2-2y^2(c}\ -hy, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

$$=\frac{4xy(c}{(c^2-x}$$ ejus parameter est $=h$ et in qua Coordinatae verticis sunt $x=0$,

Aequatio illa in has d baseos extrema transit.

$y^2-2$

$y^2+$ geometricum centri gravitatis.

quae sunt aequationc locum esse rectam quibus illa est locus basin et latera prod qui unum latus et tangunt.

$$y=\frac{1}{3}h. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

§. 6.

**II. Probl.** Inv latus $(=b)$ sint constantes.

Extermin et alterum orthogonalium in altero baseos venitur coordinatarum basisque ipsa axis abscissarum eligatur

quae est ae collocetur semper fieri potest. Locus ve que est lo $b=c$, quod circulus

$$\eta^2+\xi^2=b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

**III.** et aequationes laterum

$$\eta=\xi \operatorname{tg} A,\quad \eta=(c-\xi)\operatorname{tg} B. \quad \ldots\ldots (32)$$

Ope

$A$, $B$ e

**I. Probl.** Invenire locum geometricum centri circulorum inscriptorum.

Coordinatis ejus $=x, y$ positis aequationes rectarum per punctum et $A$ atque $B$ transeuntium sunt:

quae c

$$y = (c-x)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B. \quad \ldots\ldots (33)$$

$$\frac{2xy(c-x)}{\ldots)-y^2};$$

$$\ldots)-y^2]^2,$$

...siti:

$$\frac{\ldots}{\ldots - x}, \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

$$\frac{bcx_1}{b-c+x_1}; \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

$x_1$, $y_1$ pro $x$, $y$ ponuntur.

$$\ldots \pm \sqrt{\frac{x(x-b)(x-c)}{b+c-x}},$$

...m $y$ esse imaginariam, si $x$ est negativa, nec ...e, nisi est $b+c>x>b$ aut $c>x$. Ordinata $y$ ...i est $x=b+c$, et recta $x=b+c$ est ejus asym... illa axem abscissarum in tribus punctis $x=0$, $x=b$, ... Ea pars curvae, in qua est $x<c$, est finita, altera ...finitum excurrit.

...ione (35) soluta invenimus

$$y_1 = \pm\sqrt{\frac{x_1(b+x_1)(c-x_1)}{b-c+x_1}},$$

..., axem abscissarum a curva in punctis $x=0$, $x=c$, ...ari et abscissas positivas quantitate $c$ minores esse.

...t negativa, necesse est, sit $b \geqq -x > b-c$. Recta ...st asymptota. Si est $b=c$, aequatio (35) transit in

$$x_1^2 + y_1^2 = b^2,$$

...quatio circuli dati. Curva (34) posita $b=c$ transit in

$$x^2 + y^2 = \frac{b^2 x}{2b-x}. \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

## Invenire locum geometricum punctorum, ubi altitudines concurrunt.

...ones altitudinum sunt

$$y=(c-x)\operatorname{Cot} A, \quad y = x\operatorname{Cot} B \quad \ldots\ldots (37)$$

ductas axi abscissarum esse parallelas et tangentes per puncta $y=0$, $x=\pm c$ et $y=h$, $x=\pm\sqrt{c^2+h^2}$ axi ordinatarum.

Solito modo invenitur superficies $(=A_{-c}^{c})$ partis praeclusae. Posito $k^2=\frac{c^2}{c^2+h^2}$, habebimus

$$A_{-c}^{c}=\frac{4c^2}{3k^2\sqrt{1-k^2}}\left[(1+k^2)E(k,\tfrac{\pi}{2})-(1-k^2)F(k,\tfrac{\pi}{2})\right].$$

**II. Probl.** Invenire locum geometricum punctorum, ubi altitudines concurrunt.

Si $\eta$, ex (9) sumta, substituitur in (27), prodit

$$x^2=c^2-hy, \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

quae est aequatio Parabolae, cujus parameter est $=h$ et in qua $y$-axis est axis principalis. Coordinatae verticis sunt $x=0$, $y=\frac{c^2}{h}$ et Parabola per puncta baseos extrema transit.

**III. Probl.** Invenire locum geometricum centri gravitatis.

Facillime patet, hunc locum esse rectam

$$y=\frac{1}{3}h. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

## §. 6.

**Basis $(=c)$ et alterum latus $(=b)$ sint constantes.**

Nunc origo coordinatarum orthogonalium in altero baseos puncto extremo collocetur basisque ipsa axis abscissarum eligatur. Praeterea ponamus $b\geqq c$, quod semper fieri potest. Locus verticis anguli, basi oppositi, est circulus

$$\eta^2+\xi^2=b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

et aequationes laterum

$$\eta=\xi\,\mathrm{tg}\,A, \quad \eta=(c-\xi)\,\mathrm{tg}\,B. \quad \ldots\ldots (32)$$

**I. Probl.** Invenire locum geometricum centri circulorum inscriptorum.

Coordinatis ejus $=x,y$ positis, aequationes rectarum per punctum et $A$ atque $B$ transeuntium sunt:

$$y=x\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad y=(c-x)\operatorname{tg}\frac{B}{2} \qquad (33)$$

Aequationes (32) et (33) dabunt

$$x=\frac{(c-x)\cdot x^2-y^2}{x(c-x)-y^2}, \quad y=\frac{2xy(c-x)}{x(c-x)-y^2},$$

quibus in (32) substitutis prodit aequatio

$$(c-x)^2x^2+y^2x^2=b^2x(c-x)-y^2x,$$

unde duae oriuntur aequationes loci quaesiti.

$$x^2+y^2=\frac{bcx}{b+c-x} \qquad (34)$$

$$x_1^2+y_1^2=\frac{bcx_1}{b-c+x_1}; \qquad (35)$$

si in hac distinguendi causa $x_1$, $y_1$ pro $x$, $y$ ponuntur.

Aequatio (34) dat

$$y=\pm\sqrt{\frac{x(x-b)(x-c)}{b+c-x}},$$

unde patet, ordinatam $y$ esse imaginariam, si $x$ est negativa, nec realem esse posse, nisi est $b+c>x>b$ aut $c>x$. Ordinata $y$ evadit infinita, si est $x=b+c$, et recta $x=b+c$ est ejus asymptota. Curva illa axem abscissarum in tribus punctis $x=0$, $x=b$, $x=c$ secat. Ea pars curvae, in qua est $x>c$, est finita, altera autem in infinitum excurrit.

Aequatione (35) soluta invenimus

$$y_1=\pm\sqrt{\frac{x_1(b+x_1)(c-x_1)}{b-c+x_1}},$$

unde liquet, axem abscissarum a curva in punctis $x=0$, $x=c$, $x=-b$ secari et abscissas positivas quantitate $c$ minores esse.

Si $x$ est negativa, necesse est, sit $b\geq -x>b-c$. Recta $x=b-c$ est asymptota. Si est $b=c$, aequatio (35) transit in

$$x_1^2+y_1^2=b^2,$$

quae est aequatio circuli dati. Curva (34) posita $b=c$ transit in

$$x^2+y^2=\frac{b^2x}{2b-x} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (36)$$

**III. Probl.** Invenire locum geometricum punctorum, ubi altitudines concurrunt.

Aequationes altitudinum sunt

$$y=(c-x)\operatorname{Cot}A, \quad y=x\operatorname{Cot}B \qquad \ldots\ldots \qquad (37)$$

Ope aequationum (32) et (37) inveniuntur:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{x(c-x)}{y};$$

qui valores in (31) substituti dabunt

$$x^2(c-x)^2 = y^2(b^2-x^2), \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

unde

$$y = \pm \frac{x(c-x)}{\sqrt{b^2-x^2}}.$$

Patet, fieri non posse, ut sit $x > b$, et curvam, quae, si est $x = c$, axem abscissarum secat quattuorque habet ramos infinitos, per originem transire. Haud difficulter perspicitur, rectas $x = \pm b$ esse asymptotas curvae.

Si est $b = c$, aequatio (38) transit in

$$y^2 = \frac{x^2(b-x)}{b+x}. \quad \ldots\ldots\ldots (39)$$

Curva, quae aequatione (39) continetur, a Francoeur*) jam nominatur de eaque disputavit C^us Boymann**). Ad ea, quae attulit, nihil habeo, quod addam, nisi quod superficies partis praeclusae aequalis est $2b^2 - \frac{\pi b^2}{2}$. Neque negligendum videtur, aequationem (36), si $b-x$ pro $x$ substituitur, mutari in

$$y^2 = \frac{x^2(b-x)}{b+x}$$

vel (39). Itaque curva (36) eadem est atque (39), sed oppositum habet situm.

**III. Probl.** Invenire locum geometricum centri gravitatis.

Facillime invenimus

$$\eta = 3y, \quad \xi = 3x - c;$$

qui valores in (31) substituti dabunt

$$y^2 + (x - \tfrac{c}{3})^2 = \frac{b^2}{9}, \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

quae est aequatio circuli.

---

*) Vid. Cours compl. de Mathématiques pures. Brux. 1838. Tom. II. pag. 383.

**) Vid. Grunert, Archiv der Mathematik. Tom. XV. pag. 205.

# XXVII.

## Miscellen.

### Noch zu der Kugel der mittleren Krümmung des Ellipsoids.

Von dem Herausgeber.

Für den Halbmesser $R$ und die Coordinaten $X$, $Y$, $Z$ des Mittelpunkts der Kugel der mittleren Krümmung des dreiaxigen Ellipsoids sind in Thl. XLII. Nr. XXVI. die folgenden sehr bemerkenswerthen Ausdrücke gefunden worden:

$$R = \frac{ab}{c}\left(\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2,$$

$$X = (a - b\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B})\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},$$

$$Y = (b - a\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B})\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},$$

$$Z = (c - \frac{ab}{c}\cdot\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B})\sin\mathfrak{B};$$

wo man über die Bedeutung von $L$, $B$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$ die Abhandlung Thl. XXXVI. Nr. VIII. nachzusehen hat.

Nach Thl. XXXVI. S. 92. Nr. 26) ist aber:

$$\operatorname{tang}\mathfrak{B} = c\sqrt{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2}\cdot\operatorname{tang}B,$$

also, weil

$$\sin\mathfrak{B}^2 = \frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}{1+\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}, \quad \cos\mathfrak{B}^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}$$

ist, wie man leicht findet:

$$\sin\mathfrak{B} = \frac{c\sqrt{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2}\,.\sin B}{\sqrt{\cos B^2 + c^2\left\{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2\right\}\sin B^2}},$$

$$\cos\mathfrak{B} = \frac{\cos B}{\sqrt{\cos B^2 + c^2\left\{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2\right\}\sin B^2}};$$

oder:

$$\sin\mathfrak{B} = \frac{c\sqrt{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2}\,.\sin B}{\sqrt{1 - \{1 - c^2\left[\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2\right]\}\sin B^2}},$$

$$\cos\mathfrak{B} = \frac{\cos B}{\sqrt{1 - \{1 - c^2\left[\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2\right]\}\sin B^2}}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$R = \frac{abc\left\{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2\right\}}{1 - \{1 - c^2\left[\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2\right]\}\sin B^2},$$

wo nach Thl. XXXVI. S. 91. Nr. 22) bekanntlich

$$\operatorname{tang}\mathfrak{L} = \frac{a}{b}\operatorname{tang} L$$

ist.

Für das Rotations-Ellipsoid ist $a = b$, und daher, wenn wir

$$e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

setzen:

$$R = \frac{c}{\sqrt{1 - e^2\sin B^2}},$$

$$X = a\left(1 - \frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)\cos L\cos\mathfrak{B},$$

$$Y = a\left(1 - \frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)\sin L\cos\mathfrak{B},$$

$$Z = c\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)\sin\mathfrak{B};$$

oder, weil

$$c = a\sqrt{1-e^2}$$

ist:

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin B^2},$$

$$X = \frac{2a\sin\frac{1}{2}(B-\mathfrak{B})\cos\frac{1}{2}(B+\mathfrak{B})}{\sin B}\cos L\cos\mathfrak{B},$$

$$Y = \frac{2a\sin\frac{1}{2}(B-\mathfrak{B})\cos\frac{1}{2}(B+\mathfrak{B})}{\sin B}\sin L\cos\mathfrak{B},$$

$$Z = \frac{a\{(1-e^2)\sin B-\sin\mathfrak{B}\}}{\sin B\sqrt{1-e^2}}\sin\mathfrak{B};$$

oder:

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin B^2},$$

$$X = \frac{2a\sin\frac{1}{2}(B-\mathfrak{B})\cos\frac{1}{2}(B+\mathfrak{B})}{\sin B}\cos L\cos\mathfrak{B},$$

$$Y = \frac{2a\sin\frac{1}{2}(B-\mathfrak{B})\cos\frac{1}{2}(B+\mathfrak{B})}{\sin B}\sin L\cos\mathfrak{B},$$

$$Z = \frac{2a\{\sin\frac{1}{2}(B-\mathfrak{B})\cos\frac{1}{2}(B+\mathfrak{B})-\frac{1}{2}e^2\sin B\}}{\sin B\sqrt{1-e^2}}\sin\mathfrak{B}.$$

Ich bemerke, dass im Falle des Rotations-Ellipsoids die obigen Ausdrücke von $R$ mit dem Ausdrucke für den Kugelhalbmesser ganz übereinstimmen, welcher sich Gauss bei der Entwickelung anderer Theorieen ergeben hat, wie man, um auf das Archiv selbst zu verweisen, aus der Abhandlung Thl. XIX. Nr. XXV. S. 368. des Herrn Professor Dienger ersehen kann. Auch s. m. namentlich in praktischer Rücksicht: Theoretisch-praktisches Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von Dr. J. Dienger. Stuttgart 1855. S. 322. Man wird die dort gebrauchten Bezeichnungen leicht mit den unsrigen vergleichen können und die Uebereinstimmung der Formeln dann sogleich übersehen.

Denken wir uns auf dem Rotations-Ellipsoid ein Trapez, welches von zwei den Längen $L_0$, $L_1$ entsprechenden Meridianen und von zwei den Breiten $B_0$, $B_1$ entsprechenden Parallelkreisen eingeschlossen wird, so müssen wir, um die Kugel der mittleren Krümmung für den durch die Länge $\frac{1}{2}(L_0+L_1)$ und die Breite $\frac{1}{2}(B_0+B_1)$ bestimmten Punkt dieses Trapezes zu bestimmen, in den obigen Formeln für $L$, $B$ respective $\frac{1}{2}(L_0+L_1)$, $\frac{1}{2}(B_0+B_1)$ setzen, und die reducirte Breite $\mathfrak{B}$ mittelst der Formel

$$\cot \mathfrak{B} = \frac{a}{c} \cot \tfrac{1}{2}(B_0 + B_1)$$

oder

$$\operatorname{tang} \mathfrak{B} = \frac{c}{a} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B_0 + B_1)$$

berechnen. Die den Breiten $B_0$, $B_1$ entsprechenden Normalen sind gegen die der mittleren Breite $\frac{1}{2}(B_0 + B_1)$ entsprechende Normale gleich geneigt.

Schliesst man einzelne Länder oder Landestheile in der vorhergehenden Weise möglichst enge in Trapezien ein, so kann man im obigen Sinne für jedes Land oder jeden Landestheil seine Kugel der mittleren Krümmung oder seine mittlere Krümmungskugel bestimmen. Weiteres hierüber gehört jetzt nicht hierher.

---

## Unmittelbarer und elementarer Beweis des Satzes von Beltrami. (Archiv Thl. XLII. S. 356.)

Von Herrn Professor Reuschle in Stuttgart.

Es sei für ein Dreieck $ABC$ $O$ der Mittelpunkt des inneren, $O_a$, $O_b$, $O_c$ die Mittelpunkte der äusseren Berührkreise, $K$ der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, $M$ derjenige des Kreises der 9 Punkte oder des „Mittenkreises", $X$ der Durchschnitt der Höhen, $S$ der Schwerpunkt; ferner seien $K'$, $M'$, $H'$, $S'$ dieselben Punkte für das Dreieck $O_a O_b O_c$. Nach der bekannten Relation zwischen diesen beiden Dreiecken ist der Punkt $M'$ mit $K$, der Punkt $X'$ mit $O$ identisch, mithin, da die drei Punkte $X'$, $M'$, $K'$ in Gerader ($M'$ in der Mitte der beiden andern) liegen, ist $K'KO$ eine Gerade, $K'K = KO$. Auf derselben Geraden liegt aber auch $S'$, und zwar so, dass $K'S' = \frac{1}{3}K'H' = \frac{2}{3}KO$, folglich $S'K = K'K - K'S' = \frac{1}{3}KO$. Stellt nun $S''$ den Schwerpunkt der vier gleichbelasteten Punkte $O_a$, $O_b$, $O_c$, $O$ vor, so ist $S''$ auch Schwerpunkt von $S'$ (der Schwerpunkt der drei Punkte $O_a$, $O_b$, $O_c$) und von $O$, sofern $S'$ als dreifach belastet gedacht wird, mithin ist $S'S'' = \frac{1}{4}S''O$, und folglich fällt $S''$ mit $K$ zusammen, da vorhin auch $S'K = \frac{1}{4}KO$ war.

---

## Druckfehler.

Im Literar. Ber. Nr. CLXX. (Thl. XLIII. Hft. 2.) S. 20. vorletzte Zeile s. m. „Schönbein" statt „Schönlein."

[illegible]

# XXVIII.

## Construction der Linien zweiter Ordnung aus ihrer allgemeinen Gleichung, und ein geometrischer Satz.

Von

[illegible]

Hauptmann im k. k. Ingenieur-Geschäfts-Stande, Professor der höheren Mathematik an der k. k. Genie-Akademie in Berlin [illegible]

---

Der in manchen Lehrbüchern [illegible] der Linien zweiter Ordnung mit der Construction ihrer allgemeinen Gleichung zu beginnen [illegible] erscheint mir [illegible] möglichst einfach und übersichtlich [illegible] gefundene Linie durch Punkte [illegible] unmittelbar anschliessenden Weise [illegible]

1. Die allgemeine Gleichung [illegible] zwischen den beiden Veränderlichen $x$ und $y$ [illegible] Glied in $y^2$ nicht fehlt [illegible] soll) auf die Form

$$1)\qquad y^2 + 2\beta xy + \alpha x^2 + 2cy + 2dx + e = 1$$

gebracht werden.

Um alle durch diese Gleichung ausgedrückten Linien in Bezug auf zwei angenommene schiefwinkelige Achsen zu construiren, verwandele man dieselbe in folgende

$$2)\qquad (y + \beta x + c)^2 = \varrho(x + h)^2 + \Delta$$

Die drei Constanten $\varrho$, $h$, $\Delta$ bestimmen sich aus den Relationen

$$\beta^2 - \varrho = \alpha,\quad \beta c - \varrho h = d,\quad c^2 - \varrho h^2 - \Delta = e$$

welche erhalten werden, wenn man die Gleichung 2) entwic und die Coefficienten ihrer Glieder mit jenen der gleichnam der Gleichung 1) identificirt. Man hat sonach

$$3) \qquad \varrho = \beta^2 - \alpha, \quad h = \frac{\beta c - d}{\varrho}, \quad \Delta = c^2 - \varrho h^2 - \theta.$$

Die Form 2) wird in einem einzigen Falle unmöglich, zwar dann, wenn $\varrho = \beta^2 - \alpha$ gleich Null wird, d. h. wenn drei Glieder vom zweiten Grade in der Gleichung 1)

$$y^2 + 2\beta xy + \alpha x^2$$

ein vollständiges Quadrat bilden.

In diesem Ausnahmsfalle kann nämlich das zweite Qua $\varrho(x+h)^2$ nicht mehr gebildet werden, weil für dasselbe k Glied in $x^2$ erübrigt wird. Anstatt der Gleichung 2) bekön man nunmehr

$$4) \qquad (y + \beta x + c)^2 = 2lx + \Delta,$$

wobei die Constanten $l$, $\Delta$ durch die Relationen

$$\beta c - l = d, \quad c^2 - \Delta = \theta,$$

d. i.

$$5) \qquad l = \beta c - d, \quad \Delta = c^2 - \theta$$

bestimmt werden.

## I. Allgemeiner Fall. $\varrho \gtrless 0$.

2. Betrachtet man zuerst den allgemeinen Fall, wenn $\varrho \gtrless$ ist, und setzt die in der Gleichung 2) vorkommenden linear Ausdrücke

$$6) \qquad \begin{cases} y + \beta x + c = p, \\ x + h = q; \end{cases}$$

so verwandelt sich selbe in

$$7) \qquad p^2 = \varrho q^2 + \Delta.$$

Man construire die beiden durch

$$p = 0 \text{ und } q = 0$$

ausgedrückten Geraden $(P)$ und $(Q)$; letztere ist zur Achse $y$ parallel. $p$ und $q$ bedeuten bekanntlich die beziehungsw

der $y$ und $x$ genommenen Abstände $PM$ und $QM$ (Taf. X
ides beliebigen Punktes $M(x, y)$ von den beiden Ge-
und $(Q)$.

it man jetzt die beiden Geraden $(P)$ und $(Q)$ zu Coor-
chsen und bezieht auf sie alle Punkte der Ebene mittelst
linaten $p$ und $q$, so reducirt sich die Untersuchung und
ion der Gleichung 2) auf die der einfacheren Gleichung 7).

ch die Art der in 7) enthaltenen Linien nach dem Vor-
on $\varrho$ und danach richtet, ob $\Delta$ positiv, negativ oder Null
nd, um Nichts ausser Acht zu lassen, sechs Fälle zu
iden, nämlich:

$$\varrho < 0, \text{ dabei } \begin{cases} \Delta > 0, \\ \Delta = 0, \\ \Delta < 0; \end{cases}$$

$$\varrho > 0, \text{ dabei } \begin{cases} \Delta > 0, \\ \Delta = 0, \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

n statt der absoluten Werthe von $\varrho$ und $\Delta$ beziehungs-
und $\gamma^2 a^2$ gesetzt wird, so enthält die Gleichung 7)
folgende besondere Formen:

$$\begin{cases} p^2 = -\gamma^2(q^2 - a^2), \\ p^2 = -\gamma^2 q^2, \\ p^2 = -\gamma^2(q^2 + a^2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2 = \gamma^2(q^2 + a^2), \\ p^2 = \gamma^2 q^2, \\ p^2 = \gamma^2(q^2 - a^2). \end{cases}$$

Gattung A). $\varrho < 0$, Ellipsen.

leichung: $p^2 = \gamma^2(a^2 - q^2)$.

eien $p'$ und $q'$ irgendzwei Werthe von $p$ und $q$, welche
ung befriedigen. Man ziehe die beiden zu $q = 0$ paral-
aden

$$q = q', \quad q = -q';$$

so die beiden zu $p = 0$ parallelen

$$p = p', \quad p = -p'.$$

Sie bilden augenscheinlich die Gegenseiten eines Parallelogrammes $M'M''M'''M^{IV}$ (Taf. X. Fig. 2.), dessen Ecken vier Punkte der (zu construirenden) Curve sind. Das erste Paar Gegenseiten wird von der Geraden $p = 0$, das letzte von der Geraden $q = 0$ halbirt; die beiden Geraden

$$p = 0, \quad q = 0$$

bilden somit ein Paar conjungirter Durchmesser der Curve.

Die Diagonalen $M'M'''$, $M''M^{IV}$ des Parallelogramms gehen durch den Schnittpunkt $C$ der beiden Geraden $(P)$, $(Q)$, und werden in diesem halbirt; $C$ ist demnach Mittelpunkt der Curve.

Der absolut grösste Werth, den $q$ annehmen kann, um noch reelle Werthe für $p$ zu liefern, ist $a$; für ihn wird $p = 0$. Der grösste Werth für $p$ dagegen ist $\gamma a$, und diesem entspricht $q = 0$. Die beiden zu $q = 0$ parallelen Geraden

$$q = a, \quad q = -a,$$

und die zu $p = 0$ parallelen

$$p = \gamma a, \quad p = -\gamma a$$

bilden mithin ein Parallelogramm $N'N''N'''N^{IV}$, das die Curve ganz in sich einschliesst, und dessen Seiten die Tangenten in den Punkten $A, A'$; $B, B'$ sind, in welchen die Curve die beiden Durchmesser $(P)$ und $(Q)$ schneidet.

Die Curve ist eine Ellipse.

4. Es ist wünschenswerth, die Curve in einer der Figur (Fig. 2) sich anpassenden Weise durch Punkte zu construiren. Man erreicht dies durch eine entsprechende Interpretation ihrer Gleichung

$$p^2 = \gamma^2(a^2 - q^2).$$

Bedeutet $\lambda$ eine willkürliche Constante, so kann die Curve als der geometrische Ort des Durchschnittspunktes der beiden (mit $\lambda$) gleichzeitig veränderlichen Geraden

$$p = \lambda\gamma(a + q),$$

und

$$\lambda p = \gamma(a - q)$$

angesehen werden. Von diesen enthält die erste den Schnittpunkt $A'$ der beiden Geraden $p = 0$, $q = -a$, die letzte den Schnittpunkt $A$ von $p = 0$, $q = a$; sie sind somit Supplementarsehnen des Durchmessers $A'A$.

Die erste Sehne schneidet den Durchmesser $q = 0$ auf der zu $p = 0$ parallelen Geraden $p = \lambda\gamma a$; die zweite trifft die Gerade $p = \gamma a$ in der zu $q = 0$ parallelen Geraden $q - a = -\lambda a$.

Diese beiden Parallelen bestimmen beziehungsweise auf dem Segmente $CB = \gamma a$, und dem zwischen $q - a = 0$ und $q = 0$ gelegenen Segmente $-a$, folglich auch auf $N'B$, proportionale Abschnitte.

Hieraus ergiebt sich eine bekannte Construction der Ellipse: Man ziehe, um den innerhalb des Parallelogrammes $CBN'A$ liegenden Theil der Curve zu erhalten, Parallelen $D'E'$, $D''E''$, $D'''E'''$,..... zur Diagonale $CN'$, und verbinde ihre Schnittpunkte $D'$, $D''$, $D'''$,.... auf $CB$ mit $A'$, ebenso $E'$, $E''$, $E'''$,.... auf $N'B$ mit $A$. Die Geraden $A'D'$ und $AE'$, $A'D''$ und $AE''$, u. s. w. schneiden sich jedesmal in einem Punkte der Ellipse.

Wenn endlich in den Gleichungen der beiden Supplementarsehnen des Durchmessers $AA'$ die Grösse $p$, oder $q$, oder beide gleichzeitig mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden, so entsteht durch Elimination der willkürlichen Constanten $\lambda$ jedesmal wieder die Gleichung der Curve. Hieraus folgen analoge Resultate für die Construction der in den Parallelogrammen $CB'N^{IV}A$, $CBN''A'$ und $CB'N'''A'$ gelegenen Theile der Curve.

5. Gleichung: $p^2 = -\gamma^2 q^2$.

Sie zerfällt in zwei Gleichungen vom ersten Grade

$$p = \gamma\sqrt{-1}.\, q \text{ und } p = -\gamma\sqrt{-1}.\, q,$$

und drückt somit ein imaginäres Paar von Geraden aus, deren gemeinsamer Punkt reell ist und mit dem Durchschnittspunkte $C$ der Geraden

$$p = 0, \quad q = 0$$

zusammenfällt.

6. Gleichung: $p^2 = -\gamma^2(q^2 + a^2)$.

Da sie von keinem einzigen reellen Coordinatenpaare $p$, $q$ befriedigt werden kann, so drückt sie eine imaginäre Curve (Ellipse) aus.

Gattung B). $\varrho > 0$. Hyperbeln.

7. Gleichung: $p^2 = \gamma^2 q^2$.

Sie zerfällt in zwei Gleichungen vom ersten Grade

$$p = \gamma q \text{ und } p = -\gamma . q,$$

und drückt somit ein Paar Gerade aus, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$p = 0 \text{ und } q = 0$$

gehen und mit diesen zwei harmonische Paare bilden.

8. Gleichung: $p^2 = \gamma^2(q^2 + a^2)$.

Auf dieselbe Weise, wie in 3., folgt, dass die beiden Geraden

$$p = 0, \quad q = 0$$

ein Paar conjugirter Durchmesser bilden, und dass ihr Schnittpunkt $C$ der Mittelpunkt der Curve ist.

Der absolut kleinste Werth, den $p$ annehmen kann, um noch reelle Werthe für $q$ zu liefern, ist $\gamma a$, und diesem entspricht $q = 0$. Die beiden zu $p = 0$ parallelen Geraden

$$p = \gamma a, \quad p = -\gamma a$$

enthalten demnach keinen reellen Punkt der Curve zwischen sich; sie sind Tangenten in den beiden Punkten $B$, $B'$ (Taf. X. Fig. 3.), wo die Curve die Gerade $(Q)$ trifft. Da endlich mit unbegrenzt wachsendem $q$ auch $p$ unbegrenzt wächst, so besteht die Curve aus zwei von einander getrennten, in's Unendliche gehenden Zweigen.

Sie ist eine Hyperbel.

9. Die beiden durch

$$p^2 = \gamma^2 q^2$$

ausgedrückten Geraden $(M)$ und $(N)$ sind die Asymptoten der Hyperbel. Denn sind $p'$ und $p''$ die (in dem nämlichen Sinne genommenen) Coordinaten $p$, welche in der Geraden $q = q'$ liegen, und von denen sich die eine auf die Hyperbel, die andere aber auf die betreffende Gerade $(M)$ oder $(N)$ bezieht, so ist

$$p'^2 - p''^2 = \gamma^2 a^2,$$

d. h.

$$p' - p'' = \frac{\gamma^2 a^2}{p' + p''}.$$

Der Unterschied $p' - p''$ nimmt hienach unbegrenzt ab, wenn $q'$, also auch $p'$ und $p''$, unbegrenzt zunehmen. Daher u. s. w.

Da ferner, absolut genommen, $p' > p''$ ist, so liegt die Hyperbel in den beiden Winkelräumen der Asymptoten, in denen der Durchmesser $(Q)$ sich befindet.

Die Asymptoten sind die Diagonalen des Parallelogramms $N'N''N'''N^{IV}$, dessen Gegenseiten durch die zwei Paare

$$p = \gamma a, \quad p = -\gamma a$$

und

$$q = a, \quad q = -a$$

gebildet werden. Denn die Coordinaten der Ecken dieses Parallelogramms befriedigen die Gleichungen der beiden Asymptoten

$$p = \mu q \text{ und } p = -\mu q,$$

die gleichbezeichneten Coordinaten die erstere, die ungleich bezeichneten die letztere Gleichung.

Die Asymptoten können demnach leicht construirt werden.

10. Man kann die Gleichung der Curve auf die Form

$$p - \mu q \quad p + \mu q = \nu^2 a^2$$

bringen, und zwei neue lineare Ausdrücke

$$p - \mu q = m, \quad p + \mu q = n$$

einführen, wodurch jene in

$$mn = \nu^2 a^2$$

übergeht. Die Curve ist nunmehr auf die beiden Geraden

$$m = 0 \text{ und } n = 0,$$

die offenbar ihre Asymptoten $(M)$ und $(N)$ sind, bezogen.

Setzt man ferner

$$\mu . m = t \text{ und } \nu . n = u,$$

wo $\mu$ und $\nu$ willkürliche Constanten seien, so entsteht aus der obigen Gleichung jedesmal

8) $$t . u = \text{const.}$$

Da nun, bei entsprechender Bestimmung von $\mu$ und $\nu$, $t$ und $u$ die Abstände jedes Punktes von den beiden Geraden $(M)$ und $(N)$ ausdrücken, wobei diese Abstände im Sinne irgend zweier festgesetzten Richtungen genommen werden können, so enthält die Gleichung 8) den bekannten Satz: **Dass das Produkt der Abstände jedes Punktes der Hyperbel von ihren beiden Asymptoten constant ist.**

Nimmt man insbesondere die Abstände $t$ und $u$ in **einer und derselben** Richtung und berücksichtiget, dass jedesmal, welchen Werth auch const. bekommen mag,

$$t = t', \quad u = u'$$

und

$$t = -u', \quad u = -t'$$

Werthepaare sind, die **gleichzeitig** die Gleichung der Curve befriedigen, so ergiebt sich daraus der allbekannte **Satz** von der Gleichheit der Segmente zwischen den Asymptoten und der Curve

und endlich die einfachste Construction der Hyperbel mit Hülfe der Asymptoten.

11. Gleichung: $p^2 = \gamma^2(q^2 - a^2)$.

Die Geraden

$$p = 0, \quad q = 0$$

bilden ein Paar conjugirter Durchmesser, und ihr Schnittpunkt $C$ ist der Mittelpunkt der Curve.

Die beiden zu $q = 0$ parallelen Geraden

$$q = a, \quad q = -a$$

enthalten keinen reellen Punkt der Curve zwischen sich, und berühren diese in den Endpunkten $A, A'$ des Durchmessers $(P)$. Die Curve ist eine Hyperbel, deren Asymptoten (wie oben) durch

$$p^2 = \gamma^2 q^2$$

ausgedrückt sind. Da jedoch jetzt $p' < p''$ ist, so befindet sich die Curve in den beiden Winkelräumen der Asymptoten, welche den Durchmesser $(P)$ enthalten. U. s. f.

## II. Besonderer Fall. $\varrho = 0$.

12. Gleichung: $p^2 = 2lr$. Parabeln.

Die Gleichung 4) kann, so lange $l$ nicht Null wird, auf die Form

$$(y + \beta x + c)^2 = 2l(x + \frac{\Delta}{2l})$$

gebracht, und abgekürzt durch

$$p^2 = 2lr$$

ausgedrückt werden.

Man construire die beiden durch

$$p = 0 \text{ und } r = 0$$

ausgedrückten Geraden $(P)$ und $(R)$.

Jedem Werthe des $r$ entsprechen zwei absolut gleiche, aber entgegengesetzt bezeichnete Werthe des $p$. Die Gerade

$$p = 0$$

ist mithin ein Durchmesser der Curve. $p$ wird reell für alle Werthe, die mit $l$ gleiches Vorzeichen besitzen, sonst imaginär. Hieraus folgt, dass die Curve ganz auf einer Seite der Geraden

$$r = 0$$

liegt, und zwar auf jener der positiven oder negativen $r$ (d. i. im Sinne der ursprünglichen $x$), jenachdem $l$ positiv oder negativ ist.

Für $r = 0$ wird $p = 0$ und, wenn $r$ unbegrenzt wächst, thut es auch $p$. Die Curve wird demnach von der Geraden $(R)$ im Durchschnitte $S$ dieser mit der Geraden $(P)$ berührt und geht in's Unendliche.

Sie ist eine Parabel.

13. Mittelst der beiden Geraden $(P)$ und $(R)$ kann die Curve leicht construirt werden. Sie kann angesehen werden als der Ort des Durchschnittspunktes $M$ der beiden gleichzeitig veränderlichen Geraden

$$p = \lambda r$$

und

$$\lambda p = 2l,$$

von denen die erste, bei veränderlichem $\lambda$, sich um den Punkt $S$ (Taf. X. Fig. 4.) dreht, während die letzte parallel zur Geraden $(P)$ fortrückt.

Die um $S$ sich drehende Gerade schneidet irgend eine gegebene, zu $p = 0$ parallele Gerade $p = p'$ auf der zu $r = 0$ parallelen Geraden

$$\lambda r = p'.$$

Für diese und die zu $(P)$ parallele Gerade

$$\lambda p = 2l$$

ist folglich das Verhältniss

$$\frac{p}{r} = \text{const.}$$

Sind $p'$, $r'$ die Coordinaten eines Punktes $M'$ der Parabel, so ist

$$p'^2 = 2lr',$$

also

$$\text{const.} = \frac{2l}{p'} = \frac{p'}{r'}.$$

Die beiden zuletzt genannten Parallelen zu $(R)$ und $(P)$ theilen mithin die Seiten $SR$ und $RM'$ des über $(R)$ und $(P)$ beschriebenen Parallelogramms $SRM'P$ proportional, woraus eine bekannte, einfache Construction der Curve hervorgeht.

14. Gleichung: $p^2 = \text{const.}$

Wenn in der Gleichung 4) der Coefficient $l$ Null wird, so re ducirt sich dieselbe auf

$$(y + \beta x + c)^2 = \Delta, \tag{9}$$

d. i.

$$p^2 = \Delta,$$

und bedeutet somit ein Paar zu

$$p = 0$$

parallele und symmetrisch liegende Gerade.

Wenn $\Delta = 0$ wird, so vereinigen sie sich in der Gerade $p = 0$; für $\Delta < 0$ werden sie imaginär.

## Weitere Fälle.

15. Zur vollständigen Untersuchung der allgemeinen Gleichu des zweiten Grades fehlt noch die Betrachtung derjenigen Fäl bei denen das Glied in $y^2$ nicht vorkommt. Hier sind zw Fälle zu unterscheiden:

1. Es fehlt das Glied in $xy$ nicht, oder
2. es fehlt.

Im ersten Falle kann die Gleichung auf die Form

$$xy + \alpha x^2 + by + cx + \theta = 0 \tag{10}$$

gebracht werden, im zweiten Falle hingegen auf

$$x^2 + 2mx + 2ny + \theta = 0. \tag{11}$$

16. Gleichung: $mn = \text{const.}$

Die Gleichung

$$xy + \alpha x^2 + by + cx + \theta = 0$$

kann umgeformt werden in

$$(x + b)(y + \alpha x + h) = \text{const.}$$

wobei die Constanten $h$ und const. durch

$$h + \alpha b = c, \quad bh - \text{const} = \theta,$$

d. i.

[redacted]

gegeben sind.

Setzt man die lineare [redacted]

so verwandelt sich die [redacted]

Die hierdurch [redacted] Asymptoten der neuen Curve

sind. (Art. 86) Die [redacted]

Wenn [redacted] Asymptoten.

17. Gleichung $x^2 = -2y$

Die Gleichung

kann auf die Form

gebracht werden, wenn die [redacted]

ist.

Setzt man [redacted]

so entsteht

$$x^2 = -2y$$

Die Curve ist somit eine Parabel [redacted], die auf die [redacted] zu den Coordinatenachsen parallelen Geraden

$$x = 0 \text{ und } y = 0$$

bezogen ist.

Wenn die Constante a Null wird, so [redacted] in ein Paar zur y-Achse paralleler Geraden

**Geometrischer Satz.**

Wenn sich die Seiten eines veränderlichen Vierecks um vier feste, in einer Geraden liegende Punkte drehen, während gleichzeitig die Durchschnittspunkte der Gegenseiten in einer anderen Geraden fortrücken, so drehen sich die beiden Diagonalen des Vierecks ebenfalls um feste, in der ersten Geraden liegende Punkte.

Beweis. Es seien (Taf. X. Fig. 5.) in der Geraden $(Q)$ vier feste Punkte $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, um welche sich die Gegenseiten $MN$ und $M'N'$, $MN'$ und $NM'$ des Vierecks $MNM'N'$ drehen; ferner sei $(P)$ die Gerade, welche die Schnittpunkte $P$, $P'$ jener enthält.

Nimmt man vorerst $P$ als fest an und lässt $P'$ auf $(P)$ fortrücken, so bilden $BP'$ und $B'P'$ einander entsprechende Strahlen zweier collinearen Büschel, folglich (auf $AP$ und $A'P$) $M$ und $M'$, $N$ und $N'$ einander entsprechende Punkte zweier collinearen Punktereihen. Im Durchschnitte $P$ der beiden Geraden $AP$ und $A'P$ sind ferner jedesmal zwei einander entsprechende Punkte vereiniget, folglich gehen die Geraden $MM'$ und $NN'$ durch feste Punkte $C$ und $C'$. Diese liegen in der Geraden $(Q)$, weil $AA'$ eine besondere Lage, sowohl von $MM'$, als $NN'$ abgibt.

Die drei Paare $A$, $A'$; $B$, $B'$; $C$, $C'$ bilden (nach einem allbekannten Satze) eine Involution.

Hält man $P'$ fest und lässt $P$ die Gerade $(P)$ durchlaufen, so drehen sich die Diagonalen $MM'$ und $NN'$ wieder um $C$ und $C'$.

Daher u. s. w.

Wenn die Gerade $(P)$ in unendlicher Ferne vorausgesetzt wird, so ist $MNM'N'$ ein Parallelogramm. Also:

Wenn sich die Seiten eines Parallelogramms um vier feste, in einer Geraden liegende Punkte drehen, so drehen sich auch die Diagonalen um feste Punkte in derselben Geraden.

Es lässt sich sehr einfach zeigen, dass die Punkte $C$ und $C'$ die Centralpunkte der zwei Involutionen sind, welche beziehungsweise durch die Paare $A$, $B$; $A'$, $B'$ und $A$, $B'$; $A'$, $B$ bestimmt werden.

(Vgl. meine Principien der neueren Geometrie. S. 119.)

Wie heisst der reciproke Satz?

# XXIX.

## Ueber die allgemeine Theorie der Centralbewegung.

Von

dem Herausgeber.

Die allgemeine Theorie der Centralbewegung wird in den Lehrbüchern der Mechanik meistens nicht mit der Sorgfalt und Vollständigkeit behandelt, welche dieselbe ihrer grossen Wichtigkeit wegen für sich in Anspruch zu nehmen berechtigt ist; namentlich werden mehrere weniger bekannte sehr bemerkenswerthe und elegante allgemeine Sätze und Formeln, welche sehr oft zur wesentlichen Abkürzung hierher gehörender Untersuchungen dienen können, nur selten bewiesen. Zur Vervollständigung der gangbaren Lehrbücher der Mechanik will ich daher in diesem Aufsatze die genannte wichtige allgemeine Theorie in möglichst vollständiger Weise von Neuem entwickeln.

### §. 1.

Wenn die Bewegung eines Punktes $A$ durch das Zusammenwirken einer Momentankraft $F$ und einer durch die Charakteristik $F_t$ als Function der Zeit $t$ bestimmten oder wenigstens ursprünglich gedachten, hier stets als positiv betrachteten Zeitkraft*) hervorgebracht wird, und die Zeitkraft $F_t$ der Bedingung unterliegt, dass die gerade Linie, in welcher ihre Richtung liegt, fort-

*) Wegen dieser Begriffe und Benennungen s. m. Thl. XXI. S. 432.

während, nämlich zu jeder beliebigen Zeit $t$ oder in jedem Zeitmomente, durch denselben bestimmten Punkt $O$ geht; so wird diese Bewegung im Allgemeinen eine Centralbewegung genannt, und der Punkt $O$ heisst ihr Centrum oder ihr Mittelpunkt; die Kraft $F_t$ selbst aber wird eine Centralkraft genannt. Jede von dem Mittelpunkte $O$ nach dem sich bewegenden Punkte $A$ in irgend einem Punkte seiner Bahn oder Trajectoria gezogene Gerade heisst ein Vector.

Die Zeitkraft $F_t$ ist natürlich wenigstens ursprünglich als eine Function der Zeit $t$ zu denken oder zu betrachten; indessen wird die Charakteristik $F_t$ nicht immer ursprünglich als eine entwickelte Function der Zeit gegeben, sondern das Gesetz derselben wird öfters auf andere Weise bestimmt, was namentlich bei den verschiedenen besonderen Arten der Centralbewegung, die in der Mechanik betrachtet werden und in der Natur vorkommen, der Fall zu sein pflegt, wo $F_t$ gewöhnlich als eine Function der Entfernung des sich bewegenden Punktes $A$ zu jeder beliebigen Zeit $t$ von dem Mittelpunkte $O$ der Bewegung, d. h. als eine Function des von dem Mittelpunkte $O$ der Bewegung zur Zeit $t$ nach dem sich bewegenden Punkte $A$ gezogenen Vectors, den wir im Folgenden durch $R_t$ bezeichnen werden *), gegeben wird. Dieser Umstand namentlich macht es nothwendig oder wenigstens sehr wünschenswerth, der Behandlung besonderer Fälle der Centralbewegung eine ganz allgemeine Theorie dieser Bewegung vorausgehen zu lassen, bei welcher die Kraft $F_t$, ganz abgesehen von dem Gesetz der Veränderung ihrer Intensität, bloss der einzigen Bedingung unterworfen wird, dass die Geraden, in welcher ihre Richtungen liegen, immer durch ein und denselben Punkt $O$ gehen.

## §. 2.

Der Einfachheit wegen nehmen wir den Mittelpunkt $O$ der Bewegung als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $xyz$ im Raume an. Bezeichnen wir dann die 180° nicht

*) Die Bezeichnung $F_t$, $R_t$ u. s. w. mit den Symbolen unten bei gefügtem $t$ ist zwar, wie ich gern zugebe, etwas weitläufig und schwerlich, aber nach meiner aus reiflicher Ueberlegung hervorgegangenen Ueberzeugung nicht zu umgehen, wenn jedwede Zweideutigkeit vermieden und völlige Bestimmtheit erzielt werden soll, in einzelnen Fällen übrigens ganz unentbehrlich. Ich habe dieselbe daher schon der Symmetrie wegen durchgängig angewendet; wem sie nicht zusagt, möge die $t$ weglassen!

übersteigenden Winkel, welche die Richtung der Kraft $F_t$ zur Zeit $t$ mit den positiven Theilen der Axen der $x$, $y$, $z$ einschliesst, durch $\varphi_t$, $\psi_t$, $\chi_t$; so sind:

$$1) \ldots\ldots \quad \frac{x}{\cos\varphi_t} = \frac{y}{\cos\psi_t} = \frac{z}{\cos\chi_t}$$

die Gleichungen der Geraden, in welcher zur Zeit $t$ die Richtung der Kraft $F_t$ liegt. Bezeichnen wir also den Punkt, in welchem sich der Punkt $A$ zur Zeit $t$ befindet, durch $x_t y_t z_t$, so haben wir nach 1) die Gleichungen

$$2) \ldots\ldots \quad \frac{x_t}{\cos\varphi_t} = \frac{y_t}{\cos\psi_t} = \frac{z_t}{\cos\chi_t}.$$

Indem ich nun hier ein für alle Mal rücksichtlich der Bedeutung der meisten der in dieser Abhandlung gebrauchten Zeichen auf meine Abhandlung Thl. XXI. Nr. XXXI., deren vollständige Kenntniss hier vorausgesetzt wird, und auf welcher die vorliegende Abhandlung ganz beruhet, verweise: haben wir wie gewöhnlich*) die folgenden Gleichungen:

$$3) \ldots \quad X_t = F_t \cos\varphi_t, \quad Y_t = F_t \cos\psi_t, \quad Z_t = F_t \cos\chi_t;$$

aus denen sich:

$$4) \ldots\ldots \quad \frac{X_t}{\cos\varphi_t} = \frac{Y_t}{\cos\psi_t} = \frac{Z_t}{\cos\chi_t} = F_t,$$

also, wenn man diese Gleichungen mit 1) vergleicht, durch Division:

$$5) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{x_t}{X_t} = \frac{y_t}{Y_t} = \frac{z_t}{Z_t}$$

oder:

$$6) \ldots\ldots\ldots \quad x_t : y_t : z_t = X_t : Y_t : Z_t$$

ergiebt; und weil nun bekanntlich**):

$$X_t = \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}, \quad Y_t = \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}, \quad Z_t = \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2}$$

ist; so ist:

$$7) \ldots\ldots\ldots \quad x_t : y_t : z_t = \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} : \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} : \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2},$$

---

*) Thl. XXI. Nr. XXXI. S. 432. 2).

**) Thl. XXI. Nr. XXXI. S. 433. 6).

woraus sich die drei Gleichungen:

$$x_t \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - y_t \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} = 0,$$

$$y_t \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2} - z_t \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} = 0,$$

$$z_t \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} - x_t \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2} = 0;$$

oder:

$$(x_t \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} + \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_t}{\partial t}) - (y_t \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} + \frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial y_t}{\partial t}) = 0,$$

$$(y_t \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2} + \frac{\partial z_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial y_t}{\partial t}) - (z_t \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} + \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial z_t}{\partial t}) = 0,$$

$$(z_t \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} + \frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial z_t}{\partial t}) - (x_t \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2} + \frac{\partial z_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_t}{\partial t}) = 0;$$

also:

$$\partial . x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - \partial . y_t \frac{\partial x_t}{\partial t} = 0,$$

$$\partial . y_t \frac{\partial z_t}{\partial t} - \partial . z_t \frac{\partial y_t}{\partial t} = 0,$$

$$\partial . z_t \frac{\partial x_t}{\partial t} - \partial . x_t \frac{\partial z_t}{\partial t} = 0;$$

und folglich durch Integration, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gewisse Constante bezeichnen, die Gleichungen:

$$x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t} = \mathfrak{A},$$

$$y_t \frac{\partial z_t}{\partial t} - z_t \frac{\partial y_t}{\partial t} = \mathfrak{B},$$

$$z_t \frac{\partial x_t}{\partial t} - x_t \frac{\partial z_t}{\partial t} = \mathfrak{C}$$

ergeben. Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe $z_t$, $x_t$, $y_t$ und addirt sie dann zu einander, so erhält man Gleichung:

$$\mathfrak{A} z_t + \mathfrak{B} x_t + \mathfrak{C} y_t = 0,$$

aus der sich ergiebt, dass für jede Zeit $t$, also ganz allgem der Punkt $(x_t y_t z_t)$ in der durch den Punkt $O$ als Anfang Coordinaten gehenden, durch die Gleichung:

8) . . . . . $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}y = 0$

charakterisirten Ebene liegt. Wir haben daher den folgenden

**Satz.**

**Bei jeder Centralbewegung ist die Bahn oder Trajectoria eine Curve von einfacher Krümmung, und in der Ebene der Bahn liegt jederzeit auch der Mittelpunkt der Bewegung.**

Dieser Satz berechtigt uns, bei der Entwickelung der allgemeinen Theorie der Centralbewegung der Einfachheit wegen die Ebene, in welcher die ganze Bewegung vor sich geht, oder die Ebene der Bahn, selbst als Ebene der $xy$ und den in dieser Ebene liegenden Mittelpunkt $O$ der Bewegung wieder als Anfang der $xy$ anzunehmen, überhaupt also die ganze analytische Betrachtung auf diese eine Ebene zu beschränken und in derselben vorzunehmen. Unter dieser Voraussetzung reichen wir nun bei unserer ganzen Untersuchung über die allgemeine Theorie der Centralbewegung mit den folgenden, aus dem Vorhergehenden sich von selbst ergebenden Grundformeln aus:

9) . . . . . $X_t = \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}, \quad Y_t = \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2};$

und:

10) . . . . . $x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t} = \mathfrak{A}$

oder:

11) . . . . . $x_t \partial y_t - y_t \partial x_t = \mathfrak{A} \partial t,$

wo stets $\mathfrak{A}$ eine gewisse Constante bezeichnet.

§. 3.

Statt eines rechtwinkligen Coordinatensystems legen wir aber der allgemeinen Theorie der Centralbewegung mit ganz besonderem Vortheil ein polares Coordinatensystem zu Grunde, und setzen demzufolge:

12) . . . . . $x_t = R_t \cos \theta_t, \quad y_t = R_t \sin \theta_t;$

wo $\theta_t$ den von dem Vector $R_t$ mit dem positiven Theile der Axe der $x$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet, indem dieser Winkel von dem positiven Theile der Axe der $x$ an durch den rechten

Winkel $(xy)$ hindurch oder nach dem positiven Theile der Axe der $y$ hin von 0 bis 360° gezählt wird, aber bemerkt und bestimmt hervorgehoben werden muss, dass der positive Theil der Axe der $x$ durch jede ganz beliebige von dem Mittelpunkte $O$ der Bewegung ausgehende Gerade ersetzt und auch die Richtung, nach welcher die Winkel $\theta_t$ von dieser Geraden an von 0 bis 360° gezählt werden, an sich ganz beliebig gewählt werden kann.

Durch Differentiation ergiebt sich aus den Gleichungen 12):

$$13) \quad \ldots \quad \begin{cases} \partial x_t = \cos\theta_t \partial R_t - R_t \sin\theta_t \partial\theta_t, \\ \partial y_t = \sin\theta_t \partial R_t + R_t \cos\theta_t \partial\theta_t; \end{cases}$$

also, wenn man diese Ausdrücke für $\partial x_t$, $\partial y_t$ und die Ausdrücke 12) von $x_t$, $y_t$ in die Gleichung 11) einführt, nach einigen ganz leichten Reductionen:

$$14) \quad \ldots \quad R_t^2 \partial\theta_t = \mathfrak{A}\partial t, \quad \partial t = \frac{R_t^2 \partial\theta_t}{\mathfrak{A}}, \quad \partial\theta_t = \frac{\mathfrak{A}\partial t}{R_t^2};$$

von welchen Formeln im Folgenden vielfacher Gebrauch gemacht werden wird.

## §. 4.

Bekanntlich ist allgemein:

$$X_t = F_t \cos\varphi_t, \quad Y_t = F_t \cos\psi_t.$$

Wenn die Kraft $F_t$ von dem Punkte $(x_t y_t)$ aus nach dem Punkte $O$ hin, sondern nach der entgegengesetzten Seite hin oder abwärts von demselben gerichtet ist, so ist offenbar:

$$x_t = R_t \cos\varphi_t, \quad y_t = R_t \cos\psi_t.$$

Wenn dagegen die Kraft $F_t$ von dem Punkte $(x_t y_t)$ aus nach dem Punkte $O$ hin gerichtet ist, so ist offenbar:

$$x_t = R_t \cos(180^0 - \varphi_t), \quad y_t = R_t \cos(180^0 - \psi_t);$$

also:

$$x_t = -R_t \cos\varphi_t, \quad y_t = -R_t \cos\psi_t.$$

Folglich ist:

$$15) \quad \ldots \quad x_t = \pm R_t \cos\varphi_t, \quad y_t = \pm R_t \cos\psi_t;$$

wenn man in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Kraft $F_t$ von dem Punkte $(x_t y_t)$ aus ab-

wärts von dem Punkte $O$ oder nach demselben hin gerichtet ist. Verbindet man mit diesen Gleichungen die obigen Ausdrücke von $X_t$, $Y_t$; so erhält man durch Division die Gleichungen:

$$\frac{X_t}{x_t} = \pm\frac{F_t}{R_t}, \quad \frac{Y_t}{y_t} = \pm\frac{F_t}{R_t};$$

oder:

16) . . . . . $R_t X_t = \pm F_t x_t, \quad R_t Y_t = \pm F_t y_t;$

wo natürlich ganz dieselben Bestimmungen wegen der Vorzeichen gelten wie vorher. Betrachtet man von nun an aber die Kraft $F_t$ nicht mehr wie bisher (§. 1.) bloss als positiv, sondern als positiv oder negativ, jenachdem dieselbe von dem Punkte $(x_t y_t)$ aus nach dem Punkte $O$ hin oder abwärts von demselben gerichtet ist, oder, wie wir in der Kürze sagen wollen, jenachdem dieselbe eine anziehende Kraft oder eine abstossende Kraft ist; so erhält man aus den Formeln 16) offenbar die ganz allgemein gültigen Gleichungen:

17) . . . . . $R_t X_t = -F_t x_t, \quad R_t Y_t = -F_t y_t.$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$F_t x_t^2 = -R_t x_t X_t, \quad F_t y_t^2 = -R_t y_t Y_t;$$

also durch Addition:

$$F_t(x_t^2 + y_t^2) = -R_t(x_t X_t + y_t Y_t),$$

oder, weil offenbar

$$x_t^2 + y_t^2 = R_t^2$$

ist:

18) . . . . . $R_t F_t = -(x_t X_t + y_t Y_t),$

eine in mehrfacher Rücksicht bemerkenswerthe und wichtige Gleichung.

Aus den bekannten Gleichungen:

19) . . . . . $x_t = R_t \cos\theta_t, \quad y_t = R_t \sin\theta_t$

erhält man wie im vorhergehenden Paragraphen:

20) . . . . $\begin{cases} \dfrac{\partial x_t}{\partial t} = \cos\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial t} - R_t \sin\theta_t \dfrac{\partial \theta_t}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial y_t}{\partial t} = \sin\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial t} + R_t \cos\theta_t \dfrac{\partial \theta_t}{\partial t}; \end{cases}$

und hieraus ferner:

21)

$$\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} = \cos\theta_t \left\{ \frac{\partial^2 R_t}{\partial t^2} - R_t \left(\frac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2 \right\} - \sin\theta_t \left\{ 2\frac{\partial R_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \theta_t}{\partial t} + R_t \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial t^2} \right.$$

$$\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} = \sin\theta_t \left\{ \frac{\partial^2 R_t}{\partial t^2} - R_t \left(\frac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2 \right\} + \cos\theta_t \left\{ 2\frac{\partial R_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \theta_t}{\partial t} + R_t \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial t^2} \right.$$

Weil nun aber nach 14)

$$R_t^2 \frac{\partial \theta_t}{\partial t} = \mathfrak{A}$$

ist, so ist, wie man sogleich durch Differention findet:

$$R_t\left(2\frac{\partial R_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \theta_t}{\partial t} + R_t \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial t^2}\right) = 0,$$

also

$$2\frac{\partial R_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \theta_t}{\partial t} + R_t \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial t^2} = 0,$$

und folglich nach 21):

22) . . . .
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} = \cos\theta_t \left\{ \dfrac{\partial^2 R_t}{\partial t^2} - R_t \left(\dfrac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2 \right\}, \\ \dfrac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} = \sin\theta_t \left\{ \dfrac{\partial^2 R_t}{\partial t^2} - R_t \left(\dfrac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2 \right\}; \end{cases}$$

also nach 9):

23) . . . .
$$\begin{cases} X_t = \cos\theta_t \left\{ \dfrac{\partial^2 R_t}{\partial t^2} - R_t \left(\dfrac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2 \right\}, \\ Y_t = \sin\theta_t \left\{ \dfrac{\partial^2 R_t}{\partial t^2} - R_t \left(\dfrac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2 \right\}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 18), 19), 23) ergiebt sich nun unmittbar die merkwürdige und wichtige Gleichung:

24) . . . . . $F_t = R_t \left(\dfrac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 R_t}{\partial t^2}$,

bei der natürlich die wegen des Vorzeichens von $F_t$ oben gebene Bestimmung stets wohl zu beachten ist.

Aus den beiden Gleichungen 20) ergiebt sich auf der Ste

$$\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial R_t}{\partial t}\right)^2 + R_t^2 \left(\frac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2,$$

und weil bekanntlich *):

$$\mathfrak{v}_t = \sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}$$

ist, so ist:

$$25) \ldots\ldots \mathfrak{v}_t = \sqrt{\left(\frac{\partial R_t}{\partial t}\right)^2 + R_t^2\left(\frac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2},$$

welcher Ausdruck für die erlangte Geschwindigkeit ebenfalls sehr wichtig ist.

Endlich erhält man mittelst der bekannten allgemeinen Formeln **):

$$\cos\xi_t = \frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}}, \quad \cos\eta_t = \frac{\frac{\partial y_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}}$$

nach 20) und 25) sogleich die folgenden gleichfalls sehr wichtigen Ausdrücke:

$$26) \ldots\ldots \begin{cases} \cos\xi_t = \dfrac{\cos\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial t} - R_t \sin\theta_t \dfrac{\partial \theta_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial R_t}{\partial t}\right)^2 + R_t^2\left(\dfrac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2}}, \\ \cos\eta_t = \dfrac{\sin\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial t} + R_t \cos\theta_t \dfrac{\partial \theta_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial R_t}{\partial t}\right)^2 + R_t^2\left(\dfrac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2}}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir aber durch $\xi_t$ den von der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$ mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt $(x_t y_t)$ parallel mit dem primitiven Systeme der $xy$ gelegten Coordinatensystems eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der in Rede stehenden ersten Axe an nach dem positiven Theile der entsprechenden zweiten Axe hin oder durch den entsprechenden Coordinatenwinkel hindurch von 0 bis 360° zählen; so ist nach einem bekannten, allgemein gültigen Verfahren in den Formeln 26) für $\cos\xi_t$, $\cos\eta_t$ respective $\cos\xi_t$, $\sin\xi_t$ zu setzen, wodurch sich die Formeln:

*) Thl. XXI. Nr. XXXI. S. 439. 20), auf welche Abhandlung schon oben ein für allemal verwiesen worden ist.

**) A. a. O. S. 439. 21).

$$27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\xi_t = \dfrac{\cos\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial t} - R_t \sin\theta_t \dfrac{\partial\theta_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial R_t}{\partial t}\right)^2 + R_t^2\left(\dfrac{\partial\theta_t}{\partial t}\right)^2}}, \\ \sin\xi_t = \dfrac{\sin\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial t} + R_t \cos\theta_t \dfrac{\partial\theta_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial R_t}{\partial t}\right)^2 + R_t^2\left(\dfrac{\partial\theta_t}{\partial t}\right)^2}} \end{array} \right.$$

ergeben, die dann ferner unmittelbar zu der Gleichung:

$$28) \quad \tang\xi_t = \frac{\sin\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial t} + R_t \cos\theta_t \dfrac{\partial\theta_t}{\partial t}}{\cos\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial t} - R_t \sin\theta_t \dfrac{\partial\theta_t}{\partial t}}$$

führen. Dass in den Formeln 26) und 27), 28) durch $\xi_t$ nicht ein und derselbe Winkel bezeichnet wird, braucht wohl nicht erst noch besonders hervorgehoben und bemerkt zu werden.

## §. 5.

Aus den im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln wollen wir nun die Zeit $t$ insofern ganz eliminiren, dass die vorkommenden Differentialquotienten nicht wie dort in Bezug auf die Zeit $t$ als unabhängige veränderliche Grösse, sondern in Bezug auf andere als unabhängig gedachte veränderliche Grössen, welche, wie z. B. $\theta_t$, als reine geometrische Grössen nothwendig in der Gleichung der Bahn oder Trajectoria vorkommen und dieselbe bestimmen müssen, genommen sind, was deshalb sehr wichtig ist, weil dadurch eine bloss geometrische Theorie jeder Centralbewegung vermittelt wird.

Indem wir aus diesem Gesichtspunkte zuerst die Kraft $F_t$ einer genauen Betrachtung unterziehen, gehen wir von der Formel 24), nämlich von der Formel

$$F_t = R_t\left(\frac{\partial\theta_t}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial^2 R_t}{\partial t^2},$$

aus. Nach 14) ist:

$$29) \quad \frac{\partial\theta_t}{\partial t} = \frac{\mathfrak{A}}{R_t^2},$$

also:

$$30) \quad \ldots \quad \frac{\partial R_t}{\partial t} = \frac{\partial R_t}{\partial \theta_t} \cdot \frac{\partial \theta_t}{\partial t} = \frac{\mathfrak{A}}{R_t^2} \cdot \frac{\partial R_t}{\partial \theta_t} = -\mathfrak{A} \frac{\partial \left(\frac{1}{R_t}\right)}{\partial \theta_t},$$

und folglich:

$$31) \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 R_t}{\partial t^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial R_t}{\partial t}\right)}{\partial \theta_t} \cdot \frac{\partial \theta_t}{\partial t} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{R_t^2} \cdot \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R_t}\right)}{\partial \theta_t^2}.$$

Führt man die Ausdrücke 29) und 31) in den obigen Ausdruck von $F_t$ ein, so erhält man:

$$32) \quad \ldots \ldots \quad F_t = \frac{\mathfrak{A}^2}{R_t^2} \left\{ \frac{1}{R_t} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R_t}\right)}{\partial \theta_t^2} \right\},$$

oder auch, weil nach 30):

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{R_t}\right)}{\partial \theta_t} = -\frac{1}{R_t^2} \cdot \frac{\partial R_t}{\partial \theta_t},$$

und folglich:

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R_t}\right)}{\partial \theta_t^2} = \frac{2}{R_t^3} \cdot \left(\frac{\partial R_t}{\partial \theta_t}\right)^2 - \frac{1}{R_t^2} \cdot \frac{\partial^2 R_t}{\partial \theta_t^2}$$

ist:

$$33) \quad \ldots \quad F_t = \frac{\mathfrak{A}^2}{R_t^3} \left\{ 1 + \frac{2}{R_t^2} \cdot \left(\frac{\partial R_t}{\partial \theta_t}\right)^2 - \frac{1}{R_t} \cdot \frac{\partial^2 R_t}{\partial \theta_t^2} \right\}.$$

Ist also die Gleichung der Bahn oder Trajectoria etwa in der Weise gegeben, dass, wie bei jeder Polargleichung, $R_t$ durch $\theta_t$ ausgedrückt ist, so kann mittelst der vorstehenden Formeln $F_t$ unmittelbar aus der Gleichung der Bahn entwickelt, und durch in derselben vorkommende geometrische Grössen ausgedrückt werden, wobei man freilich nicht unbeachtet lassen darf, dass in allen diesen Formeln die Constante $\mathfrak{A}$ vorkommt, was in unseren früheren Formeln nicht der Fall war *)

---

*) Es ist gar nicht meine Absicht, in dieser Entwickelung der ganz allgemeinen Theorie der Centralbewegung viele Anwendungen irgend welcher Art zu machen. Um jedoch hier wenigstens an einen allgemein bekannten, sehr einfachen Fall zu erinnern, sei

$$R_t = (A + B\cos\theta_t)^{-1}$$

die Gleichung der Trajectoria; dann ist

Ferner ist nach 17):

$$R_t X_t = -F_t x_t, \quad R_t Y_t = -F_t y_t;$$

also nach 9):

$$\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} = -\frac{F_t}{R_t} x_t, \quad \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} = -\frac{F_t}{R_t} y_t;$$

und folglich:

$$\frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} + \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} = -\frac{F_t}{R_t}\left(x_t \frac{\partial x_t}{\partial t} + y_t \frac{\partial y_t}{\partial t}\right).$$

Weil nun bekanntlich:

$$\mathfrak{v}_t^2 = \left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2, \quad R_t^2 = x_t^2 + y_t^2;$$

also:

$$\mathfrak{v}_t \frac{\partial \mathfrak{v}_t}{\partial t} = \frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} + \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}, \quad R_t \frac{\partial R_t}{\partial t} = x_t \frac{\partial x_t}{\partial t} + y_t \frac{\partial y_t}{\partial t}$$

ist; so ist nach Vorstehendem:

$$\mathfrak{v}_t \frac{\partial \mathfrak{v}_t}{\partial t} = -F_t \frac{\partial R_t}{\partial t} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{v}_t \partial \mathfrak{v}_t = -F_t \partial R_t;$$

also:

---

$$\frac{1}{R_t} = A + B\cos\theta_t,$$

folglich:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{R_t}\right)}{\partial\theta_t} = -B\sin\theta_t, \quad \frac{\partial^2\left(\frac{1}{R_t}\right)}{\partial\theta_t^2} = -B\cos\theta_t;$$

also:

$$\frac{1}{R_t} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{R_t}\right)}{\partial\theta_t^2} = A + B\cos\theta_t - B\cos\theta_t = A,$$

und folglich nach 32):

$$F_t = \frac{A\mathfrak{A}^2}{R_t^2},$$

so dass also in diesem Falle die Centralkraft dem Quadrate der proken Entfernung des sich bewegenden Punktes vom Mittelpunkt Bewegung proportional ist. Einige Anwendungen eines anderen wi gen Satzes kommen später noch vor.

34) . . . $F_t = -\mathfrak{v}_t \frac{\partial \mathfrak{v}_t}{\partial R_t}$ oder $F_t = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \cdot \mathfrak{v}_t^2}{\partial R_t}$.

Die Gleichung der Bahn in dem Punkte $(x_t y_t)$ ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$y - y_t = \frac{\partial y_t}{\partial x_t}(x - x_t)^*);$$

die Gleichung der von dem als Anfang der Coordinaten angenommenen Punkte $O$ auf diese Berührende gefällten Senkrechten ist also:

$$y = -\frac{\partial x_t}{\partial y_t} x.$$

Lässt man jetzt $x$, $y$ die Coordinaten des Fusspunkts des in Rede stehenden Perpendikels, also die Coordinaten des Durchschnittspunkts der durch die beiden vorhergehenden Gleichungen charakterisirten Geraden bezeichnen, so erhält man für dieselben auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination aus den beiden vorstehenden Gleichungen leicht die folgenden Ausdrücke:

$$x = -\frac{y_t - x_t \frac{\partial y_t}{\partial x_t}}{\frac{\partial x_t}{\partial y_t} + \frac{\partial y_t}{\partial x_t}}, \quad y = -\frac{x_t - y_t \frac{\partial x_t}{\partial y_t}}{\frac{\partial x_t}{\partial y_t} + \frac{\partial y_t}{\partial x_t}}$$

oder:

$$x = \frac{x_t \partial y_t - y_t \partial x_t}{\partial x_t^2 + \partial y_t^2} \partial y_t, \quad y = -\frac{x_t \partial y_t - y_t \partial x_t}{\partial x_t^2 + \partial y_t^2} \partial x_t.$$

Bezeichnet man nun die Länge des von dem Punkte $O$ auf die Berührende der Trajectoria in dem Punkte $(x_t y_t)$ gefällten Perpendikels durch $P_t$, so ist:

$$P_t^2 = x^2 + y^2,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$P_t^2 = \frac{(x_t \partial y_t - y_t \partial x_t)^2}{\partial x_t^2 + \partial y_t^2} \quad \text{oder} \quad P_t^2 = \frac{\left(x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2}{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}.$$

---

*) Dies ist ein solcher Fall, wo man, wie in vielen anderen, die Bezeichnung $x_t$, $y_t$ u. s. w. nicht entbehren kann, wenn man statt $x$, $y$ nicht noch andere Zeichen einführen will, was aber der Eleganz, Deutlichkeit und Bestimmtheit hier nicht eben förderlich ist.

Nun ist aber nach 10):

$$x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t} = \mathfrak{A},$$

und bekanntlich:

$$\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 = v_t^2,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$P_t^2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{v_t^2} \quad \text{oder} \quad P_t^2 v_t^2 = \mathfrak{A}^2,$$

also:

35) . . . . . $P_t v_t = \pm \mathfrak{A},$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Constante $\mathfrak{A}$ positiv oder negativ ist. Dies führt auf den folgenden

**Satz.**

**Bei jeder Centralbewegung ist das Product des von dem Mittelpunkte der Bewegung auf die Berührende in irgend einem Punkte der Bahn gefällten Perpendidikels in die in diesem Punkte erlangte Geschwindigkeit eine constante Grösse;**

oder:

**Bei jeder Centralbewegung sind die von dem Mittelpunkte der Bewegung auf die Berührenden der Trajectoria gefällten Perpendikel den in den Punkten der Bahn, durch welche die Berührenden gezogen worden, erlangten Geschwindigkeiten umgekehrt proportional.**

Wenn man die Gleichung

$$v_t^2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{P_t^2}$$

in Bezug auf $R_t$ als unabhängige veränderliche Grösse differentiirt, so erhält man:

$$\frac{\partial . v_t^2}{\partial R_t} = -2\frac{\mathfrak{A}^2}{P_t^3} \cdot \frac{\partial P_t}{\partial R_t},$$

also nach 34):

36) . . . . . $F_t = \frac{\mathfrak{A}^2}{P_t^3} \cdot \frac{\partial P_t}{\partial R_t}.$

**Bezeichnen wir den Krümmungshalbmesser der Trajectoria in dem Punkte $(x_t y_t)$ durch $\mathfrak{N}_t$, so ist bekanntlich:**

$$\mathfrak{N}_t^2 = \frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y_t}{\partial x_t}\right)^2\right\}^3}{\left(\frac{\partial^2 y_t}{\partial x_t^2}\right)^2},$$

**Nun ist aber:**

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \frac{\partial y_t}{\partial t} : \frac{\partial x_t}{\partial t},$$

**also:**

$$\frac{\partial^2 y_t}{\partial x_t^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y_t}{\partial x_t}\right)}{\partial x_t} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y_t}{\partial x_t}\right)}{\partial t} : \frac{\partial x_t}{\partial t}$$

$$= \frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2} : \frac{\partial x_t}{\partial t}$$

$$= \frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^3},$$

**und folglich nach dem Obigen, wie man leicht findet:**

$$\mathfrak{N}_t^2 = \frac{\left\{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2\right\}^3}{\left\{\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}\right\}^2},$$

**also**

$$\mathfrak{N}_t = \pm\frac{\mathfrak{v}_t^3}{\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}},$$

**wenn man in dieser Formel das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse**

$$\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}$$

**positiv oder negativ ist.**

**Nach 35) ist**

$$P_t = \pm\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{v}_t},$$

wenn man in dieser Formel das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\mathfrak{A}$ positiv oder negativ ist, und folglich

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \mp \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{v}_t^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{v}_t}{\partial t},$$

also, weil

$$\mathfrak{v}_t^2 = \left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_t}{\partial t} = \frac{\frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} + \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}}{\mathfrak{v}_t}$$

ist:

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \mp \frac{\mathfrak{A}\left(\frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} + \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}\right)}{\mathfrak{v}_t^3},$$

oder nach 10):

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \mp \frac{\left(x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} + \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}\right)}{\mathfrak{v}_t^3},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, nachdem

$$\mathfrak{A} = x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t}$$

positiv oder negativ ist.

Nun behaupte ich, dass immer

$$\left(x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} + \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}\right)$$

$$= -\left(x_t \frac{\partial x_t}{\partial t} + y_t \frac{\partial y_t}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}\right)$$

ist; denn diese Gleichung ist erfüllt, wenn die Gleichung

$$x_t \frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} - y_t \left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}$$

$$+ x_t \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}$$

$$= -x_t \left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}$$

$$+ x_t \frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} + y_t \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2},$$

also wenn die Gleichung

$$\left(x_t\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}-y_t\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2+\left(x_t\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}-y_t\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2=0,$$

also wenn die Gleichung

$$\left(x_t\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}-y_t\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2\right\}=0$$

erfüllt ist; weil aber

$$x_t\frac{\partial y_t}{\partial t}-y_t\frac{\partial x_t}{\partial t}=\mathfrak{A}$$

und folglich, wie sich durch Differentiation sogleich ergiebt:

$$x_t\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}-y_t\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}=0$$

ist, so ist vorstehende Gleichung wirklich, also auch die obige zu beweisende Gleichung erfüllt. Daher ist:

$$\frac{\partial P_t}{\partial t}=\pm\frac{\left(x_t\frac{\partial x_t}{\partial t}+y_t\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}-\frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}\right)}{\mathfrak{v}_t^3},$$

und folglich, weil

$$R_t^2=x_t^2+y_t^2,\quad R_t\frac{\partial R_t}{\partial t}=x_t\frac{\partial x_t}{\partial t}+y_t\frac{\partial y_t}{\partial t}$$

ist, durch Division der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{1}{R_t}\cdot\frac{\partial P_t}{\partial R_t}=\pm\frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}-\frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}}{\mathfrak{v}_t^3}$$

oder:

$$\frac{\partial P_t}{\partial R_t}=\pm R_t\frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}-\frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}}{\mathfrak{v}_t^3},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem

$$\mathfrak{A}=x_t\frac{\partial y_t}{\partial t}-y_t\frac{\partial x_t}{\partial t}$$

positiv oder negativ ist. Also ist nach 36) mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens:

$$F_t = \pm \frac{\mathfrak{A}^2}{P_t^3} \cdot \frac{R_t}{\mathfrak{P}_t^3} \left( \frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} \right).$$

Wir haben also jetzt die beiden folgenden Gleichungen:

$$F_t = \pm \frac{\mathfrak{A}^2}{P_t^3} \cdot \frac{R_t}{\mathfrak{P}_t^3} \left( \frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} \right),$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem

$$x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t}$$

positiv oder negativ ist, und:

$$\mathfrak{R}_t = \pm \frac{\mathfrak{P}_t^3}{\frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem

$$\frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}$$

positiv oder negativ ist. Also ist, wie aus diesen beiden Gleichungen auf der Stelle durch Multiplication folgt:

$$F_t \mathfrak{R}_t = \pm \frac{\mathfrak{A}^2}{P_t^3} R_t$$

oder:

37) . . . . . $F_t = \pm \frac{\mathfrak{A}^2}{P_t^3} \cdot \frac{R_t}{\mathfrak{R}_t},$

wenn man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grössen

$$x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t}, \quad \frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, oder jenachdem der Bruch

$$\frac{\frac{\partial x_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - \frac{\partial y_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}}{x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t}}$$

positiv oder negativ ist. Nach dem Obigen ist aber bekanntlich:

$$\frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}-\frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}}{x_t\frac{\partial y_t}{\partial t}-y_t\frac{\partial x_t}{\partial t}}=-\frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}+\frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}}{x_t\frac{\partial x_t}{\partial t}+y_t\frac{\partial y_t}{\partial t}},$$

**also:**

$$\frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}-\frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}}{x_t\frac{\partial y_t}{\partial t}-y_t\frac{\partial x_t}{\partial t}}=-\frac{\mathfrak{v}_t}{R_t}\cdot\frac{\partial\mathfrak{v}_t}{\partial R_t},$$

**und in der Gleichung 37) ist also das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem der Differentialquotient**

$$\frac{\partial\mathfrak{v}_t}{\partial R_t}$$

**negativ oder positiv ist, d. h. jenachdem**

$$R_t \text{ und } \mathfrak{v}_t$$

**gleichzeitig**

$$\binom{\text{zunehmen}}{\text{abnehmen}} \text{ und } \binom{\text{abnehmen}}{\text{zunehmen}}$$

**oder gleichzeitig**

$$\binom{\text{zunehmen}}{\text{abnehmen}} \text{ und } \binom{\text{zunehmen}}{\text{abnehmen}}.$$

**Wir haben also jetzt den folgenden merkwürdigen**

**Satz.**

**Bei jeder Centralbewegung ist**

$$F_t=\pm\frac{\mathfrak{A}^2}{\rho_t^3}\cdot\frac{R_t}{\mathfrak{U}_t},$$

**wenn man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem**

**der Vector $R_t$ und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$**

**gleichzeitig**

$$\binom{\text{zunehmen}}{\text{abnehmen}} \text{ und } \binom{\text{abnehmen}}{\text{zunehmen}}$$

**oder gleichzeitig**

$$\binom{\text{zunehmen}}{\text{abnehmen}} \text{ und } \binom{\text{zunehmen}}{\text{abnehmen}}.$$

Dieser hier völlig genau bestimmte Satz ist um so merkwürdiger, weil die Centralkraft $F_t$ mittelst der obigen Formel bloss aus den geometrischen Grössen $R_t$, $P_t$, $\mathfrak{N}_t$, natürlich mit Einschluss der in allen solchen Fällen nicht zu entbehrenden Constanten $\mathfrak{A}$, berechnet werden kann. Die Grössen $R_t$, $P_t$, $\mathfrak{N}_t$ sind durch die Bahn selbst gegeben.

Nach 36) und 37) ist:

$$F_t = \frac{\mathfrak{A}^2}{P_t^3} \cdot \frac{\partial P_t}{\partial R_t}, \quad F_t = \pm \frac{\mathfrak{A}^2}{P_t^3} \cdot \frac{R_t}{\mathfrak{N}_t};$$

also ist:

$$\mathfrak{N}_t = \pm R_t \frac{\partial R_t}{\partial P_t},$$

oder, weil

$$\partial . R_t^2 = 2 R_t \partial R_t$$

ist:

$$38) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{N}_t = \pm \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial . R_t^2}{\partial P_t},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem der Differentialquotient

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_t}{\partial R_t}$$

negativ oder positiv ist. Aus der Gleichung 38) erhellet aber auch von selbst, dass man in derselben das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem der Vector $R_t$ und das Perpendikel $P_t$ gleichzeitig

$$\binom{\text{zunehmen}}{\text{abnehmen}} \text{ und } \binom{\text{zunehmen}}{\text{abnehmen}}$$

oder gleichzeitig

$$\binom{\text{zunehmen}}{\text{abnehmen}} \text{ und } \binom{\text{abnehmen}}{\text{zunehmen}}.$$

Daher gilt auch der folgende

**Satz.**

**Bei jeder Centralbewegung ist**

$$F_t = \pm \frac{\mathfrak{A}^2}{P_t^3} \cdot \frac{R_t}{\mathfrak{R}_t},$$

wenn man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem

der Vector $R_t$ und das Perpendikel $P_t$

gleichzeitig

$$\begin{pmatrix}\text{zunehmen}\\ \text{abnehmen}\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}\text{zunehmen}\\ \text{abnehmen}\end{pmatrix}$$

oder gleichzeitig

$$\begin{pmatrix}\text{zunehmen}\\ \text{abnehmen}\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}\text{abnehmen}\\ \text{zunehmen}\end{pmatrix}.$$

Dies ist übrigens auch schon für sich klar, weil nach dem oben Bewiesenen die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_t$ den Perpendikeln $P_t$ umgekehrt proportional sind.

Um diesen merkwürdigen und wichtigen Satz auf ein Paar Beispiele anzuwenden, wollen wir zuerst annehmen, dass die Trajectoria eine durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

charakterisirte Ellipse und der Mittelpunkt der Kräfte der durch die Coordinaten $+e$, 0 bestimmte Brennpunkt dieser Ellipse sei. Ein beliebiger Punkt der Ellipse sei $(xy)$, die in diesem Punkte wirkende Centralkraft sei $F$, die den Brennpunkten $(+e, 0)$ und $(-e, 0)$ entsprechenden Vectoren des Punktes $(xy)$ seien respective $R$ und $R'$, der dem Punkte $(xy)$ entsprechende Krümmungshalbmesser der Ellipse sei $\mathfrak{R}$, und $P$ sei das von dem Mittelpunkte der Kräfte auf die durch den Punkt $(xy)$ gezogene Berührende der Ellipse gefällte Perpendikel.

Nach bekannten Sätzen ist:

$$R = a - \frac{ex}{a}, \quad R' = a + \frac{ex}{a}$$

und:

$$\mathfrak{R} = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{1}{2}}}{a^4b^4} = a^2b^2 \left\{ \left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Die Gleichung der Berührenden in dem Punkte $(xy)$ ist, wenn $u$, $v$ die veränderlichen Coordinaten bezeichnen:

$$\frac{xu}{a^2}+\frac{yv}{b^2}=1,$$

also nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie:

$$P^2=\frac{\left(1-\frac{ex}{a^2}\right)^2}{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}=\frac{(a^2-ex)^2}{a^4\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}},$$

oder:

$$P^2=\frac{\left(a-\frac{ex}{a}\right)^2}{a^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}}=\frac{R^2}{a^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}},$$

folglich:

$$P=\frac{R}{a\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

also:

$$P^3=\frac{R^3}{a^3\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

und daher nach dem Obigen:

$$P^3\mathfrak{N}=\frac{b^2}{a}R^3,\quad \frac{1}{P^3}\cdot\frac{R}{\mathfrak{N}}=\frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{R^2}.$$

Weil nun nach dem obigen Satze:

$$F=\pm\frac{\mathfrak{R}^2}{P_t^3}\cdot\frac{R_t}{\mathfrak{N}_t}$$

ist, so ist:

$$F=\pm\frac{a}{b^2}\cdot\frac{\mathfrak{R}^2}{R^2}=\pm\frac{1}{a\left\{1-\left(\frac{e}{a}\right)^2\right\}}\cdot\frac{\mathfrak{R}^2}{R^2},$$

wo es sich nun frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat. ist aber, wie man leicht findet,

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2=\frac{a^4-e^2x^2}{a^4b^2}=\frac{1}{a^2b^2}\cdot\frac{a^2-ex}{a}\cdot\frac{a^2+ex}{a}$$

oder:

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2=\frac{1}{a^2b^2}\left(a-\frac{ex}{a}\right)\left(a+\frac{ex}{a}\right)=\frac{RR'}{a^2b^2},$$

**also nach dem Obigen:**

$$P = b\sqrt{\frac{R}{R'}}.$$

**Nach den Formeln**

$$R = a - \frac{ex}{a}, \quad R' = a + \frac{ex}{a}$$

**ist, wie auch sonst bekannt:**

$$R + R' = 2a,$$

**und aus den Formeln:**

$$R' = 2a - R, \quad P = b\sqrt{\frac{R}{R'}}$$

**erhellet nun auf der Stelle, dass, wenn** $R$

$$\begin{pmatrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{pmatrix},$$

**respective** $P$

$$\begin{pmatrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{pmatrix},$$

**man also im Obigen die oberen Zeichen nehmen, folglich**

$$F = \frac{a}{b^2}\cdot\frac{\mathfrak{A}^2}{R^2} = \frac{1}{a\left\{1-\left(\frac{e}{a}\right)^2\right\}}\cdot\frac{\mathfrak{A}^2}{R^2}$$

**setzen muss.**

**Wenn die Trajectoria in Bezug auf den durch die Coordinaten** $+e, 0$ **bestimmten Brennpunkt, welcher wieder der Mittelpunkt der Kräfte ist, der erste Zweig einer durch die Gleichung**

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

**charakterisirten Hyperbel ist, so ist, wenn wir jetzt allen Zeichen eine ganz ähnliche Bedeutung wie im Vorhergehenden beilegen, bekanntlich:**

$$R = \frac{ex}{a} - a, \quad R' = \frac{ex}{a} + a;$$

**wo** $x$ **stets positiv ist. Ferner ist bekanntlich:**

$$\mathfrak{A} = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2b^2} = a^2b^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Die Gleichung der Berührenden in dem Punkte $(xy)$ ist:

$$\frac{xu}{a^2}-\frac{yv}{b^2}=1,$$

also:

$$P^2=\frac{\left(\frac{ex}{a^2}-1\right)^2}{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}=\frac{(ex-a^2)^2}{a^4\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}},$$

oder:

$$P^2=\frac{\left(\frac{ex}{a}-a\right)^2}{a^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}}=\frac{R^2}{a^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}},$$

folglich:

$$P=\frac{R}{a\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

also:

$$P^3=\frac{R^3}{a^3\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

und daher nach dem Obigen:

$$P^3\mathfrak{R}=\frac{b^2}{a}R^3,\quad \frac{1}{P^3}\cdot\frac{R}{\mathfrak{R}}=\frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{R^2}.$$

Weil nun

$$F=\pm\frac{\mathfrak{P}^2}{P_t^3}\cdot\frac{R_t}{\mathfrak{R}_t}$$

ist, so ist:

$$F=\pm\frac{a}{b^2}\cdot\frac{\mathfrak{P}^2}{R^2}=\pm\frac{1}{a\left\{\left(\frac{e}{a}\right)^2-1\right\}}\cdot\frac{\mathfrak{P}^2}{R^2},$$

wo es sich nun wieder frägt, welches Zeichen zu nehmen ist. ist aber, wie man leicht findet:

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2=\frac{e^2x^2-a^4}{a^4b^2}=\frac{1}{a^2b^2}\cdot\frac{ex-a^2}{a}\cdot\frac{ex+a^2}{a},$$

oder:

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2=\frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{ex}{a}-a\right)\left(\frac{ex}{a}+a\right)=\frac{RR'}{a^2b^2},$$

**also nach dem Obigen:**

$$P = b\sqrt{\frac{R}{R'}}.$$

**Weil nun nach dem Obigen:**

$$R = \frac{ex}{a} - a, \quad R' = \frac{ex}{a} + a$$

**ist, so ist, wie auch sonst bekannt:**

$$R' - R = 2a,$$

**also:**

$$R' = 2a + R,$$

**woraus sich ergiebt, dass, wenn $R$ um die positive Grösse $\Delta$ $\left(\begin{matrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{matrix}\right)$, auch $R'$ respective um die positive Grösse $\Delta$ $\left(\begin{matrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{matrix}\right)$, und weil nun**

$$\frac{R \pm \Delta}{R' \pm \Delta} - \frac{R}{R'} = \pm\frac{(R'-R)\Delta}{R'(R' \pm \Delta)} = \pm\frac{2a\Delta}{R'(R' \pm \Delta)}$$

**ist, so ist aus dem Obigen klar, dass, wenn $R$**

$$\left(\begin{matrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{matrix}\right),$$

**respective $P$**

$$\left(\begin{matrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{matrix}\right),$$

**man also im Obigen die oberen Zeichen nehmen, folglich**

$$F = \frac{a}{b^2}\cdot\frac{\mathfrak{A}^2}{R^2} = \frac{1}{a\left\{\left(\frac{e}{a}\right)^2 - 1\right\}}\cdot\frac{\mathfrak{A}^2}{R^2}$$

**setzen muss.**

**Wenn die Trajectoria in Bezug auf den durch die Coordinaten $+e$, 0 bestimmten Brennpunkt, welcher wieder der Mittelpunkt der Kräfte ist, der zweite Zweig einer durch die Gleichung**

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

**charakterisirten Hyperbel ist, so ist bekanntlich:**

$$R = a - \frac{ex}{a}, \quad R' = -a - \frac{ex}{a};$$

wo $x$ stets negativ ist; und man erhält ganz auf dieselbe Weise wie vorher:

$$F = \pm\frac{a}{b^2}\cdot\frac{\mathfrak{A}^2}{R^2} = \pm\frac{1}{a\left\{\left(\frac{e}{a}\right)^2-1\right\}}\cdot\frac{\mathfrak{A}^2}{R^2}$$

und:

$$P = b\sqrt{\frac{R}{R'}}.$$

Weil nun

$$R = a-\frac{ex}{a},\quad R' = -a-\frac{ex}{a}$$

ist, so ist, wie auch sonst bekannt:

$$R-R' = 2a,$$

also:

$$R' = R-2a,$$

woraus sich ergiebt, dass, wenn $R$ um die positive Grösse $\Delta$ $\begin{pmatrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{pmatrix}$, auch $R'$ respective um die positive Grösse $\Delta$ $\begin{pmatrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{pmatrix}$, und weil nun

$$\frac{R\pm\Delta}{R'\pm\Delta}-\frac{R}{R'} = \mp\frac{(R-R')\Delta}{R'(R'\pm\Delta)} = \mp\frac{2a\Delta}{R'(R'\pm\Delta)}$$

ist, so ist aus dem Obigen klar, dass, wenn $R$

$$\begin{pmatrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{pmatrix},$$

respective $P$

$$\begin{pmatrix}\text{abnimmt}\\ \text{zunimmt}\end{pmatrix},$$

man also im Obigen die unteren Zeichen nehmen, folglich

$$F = -\frac{a}{b^2}\cdot\frac{\mathfrak{A}^2}{R^2} = -\frac{1}{a\left\{\left(\frac{e}{a}\right)^2-1\right\}}\cdot\frac{\mathfrak{A}^2}{R^2}$$

setzen muss.

Die Centralkraft ist also in den beiden ersten Fällen eine anziehende Kraft, im letzten Falle eine abstossende Kraft.

Wenn die Trajectoria eine durch die Gleichung

$$y^2 = px$$

charakterisirte Parabel, und deren Brennpunkt der Mittelpunkt der Kräfte ist, so ist für den Punkt $(xy)$ der Parabel bekanntlich:

$$R = x + \tfrac{1}{2}p = \frac{4px + p^2}{4p} = \frac{4y^2 + p^2}{4p},$$

und:

$$\mathfrak{A} = \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{2p^2}.$$

Die Gleichung der Berührenden in dem Punkte $(xy)$ ist:

$$v - y = \frac{p}{2y}(u - x),$$

also:

$$P^2 = \frac{\left(y - \frac{px}{2y} + \frac{p^2}{8y}\right)^2}{1 + \left(\frac{p}{2y}\right)^2} = \frac{4y^2 + p^2}{16},$$

folglich:

$$P = \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{4}, \quad P^3 = \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{64};$$

und daher:

$$P^3\mathfrak{A} = \frac{(4y^2 + p^2)^3}{128p^2} = \frac{pR^3}{2}, \quad \frac{1}{P^3} \cdot \frac{R}{\mathfrak{A}} = \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{R^2};$$

also:

$$F = \pm \frac{2}{p} \cdot \frac{\mathfrak{A}^2}{R^2}.$$

Weil

$$P^2 = \frac{4y^2 + p^2}{16} = \frac{pR}{4}, \quad P = \frac{\sqrt{pR}}{2}$$

ist, so nimmt $P$ mit $R$ gleichzeitig zu und ab, und man muss also das obere Zeichen nehmen, folglich

$$F = \frac{2}{p} \cdot \frac{\mathfrak{A}^2}{R^2}$$

setzen, so dass also $F$ eine anziehende Kraft ist.

Wenn die Trajectoria eine durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

charakterisirte Ellipse, und deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kräfte ist, so ist für den Punkt $(xy)$ der Ellipse die Gleichung der Berührenden:

$$\frac{xu}{a^2}+\frac{yv}{b^2}=1,$$

also:

$$P=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}};$$

ferner ist wie oben:

$$\mathfrak{M}=a^2b^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

also:

$$P^3\mathfrak{M}=a^2b^2,$$

und daher nach dem obigen allgemeinen Satze:

$$F=\pm\frac{\mathfrak{M}^2}{a^2b^2}R.$$

Nach dem Obigen ist:

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2=\frac{a^4-e^2x^2}{a^4b^2},$$

also:

$$P=\frac{a^2b}{\sqrt{a^4-e^2x^2}}.$$

Ferner ist:

$$R^2=x^2+y^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=b^2+\frac{e^2}{a^2}x^2,$$

also:

$$R=\sqrt{b^2+\frac{e^2}{a^2}x^2}.$$

Lässt man nun $x$ absolut zunehmen oder abnehmen, so nehmen offenbar $P$ und $R$ gleizeitig zu und ab, und man muss folglich im Obigen das obere Zeichen nehmen, also

$$F=\frac{\mathfrak{M}^2}{a^2b^2}R$$

setzen, woraus sich ergiebt, dass auch in diesem Falle $F$ eine anziehende Kraft ist.

Wenn die Trajectoria eine durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

charakterisirte Hyperbel, und deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kräfte ist, so ist für den Punkt $(xy)$ der Hyperbel die Gleichung der Berührenden:

$$\frac{xu}{a^2}-\frac{yv}{b^2}=1,$$

also:

$$P=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}};$$

ferner ist wie oben:

$$\mathfrak{M}=a^2b^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

also:

$$P^3\mathfrak{M}=a^2b^2,$$

und daher nach dem obigen allgemeinen Satze:

$$F=\pm\frac{\mathfrak{M}^2}{a^2b^2}R.$$

Nach dem Obigen ist:

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2=\frac{e^2x^2-a^4}{a^4b^2},$$

also:

$$P=\frac{a^2b}{\sqrt{e^2x^2-a^4}}.$$

Ferner ist:

$$R^2=x^2+y^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{e^2x^2}{a^2}-b^2,$$

also:

$$R=\sqrt{\frac{e^2x^2}{a^2}-b^2}.$$

Lässt man nun $x$ absolut zunehmen oder abnehmen, so nimmt offenbar $P$ ab oder zu, $R$ dagegen zu oder ab, und man muss folglich im Obigen das untere Zeichen nehmen, also

$$F=-\frac{\mathfrak{M}^2}{a^2b^2}R$$

setzen, woraus sich ergiebt, dass in diesem Falle $F$ eine a stossende Kraft ist.

§. 6.

Wir wollen nun auch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$ und die Wi kel $\xi_t$, $\eta_t$ weiter betrachten.

Nach 25) ist:

$$\mathfrak{v}_t = \sqrt{\left(\frac{\partial R_t}{\partial t}\right)^2 + R_t^2\left(\frac{\partial \theta_t}{\partial t}\right)^2},$$

und weil nun nach 30) und 29)

$$\frac{\partial R_t}{\partial t} = -\mathfrak{A}\frac{\partial\left(\frac{1}{R_t}\right)}{\partial \theta_t}, \quad \frac{\partial \theta_t}{\partial t} = \frac{\mathfrak{A}}{R_t^2}$$

ist; so ist, wie man sogleich übersieht:

$$39) \quad \mathfrak{v}_t = \pm\mathfrak{A}\sqrt{\frac{1}{R_t^2} + \left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{R_t}\right)}{\partial \theta_t}\right\}^2},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenach die Constante $\mathfrak{A}$ positiv oder negativ ist.

Weil

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{R_t}\right)}{\partial \theta_t} = -\frac{1}{R_t^2}\cdot\frac{\partial R_t}{\partial \theta_t}$$

ist, so ist mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeiche

$$40) \quad \mathfrak{v}_t = \pm\frac{\mathfrak{A}}{R_t}\sqrt{1 + \frac{1}{R_t^2}\left(\frac{\partial R_t}{\partial \theta_t}\right)^2}.$$

Nach 34) ist:

$$F_t = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial.\mathfrak{v}_t^2}{\partial R_t},$$

also:

$$41) \quad \partial.\mathfrak{v}_t^2 = -2F_t\partial R_t,$$

und folglich durch Integration zwischen den Gränzen $\tau$, $t$:

$$42) \quad \mathfrak{v}_t^2 - \mathfrak{v}_\tau^2 = -2\int_\tau^t F_t\partial R_t$$

oder:

$$43) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{v}_t = \sqrt{\mathfrak{v}_\tau^2 - 2\int_\tau^t F_t \partial R_t}\,.$$

Nach 20) ist:

$$\frac{\partial x_t}{\partial t} = \cos\theta_t \frac{\partial R_t}{\partial t} - R_t \sin\theta_t \frac{\partial \theta_t}{\partial t},$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} = \sin\theta_t \frac{\partial R_t}{\partial t} + R_t \cos\theta_t \frac{\partial \theta_t}{\partial t};$$

und weil nun, wie vorher:

$$\frac{\partial R_t}{\partial t} = \frac{\mathfrak{A}}{R_t^2} \cdot \frac{\partial R_t}{\partial \theta_t}, \quad \frac{\partial \theta_t}{\partial t} = \frac{\mathfrak{A}}{R_t^2}$$

ist, so ist:

$$44) \quad \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_t}{\partial t} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{R_t^2}\left(R_t \sin\theta_t - \cos\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial \theta_t}\right), \\ \dfrac{\partial y_t}{\partial t} = \dfrac{\mathfrak{A}}{R_t^2}\left(R_t \cos\theta_t + \sin\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial \theta_t}\right); \end{cases}$$

also nach bekannten Formeln:

$$45) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos\xi_t = -\dfrac{\mathfrak{A}}{R_t^2 \mathfrak{v}_t}\left(R_t \sin\theta_t - \cos\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial \theta_t}\right), \\ \cos\eta_t = \dfrac{\mathfrak{A}}{R_t^2 \mathfrak{v}_t}\left(R_t \cos\theta_t + \sin\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial \theta_t}\right); \end{cases}$$

wo man für $\mathfrak{v}_t$ alle vorher gefundenen Ausdrücke dieser Grösse setzen kann.

Bezeichnet aber $\xi_t$ den von der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$ mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt $(x_t y_t)$ mit dem Systeme der $xy$ parallel gelegten Coordinatensystems eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der in Rede stehenden ersten Axe an durch den Coordinatenwinkel des entsprechenden Systems hindurch von 0 bis 360° zählt; so ist:

$$46) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos\xi_t = -\dfrac{\mathfrak{A}}{R_t^2 \mathfrak{v}_t}\left(R_t \sin\theta_t - \cos\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial \theta_t}\right), \\ \sin\xi_t = \dfrac{\mathfrak{A}}{R_t^2 \mathfrak{v}_t}\left(R_t \cos\theta_t + \sin\theta_t \dfrac{\partial R_t}{\partial \theta_t}\right); \end{cases}$$

folglich:

$$47) \quad \ldots\ldots \tang \xi_t = -\frac{R_t \cos\theta_t + \sin\theta_t \frac{\partial R_t}{\partial \theta_t}}{R_t \sin\theta_t - \cos\theta_t \frac{\partial R_t}{\partial \theta_t}}.$$

## §. 8.

Wir wollen jetzt der Einfachheit wegen das System der $xy$ uns, was offenbar verstattet ist, so angenommen denken, dass von dem Punkte $O$, aus der positive Theil der Axe der $x$ nach dem Punkte der Bahn hin gerichtet ist, in welchem sich der Punkt $A$ zu einer bestimmten Zeit $\tau$ befindet, und dass man sich im Sinne der Bewegung des Punktes $A$ in seiner Bahn bewegen muss, wenn man von dem positiven Theile der Axe der $x$ an durch den rechten Winkel $(xy)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ gelangen will. Bezeichnen wir dann eine andere beliebige Zeit, die grösser als $\tau$ ist, durch $t$, und den Flächeninhalt des von dem Vector des sich bewegenden Punktes $A$ in dem Zeitintervalle $t-\tau$ um den Punkt $O$ beschriebenen Sectors durch $S_{t-\tau}$, so ist nach einer ganz bekannten Formel der analytischen Geometrie:

$$48) \quad \ldots\ldots\ldots S_{t-\tau} = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_\tau}^{\theta_t} R_t^2 \partial\theta_t.$$

Weil nun nach 14) für jedes $t$ bekanntlich

$$\partial t = \frac{1}{\mathfrak{A}} R_t^2 \partial\theta_t$$

ist, so ist:

$$49) \quad \ldots\ldots\ldots t-\tau = \frac{1}{\mathfrak{A}}\int_{\theta_\tau}^{\theta_t} R_t^2 \partial\theta_t;$$

also, wenn man die Gleichungen 48) und 49) durch einander dividirt:

$$50) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{S_{t-\tau}}{t-\tau} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A},$$

so dass also bei jeder Centralbewegung der Bruch oder das Verhältniss

$$\frac{S_{t-\tau}}{t-\tau}$$

eine constante Grösse ist. Hieraus ergiebt sich der folgende

## Satz.

Bei der Centralbewegung verhalten sich die Flächeninhalte der von den Vectoren des sich bewegenden Punkts um den Mittelpunkt der Bewegung beschriebenen Sectoren wie die Zeiten, in denen sie beschrieben werden.

Auch haben wir nach dem Vorhergehenden für die Constante $k$, bei der obigen Annahme des Coordinatensystems der $xy$, den folgenden Ausdruck:

51) . . . . . $k = 2\frac{S_{t-\tau}}{t-\tau} = \frac{1}{t-\tau_0}\int_{\tau_0}^{t} r^2 d\varphi$

## §. 8.

Das Vorhergehende gewissermassen umkehrend, wollen wir jetzt annehmen, dass ein Punkt $A$ in einer Ebene sich so bewege, dass die um einen gewissen Punkt $O$ in dieser Ebene von den, von diesem Punkte ausgehenden Vectoren des sich bewegenden Punktes $A$ beschriebenen Sectoren den Zeiten, in denen sie beschrieben werden, proportional sind, und wollen die Kräfte untersuchen, von denen unter diesen Voraussetzungen der Punkt $A$ sollicirt werden muss, so weit bloss aus diesen Voraussetzungen eine Bestimmung der in Rede stehenden Kräfte sich herleiten lässt.

Da vorausgesetzt worden ist, dass die Bewegung ganz in einer Ebene vor sich geht, so können wir diese Ebene als die Ebene der $xy$ eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $xyz$, und den Punkt $O$ in der in Rede stehenden Ebene als Anfang dieses Coordinatensystems annehmen. Den positiven Theil der Axe der $x$ wollen wir von dem Punkte $O$ nach dem Punkte der Bahn des sich bewegenden Punktes $A$ hin ziehen, in welchem der Punkt $A$ sich zur Zeit $\tau$ befindet, und den positiven Theil der Axe der $y$ nehmen wir so an, dass man sich im Sinne der Bewegung des Punktes $A$ bewegen muss, wenn man von dem positiven Theile der Axe der $x$ durch den rechten Winkel $(xy)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ gelangen will.

Weil der Punkt $A$ sich immer in der Ebene der $xy$ bewegt, so ist allgemein $z = 0$, also auch allgemein

$$\frac{\partial z_t}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2} = 0;$$

und folglich, weil allgemein *)

$$Z_t = \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2}$$

ist, auch allgemein

$$Z_t = 0.$$

Weil nun diese nach der Axe der $z$ genommene Composante der auf den Punkt $A$ wirkenden Zeitkraft $F_t$ allgemein verschwindet, so muss diese Zeitkraft offenbar fortwährend in der Ebene der $xy$, nämlich fortwährend in der Ebene der Bahn des sich bewegenden Punktes $A$ wirken, oder die Richtung der Kraft $F_t$ muss immer in dieser Ebene liegen. Also wird die Gerade, in welcher die Richtung der Zeitkraft $F_t$ liegt, vollkommen durch die Gleichung

$$\frac{x - x_t}{\cos\varphi_t} = \frac{y - y_t}{\cos\psi_t}$$

bestimmt.

Nach der Voraussetzung ist

$$\frac{S_{t-\tau}}{t-\tau} = C,$$

wo $C$ eine Constante bezeichnet; und weil nun

$$S_{t-\tau} = \tfrac{1}{2}\int_\tau^t R_t^2 \partial\theta_t$$

ist, so ist:

$$\frac{\int_\tau^t R_t^2 \partial\theta_t}{2(t-\tau)} = C,$$

also:

$$\int_\tau^t R_t^2 \partial\theta_t = 2C(t-\tau),$$

folglich:

$$\frac{\partial \int_\tau^t R_t^2 \partial\theta_t}{\partial t} = 2C;$$

*) Thl. XXI. Nr. XXXI. S. 433. 6).

$$\frac{\partial \int_{\tau}^{t} R_t^2 \partial\theta_t}{\partial t} = \frac{\partial \int_{\tau}^{t} R_t^2 \frac{\partial\theta_t}{\partial t}\partial t}{\partial t} = R_t^2 \frac{\partial\theta_t}{\partial t},$$

$$R_t^2 \frac{\partial\theta_t}{\partial t} = 2C.$$

aber:

$$x_t = R_t \cos\theta_t, \quad y_t = R_t \sin\theta_t;$$

$$\frac{\partial x_t}{\partial t} = \cos\theta_t \frac{\partial R_t}{\partial t} - R_t \sin\theta_t \frac{\partial\theta_t}{\partial t},$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} = \sin\theta_t \frac{\partial R_t}{\partial t} + R_t \cos\theta_t \frac{\partial\theta_t}{\partial t};$$

er, wie man sogleich übersieht:

$$x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t} = R_t^2 \frac{\partial\theta_t}{\partial t},$$

h dem Vorhergehenden:

$$x_t \frac{\partial y_t}{\partial t} - y_t \frac{\partial x_t}{\partial t} = 2C,$$

sich ferner durch Differentiation:

$$x_t \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} - y_t \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} = 0$$

Es ist aber bekanntlich:

$$X_t = \frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}, \quad Y_t = \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2};$$

$$x_t Y_t - y_t X_t = 0, \quad y_t X_t = x_t Y_t;$$

er, weil

$$X_t = F_t \cos\varphi_t, \quad Y_t = F_t \cos\psi_t$$

$$y_t \cos\varphi_t = x_t \cos\psi_t.$$

Gleichung der Geraden, in welcher die Richtung der $t$ liegt, war nach dem Obigen:

$$\frac{x-x_t}{\cos\varphi_t} = \frac{y-y_t}{\cos\psi_t},$$

und ist also, wenn man diese Gleichung mit der Gleichung

$$y_t \cos\varphi_t = x_t \cos\psi_t$$

multiplicirt:

$$y_t(x-x_t) = x_t(y-y_t),$$

also:

$$y_t x = x_t y.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass die Gerade, in welcher die Richtung der Kraft $F_t$ liegt, stets durch den Anfang der Coordinaten, also durch den Punkt $O$, geht. Hieraus ergiebt sich der folgende

**Satz.**

Wenn ein Punkt in einer Ebene sich so bewegt, dass die um einen gewissen Punkt $O$ in dieser Ebene von den, von diesem Punkte ausgehenden Vectoren des sich bewegenden Punktes beschriebenen Sectoren sich wie die Zeiten verhalten, in denen sie beschrieben werden; so kann der sich bewegende Punkt nur von einer Zeitraft sollicirt werden, deren Richtungslinie stets durch den Punkt $O$ geht.

# XXX.

## Ueber cubische Reste.

(Für Studirende.)

Von

Herrn *Dr. G. F. Meyer* *)

Die im Nachfolgenden versuchte Behandlung wesentlich der Aufgabe:

> „Alle Zahlen zu finden, welche für einen gegebenen Modulus cubische Reste oder Nichtreste sind,"

setzt die Kenntniss einiger Hauptsätze aus der Theorie der Congruenzen, besonders der quadratischen Reste, voraus; Sätze, die ja Jedem, der eine Vorlesung über die Elemente der Zahlentheorie hörte, bekannt sind. In Betreff dieser Theoreme vergleiche man übrigens das vortreffliche, von Herrn Professor Dedekind herausgegebene Werk:

> „Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune-Dirichlet. Braunschweig bei Vieweg. 1864."

### §. 1.

Bezeichnet $b$ eine durch die Primzahl $p$ nicht theilbare Zahl, **)

*) Früher in Hannover; von Magdeburg war der neueste Brief datirt.

**) Der Kürze wegen können wir die $b$ aus der Reihe $1, 2, \ldots p-1$ nehmen, indem ja jede andere Zahl $b$ einer dieser Zahlen von 1 bis $p-1$ congruent sein muss (nach dem Modul $p$).

bedeutet ferner $\delta$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $m$ und $p-1$; so ist bekanntlich die binomische Congruenz:

$$x^m \equiv b \pmod{p}$$

möglich, wenn die Bedingung

$$b^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p}$$

Statt hat. Erfüllt aber kann diese Bedingung stets werden und zwar für $\frac{p-1}{\delta}$ verschiedene $b$; die Congruenz $x^m \equiv b$ besitzt alsdann $\delta$ Wurzeln.

Nehmen wir für $m$ die Zahl 3, so existiren offenbar für $\delta$ die Werthe $\delta = 1$ und $\delta = 3$.

Ist 3 prim zu $p-1$, d.h. besitzt $p$ die Form $3n+2$, so ist die Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{p}$$

für jedes $b$ möglich, indem nach Fermat's Satze stets

$$b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p};$$

die Anzahl der $b$ ist folglich in diesem Falle $= p-1$, und die Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{p}$$

hat nur eine Wurzel.

Setzen wir jetzt $\delta = 3$, d. h. nehmen wir $p$ von der Form $3n+1$ an, so wird der Congruenz

$$b^{\frac{p-1}{3}} = b^n \equiv 1 \pmod{p}$$

für $n$ verschiedene $b$ Genüge geleistet, und die Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{p}$$

hat in diesem Falle drei incongruente Wurzeln.

Anmerkung. Wie man sieht, ist in den beiden Formen von $p$:

$$p = 3n+1, \quad p = 3n+2,$$

d. h. $p = 3n \pm 1$, der Fall $p = 3$ nicht enthalten. Derselbe erledigt sich jedoch sofort, wenn man erwägt, dass jede durch $p =$

nicht theilbare Zahl nur die Reste 1, 2 geben kann. Für solche Zahlen aber ist immer:

$$x^2 \equiv 1 \pmod 3,$$

also:

$$x^3 \equiv x,$$

d. g. entweder $x^3 \equiv 1$, oder $x^3 \equiv -1 \equiv 2$. Die Congruenz $x^3 \equiv b \pmod 3$ hat sonach immer eine und nur eine Wurzel.

## §. 2.

Da $\frac{p-1}{3}$ eine ganze Zahl $n$ bezeichnen soll, so erhellt leicht, dass $n$ nur gerade, also $p = 3n + 1$ nur von der Form $p = 6m + 1$ sein kann. Nun war die adäquate Bedingung für die Möglichkeit der Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod p$$

diese:

$$b^n = b^{2m} \equiv 1 \pmod p.$$

Mithin ist

$$x^3 \equiv b \pmod p$$

möglich, wenn entweder die Congruenz

$$b^m \equiv 1,$$

oder

$$b^m \equiv -1$$

Statt findet; gleichzeitig können beide Bedingungen nicht bestehen, weil ihre Differenz nicht durch $p$ aufgeht.

Man sieht, je nachdem $b^m \equiv \pm 1 \pmod p$, ist auch

$$b^{3m} = b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod p.$$

Ferner ergiebt sich, dass $(-b)^{2m} \equiv 1 \pmod p$ Statt hat, wenn $b^n = b^{2m} \equiv 1 \pmod p$ ist. Wir können daher unsere Betrachtung auf die Zahlen von 1 bis $\frac{p-1}{2}$ beschränken *). Und dann leuchtet ein, dass $p-1$ stets cubischer Rest von $p$ ist, weil für $b = 1$ immer $b^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod p$.

---

*) Ebenso ist es bei den cubischen Nichtresten; denn $(-b)^{\frac{p-1}{3}} \equiv a \pmod p$, wenn $b^{\frac{p-1}{3}} \equiv a$.

## §. 3.

Die in §. 1. entwickelten Wahrheiten erscheinen als Folgerungen der allgemeinen Theorie binomischer Congruenzen. Die Kenntniss dieser allgemeinen Theorie ist jedoch, wie wir nun zu zeigen versuchen wollen, bei Beurtheilung vorliegenden Falles nicht unumgänglich erforderlich.

Gesetzt, die Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{p} \tag{1}$$

sei möglich, wo $b$ immer eine durch $p$ nicht aufgehende Zahl ausdrückt, und $r$ bezeichne eine der Wurzeln von (1); alsdann erhält man die Congruenz

$$x^3 - r^3 \equiv 0 \pmod{p},$$

d. g.

$$(x-r)(x^2+rx+r^2) \equiv 0,$$

folglich ist entweder $x \equiv r$, oder $x^2+rx+r^2 \equiv 0$; denn gleichzeitig können beide Factoren von $x^3-r^3$ nicht durch $p$ theilbar sein, weil sonst $3r^2$ durch $p$ aufgehen müsste.

Da nun die letztere Congruenz mit der folgenden:

$$(2x+r)^2 \equiv -3r^2 \pmod{p}$$

gleichbedeutend ist, die beiden Wurzeln dieser nur für $p=3n+1$ stets möglichen Congruenz*) aber incongruent sind, und keiner

---

*) Bekanntlich gehört die Congruenz $(2x+r)^2 \equiv -3r^2 \pmod{p}$ zu den möglichen, wenn $\left(\frac{-3r^2}{p}\right) = 1$, was der Fall ist, wenn $p$ die Form $3n+1$ besitzt; für $p=3n+2$ dagegen ist $\left(\frac{-3r^2}{p}\right)=\left(\frac{-3}{p}\right)=-1$ also $x^2+rx+r^2 \equiv 0 \pmod{p}$ ebenfalls unmöglich.

Wie sofort einleuchtet, kann man die Congruenz $(2x+r)^2 \equiv -3r^2 \pmod{p}$ als eine Combination der beiden Congruenzen $(2y+1)^2 \equiv -3 \pmod{p}$, $r^2 \equiv r^2 \pmod{p}$ auffassen. Daraus aber folgt:

$$(2x+r)^2 \equiv (2yr+r)^2 \pmod{p},$$

d. i.:

$$2x+r \equiv 2yr+r \text{ oder } x \equiv yr \pmod{p}$$

und

$$2x+r \equiv -2yr-r \text{ oder } x \equiv -(y+1)r \pmod{p}.$$

Hiernach stellen sich also die beiden andern Wurzeln $x$ der Con-

der aus ihnen sich ergebenden Werthe von $x$ mit $r$ congruent sein kann; so hat, wie wir in dem Vorstehenden behaupteten, die Congruenz $x^3 \equiv b \pmod{p}$ in der That drei oder eine Wurzel, je nachdem $p = 3n+1$ oder $p = 3n+2$ ist.

Gehört die Congruenz (1) $x^3 \equiv b \pmod{p}$ zu den möglichen, so ist, falls $p$ die Form $3n+1$ besitzt, auch:

$$(x^3)^{\frac{p-1}{3}} = x^{p-1} \equiv b^{\frac{p-1}{3}} \pmod{p},$$

d. h.

$$b^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$$

Findet diese Bedingung nicht Statt, so kann auch die Congruenz (1) nicht bestehen. Einmal aber wird $b^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$ befriedigt, indem $x^3$ durch $p$ dividirt immer einen Rest $\alpha$ geben muss, dem man $b$ nur congruent zu setzen braucht. Es fragt sich nur, ob für verschiedene, d. h. incongruente Werthe von $x$ dieser Rest $\alpha$ nicht mehrere Male erscheinen kann. Zu dem Behufe bezeichne $x \equiv s$ eine Zahl aus der Reihe 1, 2,... $p-1$, und es werde nun untersucht, ob in derselben Reihe nicht etwa eine andere Zahl $x \equiv r$ existirt, für welche man hat:

$$r^3 - s^3 \equiv 0 \pmod{p}.$$

---

gruenz $x^3 \equiv b \pmod{p}$ als Multipla der dritten $x \equiv r$ dar. Dabei kann es sich allerdings ereignen, dass $yr$, sowie $(y+1)r > p$ sind Beschränkt man sich, wie es offenbar am natürlichsten ist, auf positive Werthe von $x$, die kleiner als $p$ sind; so wird, falls $yr > p$, diese Wurzel $x$ nicht als ein Vielfaches von $r$ angesehen werden können Denn aus

$$yr \equiv \beta r \pmod{p},$$

wo $\beta r < p$. würde $y \equiv \beta \pmod{p}$, d. h. $y = \beta$ folgen. Lässt man jedoch auch negative Werthe von $x$ zu, soll also $yr \equiv -\beta r \pmod{p}$ sein, wo $\beta r < p$, so hat man wegen $y \equiv -(p-y). \pmod{p}$

$$yr \equiv -(p-y)r \pmod{p}.$$

Soll nun aber die Beziehung gelten $(p-y)r < p$, so muss nothwendig $r < \frac{p}{p-y}$ sein. Ist demnach $r$ kleiner oder gleich der grössten in dem Bruche $\frac{p}{p-y}$ enthaltenen ganzen Zahl, so kann auch jetzt wieder $x$ als ein Vielfaches von $r$ aufgefasst werden.

Ist dies der Fall, so ist entweder:

$$r - s \equiv 0 \pmod{p}, \text{ d. h. } r \equiv s,$$

oder:

$$(2r + s)^2 \equiv -3s^2 \pmod{p}.$$

Diese Congruenz aber wird erfüllt, sobald nur $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ ist, eine Bedingung, die für jede Primzahl von der Form $3n+1$ eintritt. Ausser $r \equiv s$ existiren sonach noch zwei andere unter sich und mit $s$ incongruente Werthe $r \equiv \alpha$, $r \equiv \beta$, für welche $r^3 - s^3 \equiv 0 \pmod{p}$. Wählt man nun für $x$ einen andern Werth $s_1$ aus der Reihe $1, 2, \ldots p-1$, der aber mit keinem der schon bestimmten Werthe für $r$ zusammenfällt; so ergeben sich wieder drei und zwar von den bereits ermittelten $x$ verschiedene Werthe für $x$, die in der dritten Potenz nach dem Modul $p$ congruent sind*). Auf diese Weise fortgefahren, zerfällt die Reihe $1^3, 2^3, 3^3, \ldots (p-1)^3$

---

Ist endlich $(y+1)r > p$, so folgt wegen $-(y+1) \equiv p - (y+1) \pmod{p}$:

$$-(y+1)r \equiv [p - (y+1)]r;$$

mithin muss jetzt

$$r < \frac{p}{p - (y+1)}$$

sein.

Wenn also für den Fall $yr > p$ nur $r < \frac{p}{p-y}$ ist, so lassen sich die beiden andern Wurzeln $x$ der Congruenz $x^3 \equiv b \pmod{p}$ stets als Vielfache der dritten Wurzel auffassen.

Selbstverständlich braucht man für $y$ nur den einen (positiven) Werth zu beachten, da ja der andere dieselben Werthe von $x$ liefern muss.

Nimmt man beispielsweise $p = 61$, so folgt aus der Congruenz $(2y+1)^2 \equiv -3 \pmod{61}$ $2y + 1 \equiv \pm 27$, d. g. $y \equiv \begin{matrix} +13 \\ -14 \end{matrix}$; daher heissen die beiden Wurzeln der Congruenz $(2x+r)^2 \equiv -3r^2 \pmod{61}$ $x \equiv 13r$, $x \equiv -14r$. Setzt man jetzt z. B. $r \equiv 3$, so stellen $x \equiv 3, x \equiv 39, x \equiv -42 \equiv 19$ die 3 Wurzeln der Congruenz $x^3 \equiv 27 \pmod{61}$ vor. Für $r > 4$ kann nunmehr kein $x < p$ (absolut genommen) als Multiplum von $r$ angesehen werden, indem $r$ nicht mehr kleiner als $\frac{61}{61-14} = \frac{61}{47}$ (oder $\frac{61}{61-13} = \frac{61}{58}$) ist.

*) Fällt $s_1$ mit keinem der schon gefundenen Werthe $s$, $\alpha$, $\beta$ zusammen, so kann auch $r_1$ mit keinem dieser Werthe übereinstimmen, weil sonst $s_1^3$ mit $s^3 \equiv \alpha^3 \equiv \beta^3$ congruent sein müsste und sonach die Congruenz $r^3 - s^3 \equiv 0 \pmod{p}$ mehr als 3 Wurzeln besässe, was doch unmöglich.

augenscheinlich in $\frac{p-1}{3}$ incongruente Gruppen; jede derselben besteht aus 3 Zahlen, deren Cuben in Bezug auf $p$ denselben Rest lassen. Es ist daher die Anzahl der $b$, für welche die Congruenz $x^3 \equiv b \pmod{p}$ zu den Möglichkeiten gehört, $= \frac{p-1}{3}$.

Diese $b$ bilden also die sämmtlichen incongruenten Wurzeln der Congruenz

$$y^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Besteht sonach für eine Zahl $b$ die Beziehung

$$b^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p},$$

so muss auch

$$x^3 \equiv b \pmod{p}$$

Statt finden, d. i. die Zahl $b$ muss wirklich einem der möglichen Reste von $x^3$ in Bezug auf $p$ congruent sein. Denn wäre dies nicht der Fall, bestände aber dennoch die Congruenz $b^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$, so hätte die Congruenz $y^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1$ ja mehr als $\frac{p-1}{3}$ Wurzeln, was doch unmöglich ist.

Die vorhin entwickelten Resultate setzen $p-1$ durch 3 theilbar voraus, d. h. $p$ muss unter die Form $3n+1$ fallen. Welche Folgerungen aber werden sich ergeben wenn $p$ eine Primzahl $3n+2$ oder — was dasselbe $-3n-1$ darstellt? Auch hier wählen wir, was ja selbstverständlich geschehen darf, unsere $x$ wieder in der Reihe von 1 bis $p-1$ und nehmen an, einer bestimmten $s$ von ihnen entspreche eine andere $r$ so, dass:

$$r^3 - s^3 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Alsdann ist entweder $r \equiv s$, oder $(2r+s)^2 \equiv -3r^2 \pmod{p}$. Nun kann aber diese letztere Congruenz nicht bestehen, weil für Primzahlen von der Form $p = 3n-1$ $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$; mithin ist $r^3 - s^3 \equiv 0$ nur für $r \equiv s$, d. h. $r = s$ möglich. Die Zahlen $1^3, 2^3, \ldots (p-1)^3$ geben daher in Bezug auf $p$ sämmtlich verschiedene Reste, und somit ist die Anzahl der $b$ in der Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{p = 3n-1}$$

mit $p-1$ gleichbedeutend.

Anmerkung 1. Ist $p = 2$, so ist die Congruenz

(1) $$(2r + s)^2 \equiv -3s^2 \pmod{p}$$

mit der folgenden gleichbedeutend:

$$(2r + s)^2 \equiv 1 \pmod{2},$$

d. h. für $2r + s$ ist jede beliebige ungerade Zahl zu setzen. Die stets mögliche Congruenz

$$x^3 \equiv 1 \pmod{2}$$

hat dann aber nur die eine Wurzel $x \equiv 1 \pmod{p = 2}$.

Daraus, dass (1) möglich ist, darf aber nicht geschlossen werden, dass der für $r$ gefundene Werth auch der Congruenz $r^2 + rs + s^2 \equiv 0 \pmod{2}$ genügen muss. Diese ist unmöglich, wenn ($r$ und) $s$ ungerade.

Anmerkung 2. Wir haben oben von den Wahrheiten Gebrauch gemacht:

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = 1,\ p = 3n + 1;\ \left(\frac{-3}{p}\right) = -1,\ p = 3n + 2\ (= 3n - 1).$$

Am elegantesten dürften dieselben sich mittelst des Legendre'schen Reciprocitäts-Satzes beweisen lassen.

Ist $p$ von der Form $3n + 1$ und ebenso in Bezug auf 4 von der Form $4n_1 + 1$, so ist dem genannten Gesetze zufolge $\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = 1$; weil aber auch $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, so folgt

$$\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right) = 1.$$

Lässt aber die Primzahl $p = 3n + 1$ durch 4 getheilt den Rest 3, so hat man:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = -1;\ \left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right) - 1, \text{ also ebenfalls } \left(\frac{-3}{p}\right) =$$

Für $p = 3n + 2$ hat man, wenn bei der Division mit 4 der Rest

erscheint:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = -1, \text{ folglich auch } \left(\frac{-3}{p}\right) = -1.$$

Und giebt $p$ in Bezug auf 4 den Rest 3, so entspringt:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right) = 1, \text{ somit } \left(\frac{-3}{p}\right) = -1.$$

Man vergleiche übrigens auch den einfachen Beweis von Crelle in seiner Encyklopädischen Darstellung der Zahlentheorie (besonders abgedruckt aus dem Journale für reine und angewandte Mathematik) §. 68. S. 236. etc.

## §. 4.

Dem Fermat'schen Theoreme zufolge ist stets:

$$b^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p = 3n + 1}.$$

Da nun

$$b^{3n} - 1 = (b^n - 1)(b^{2n} + b^n + 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

so wird, falls $b^n - 1$ durch $p$ nicht aufgeht, nothwendig

$$b^{2n} + b^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sein. Hieraus aber fliesst:

$$(2b^n + 1)^2 \equiv -3 \pmod{p}.$$

Bekanntlich hat diese Congruenz immer zwei incongruente Wurzeln $+ r$, $- r$, folglich kann auch $b^n$ nur zwei verschiedene (nicht congruente) Werthe besitzen, wenn $b$ cubischer Nichtrest von $p$ ist. Setzen wir $r$ als ungerade voraus, so giebt die Congruenz ersten Grades (in Bezug auf $b^n$ als Unbekannte):

$$2b^n + 1 \equiv r \pmod{p}$$
$$b^n \equiv \frac{r-1}{2};$$

und aus der Congruenz

$$2b^n + 1 \equiv -r \pmod{p}$$

folgt:

$$b^n \equiv -\frac{r+1}{2} \equiv p - \frac{r+1}{2}.$$

Ist hingegen der Werth von $r$ gerade, so findet man:

$$b^n \equiv \frac{p + r - 1}{2} \pmod{p},$$

$$b^n \equiv \frac{p - (r+1)}{2} \pmod{p}.$$

Da $0 < r < p$, so kann offenbar $b^n$ nie $\equiv \frac{p-1}{2}$ sein. Und ebenso leicht ersieht man, dass $b^n$ auch nie $\equiv -1$ sein kann. Ueberhaupt bezeichnen 2 und $p-(\gamma+1)$ die äussersten Grenzen für die möglichen Werthe von $b^n$; $\gamma$ stellt dabei die grösste in $\sqrt{p}$ enthaltene ganze Zahl vor. Denn sei $b^n \equiv p-\gamma = p-[\sqrt{p}]$, so muss die Beziehung gelten:

$$[2p-(2\gamma-1)]^2 \equiv 4\gamma^2-4\gamma+1 \equiv -3 \pmod{p}, \text{ d. h.}$$
$$\gamma^2-\gamma+1 \equiv 0 \pmod{p},$$

was unmöglich, indem $\gamma^2-\gamma+1$ stets $< p$.

**Beispiel 1.** Sei $p=61$, alsdann folgt aus $(2b^n+1)^2 \equiv -3 \pmod{61}$ $2b^n+1 \equiv 27$, $2b^n+1 \equiv -27 \equiv 34$, daher $b^n \equiv \frac{27-1}{2} = 13$, $b^n \equiv -\frac{27+1}{2} = -14$, oder $b^n \equiv \frac{61+34-1}{2} = 47$. Für den Modul 61 bezeichnen also 13 und 47 diejenigen Werthe, denen $b^{\frac{p-1}{3}} = b^{10}$ congruent sein muss, falls $b$ Nichtcubikrest von $p=61$ ist.

**Beispiel 2.** Für $p=13$ hat man $2b^n+1 \equiv \pm 6 \pmod{13}$; $r$ ist hier folglich gerade, mithin:

$$b^n \equiv \frac{13+6-1}{2} = 9 \pmod{13}$$

und:

$b^n \equiv \frac{13-(6+1}{2} = 3 \pmod{13}$, oder wegen $-6 \equiv 7 \pmod{13}$:

$b^n \equiv \frac{7-1}{2} = 3$, wie vorhin. Ist sonach eine Zahl $b$ cubischer Nichtrest von $p=13$, so muss sie in der Potenz $\frac{p-1}{3} = 4$ entweder congruent 3, oder 9 (mod. 13) sein.

## §. 5.

Nennen wir jetzt die beiden Werthe aus der Reihe von 1 bis $p-1$, denen $b^n$ congruent sein kann, falls $b^n$ nicht $\equiv 1 \pmod{p}$, der Kürze wegen $\alpha$ und $\beta$.

Vermöge des im Vorstehenden Bewiesenen muss offenbar der eine der cubischen Nichtreste in der $n$ten Potenz mit $\beta$ con-

gruent sein; mithin würde die Anzahl der Nichtreste, welche, zur $\frac{p-1}{3}$ten Potenz erhoben, den Rest $\alpha$ geben, $\frac{2(p-1)}{3}-1=\frac{2p-5}{3}$ betragen. Nun kann aber eine Congruenz $n$ten Grades in Bezug auf einen Primzahlmodulus nicht mehr als $n$ incongruente Wurzeln besitzen; sonach muss die Anzahl der cubischen Nichtreste, welche, zur $n$ten Potenz erhoben, den Rest $\alpha$, $\beta$ geben, in beiden Fällen gleich gross, nämlich $=\frac{p-1}{3}$ sein.

Nun sei $b_1^n\equiv\alpha$, $b_2^n\equiv\beta$, so ist $(b_1b_2)^n$ und folglich auch jede mit $b_1b_2$ congruente Zahl $\equiv\alpha\beta\equiv 1 \pmod p$. Denn wäre $\alpha\beta$ nicht congruent 1, gehörte also die Zahl $b_1b_2$ (oder die mit ihr congruente) zu den cubischen Nichtresten; so könnte nach dem Vorhergehenden $(b_1b_2)^n$ nur mit einer der Zahlen $\alpha$, $\beta$ congruent sein. Dies aber ist, wie man sieht, unmöglich. Sind somit zwei cubische Nichtreste in der $\frac{p-1}{3}$ten $= n$ten Potenz nicht derselben Zahl congruent, so ist ihr Product ein cubischer Rest.

Ist dagegen $b_1^n\equiv b_2^n\equiv\alpha \pmod p$, geben folglich beide dieselbe Zahl, z. B. $\alpha$, als Rest, so kann $(b_1b_2)^n$ nur congruent $\beta$ sein, weil $\alpha^2\equiv 1$, $\alpha$ entweder Unmögliches, oder der Voraussetzung Widersprechendes liefert.

Auch erhellt sofort, dass das Product aus einem cubischen Reste in einen Nichtrest ein cubischer Nichtrest ist.

Allgemein sei $b=acd\ldots$, so ist auch $b^{\frac{p-1}{3}}=a^{\frac{p-1}{3}}c^{\frac{p-1}{3}}\ldots$ $=a^nc^nd^n\ldots$. Jeder der Factoren $a$, $c$, $d\ldots$ kann aber in der $n$ten Potenz nur einer der Zahlen $1, \alpha, \beta$ congruent sein. Nennen wir nun die Anzahl der $\alpha$ $\mu$, die der $\beta$ $\nu$, und setzen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, $\mu > \nu$ voraus; so wird offenbar

$$b^n\equiv\alpha^\mu.\beta^\nu=(\alpha\beta)^\nu.\alpha^{\mu-\nu} \pmod p$$

sein. Jede der Zahlen $\alpha$, $\beta$ aber ist erst in der dritten und nur erst in dieser Potenz $\equiv 1$, d. h. $\alpha$, $\beta$ gehören zum Exponenten 3. Daher ist

$$b^n\equiv 1 \pmod p,$$

wenn die Differenz $\mu-\nu$ durch 3 aufgeht.

Wird $b$ in Primfactoren zerlegt, ist also $b = a^{a_1} c^{c_1} d^{d_1} \ldots$, so brauchen wir offenbar nur diejenigen zu untersuchen, deren Exponent — nach Ausscheidung des grössten darin enthaltenen Vielfachen von 3 — der Zahl 1, oder 2 gleich ist. Denn

$$a^n \equiv \alpha \pmod{p}$$

giebt, $v = 1$ oder 2 gesetzt,

$$(a^n)^{3t+v} = (a^{3t+v})^n = a^{3nt} . a^{nv} \equiv \alpha^v \pmod{p}.$$

Ist $v = 2$, so ist $\alpha^2 \equiv \beta$.

## §. 6.

Wenn $b^n$ nicht $\equiv 1 \pmod{p}$ ist, so findet die Congruenz $b^{2n} + b^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ Statt, d. h.

$$(b^n + 1)^2 - b^n \equiv 0 \text{*)}.$$

Nun ist aber $n = 2m$, mithin zerfällt die vorstehende Congruenz in die beiden andern:

$$b^{2m} + 1 \equiv \quad b^m \pmod{p},$$
$$b^{2m} + 1 \equiv -b^m \pmod{p}.$$

Gleichzeitig können dieselben offenbar nicht eintreten, weil ihre Differenz $2b^m$ kein Vielfaches von $p$ ausdrückt.

Substituiren wir jetzt für $b^{2m} = b^n$ die möglichen congruenten Werthe $\alpha$, $\beta$, so erhalten wir die Beziehungen:

$$b^m \equiv \quad \alpha + 1 \pmod{p},$$
$$b^m \equiv -(\alpha + 1) \equiv p - (\alpha + 1)$$

und

$$b^m \equiv \quad \beta + 1 \pmod{p},$$
$$b^m \equiv -(\beta + 1) \equiv p - (\beta + 1).$$

Den in §. 4. gegebenen Werthen von $\alpha$ und $\beta$ zufolge aber

---

*) Vermöge dieser Beziehung ist also stets $\alpha^2 + \alpha + 1 \equiv 0$ oder $(\alpha + 1)^2 \equiv \alpha$, $(\beta + 1)^2 \equiv \beta$. — Und beachtet man, dass $\alpha + \beta = p - 1$, so ergeben sich aus $b^{2n} \equiv -b^n - 1 \pmod{p}$ die schon bekannten Resultate $\alpha^2 \equiv \beta$, $\beta^2 \equiv \alpha$. — Schreibt man endlich die obige Congruenz in folgender Form:

$$(b^n - 1)^2 \equiv -3b^n \pmod{p},$$

so entspringen die interessanten Folgerungen:

$$(\alpha - 1)^2 \equiv -3\alpha \equiv p - 3\alpha; \quad (\beta - 1)^2 \equiv -3\beta \equiv p - 3\beta.$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

so folgt:

$$b^{2m}+1\equiv b^m.$$

Je nachdem also $\left(\frac{b}{p}\right)=\pm 1$ ist, muss $b^{2m}+1\equiv\mp b^m \pmod p$ sein, natürlich unter der Voraussetzung, dass weder $b^m-1$, noch $b^m+1\equiv 0 \pmod p$. Den Werthen $\alpha$, $\beta$ kann also $b^m$ nur congruent sein, wenn $\left(\frac{b}{p}\right)=1$.

Anmerkung 1. Auch hier sieht man leicht, dass

$$(\alpha+1)^2\equiv\alpha,\ (\beta+1)^2\equiv\beta \text{ und } \alpha^2\equiv\beta,\ \beta^2\equiv\alpha$$

sein muss.

Anmerkung 2. Eine andere Form dieser interessanten Folgerungen endlich ist folgende. Giebt man nämlich den beiden Congruenzen

$$b^{2m}+b^m+1\equiv 0 \pmod p \text{ und } b^{2m}-b^m+1\equiv 0$$

beziehungsweise die Formen:

$$(b^m+1)^2\equiv b^m \pmod p \text{ und } (b^m-1)^2\equiv -b^m,$$

und nennt man der Kürze wegen den Rest von $b^m$ in Bezug auf $p$ $\gamma$; so sieht man, dass:

$$(\gamma+1)^2\equiv\gamma \pmod p, \text{ wenn } \left(\frac{b}{p}\right)=1$$

und:

$$(\gamma-1)^2\equiv p-\gamma \pmod p, \text{ wenn } \left(\frac{b}{p}\right)=-1.$$

Berücksichtigt man aber, dass für $\left(\frac{b}{p}\right)=1$ nur $\gamma=\alpha$, oder $=\beta$ sein kann, dass hingegen für $\left(\frac{b}{p}\right)=-1$ $\gamma$ entweder $=\alpha+1$, oder $=\beta+1$ ist, so hat man die obigen Resultate.

Anmerkung 3. Hat man für irgend eine durch $p$ nicht theilbare Zahl $b$ gefunden, dass sie in der Potenz $\frac{p-1}{6}$ einem d möglichen Werthe $\alpha$, $\beta$ von $b^{2m}=b^{\frac{p-1}{3}}$ congruent ist; so weiss man nach dem Obigen sofort, dass $\left(\frac{b}{p}\right)=1$; ist dagegen $b^m\equiv\alpha+1$, oder $\equiv\beta+1$, so muss $\left(\frac{b}{p}\right)=-1$ sein.

Wir benutzen noch die Gelegenheit, gleich einige andere specielle Resultate mit anzuführen.

Setzt man $b = p - 1 \equiv -1 \pmod{p}$, so wird $b^{\frac{p-1}{6}} = b^m = (p-1)^m \equiv (-1)^m$ sein, d. h. es ist $(p-1)^m \equiv \pm 1 \pmod{p}$, je nachdem $\frac{p-1}{6} = m$ zu den geraden oder ungeraden Zahlen gehört. Mithin ist im ersten Falle $\left(\frac{p-1}{p}\right) = +1$; im zweiten dagegen ist $\left(\frac{p-1}{p}\right) = -1$.

Dass dies Resultat einen besondern Fall des folgenden darstellt:

$$\left(\frac{-1}{p}\right), \text{ d. h. } \left(\frac{p-1}{p}\right) = \pm 1, p = \begin{matrix} 4n+1 \\ 4n+3 \end{matrix},$$

erkennt man sofort.

Bezeichnet $g$ eine primitive Wurzel von $p$, so müssen offenbar die Zahlen:

$$g^0, g^3, g^6, \ldots g^{p-4}$$

cubische Reste von $p$ sein. Dagegen sind die Potenzen:

$$g^1, g^4, g^7, \ldots g^{p-3} \text{ und } g^2, g^5, g^8, \ldots g^{p-2}$$

in der $\frac{p-1}{3}$ ten Potenz beziehungsweise mit $\alpha$ und $\alpha^2$ congruent.

Mit der grössten Leichtigkeit folgt endlich der Satz, dass 8, sowie $p-8$ stets cubische Reste von $p = 3n+1$ sind, und dass für $64 > p$ und $64 \equiv r \pmod{p}$ auch $r$ und $p-r$ zu den cubischen Resten von $p$ gehören. So ist z. B. für $p = 61$ $64 \equiv 3 \pmod{61}$, mithin bedeuten 3 und 58 cubische Reste von 61.

Aehnliche Sätze könnte man offenbar in Bezug auf die folgenden Zahlen 3, 4, 5, .... zu ermitteln suchen, was jedoch aus leicht begreiflichen Gründen unterbleiben soll.

## §. 8.

Unsere bisherigen Betrachtungen setzten den Modul als eine Primzahl voraus. Es liegt uns nun ob, zu untersuchen, welche Beziehungen Statt haben, wenn der Modul eine zusammengesetzte Zahl $k$ ausdrückt. Ich werde dabei einen ähnlichen Gedankengang innehalten, wie ihn mein grosser Lehrer, der vor-

treffliche Dirichlet, in seinen Vorlesungen über Zahlentheorie in Bezug auf quadratische Reste zu geben pflegte. Wir betrachten also zunächst den Fall, wo der Modul $k$ eine Potenz $p^\pi$ der Primzahl $p=3n+1$ darstellt; dabei setzen wir, wie immer, $b$ als relative Primzahl zum Modul $k$ voraus.

Nehmen wir zuvörderst an, die Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{p^\pi} \tag{1}$$

sei möglich, und verstehen wir unter $\alpha$ eine bestimmte, unter $x$ irgend eine Wurzel der vorgelegten Congruenz, so folgt aus

$$x^3 - \alpha^3 \equiv 0 \pmod{p^\pi},$$

dass entweder

$$x \equiv \alpha \pmod{p^\pi},$$

oder

$$x^2 + \alpha x + \alpha^2 \equiv 0 \pmod{p^\pi},$$

d. g.

$$(2x+\alpha)^2 \equiv -3\alpha^2,$$

Statt finden muss. Da diese letztere Congruenz wegen $\left(\frac{-3\alpha^2}{p}\right) = 1$ möglich ist, und somit zwei incongruente Wurzeln besitzt; so existiren auch für $x$ zwei incongruente Werthe. Diese aber können dem Werthe $x \equiv \alpha \pmod{p^\pi}$ nicht congruent sein, weil der Voraussetzung zufolge die Differenz $x^2+\alpha x+\alpha^2-(x-\alpha)^2 = 3\alpha x$ nicht durch $p^\pi$ aufgehen kann.

Es hat daher die Congruenz (1) entweder gar keine, oder drei incongruente Wurzeln.

Damit nun die Congruenz (1) möglich sei, ist es offenbar eine unerlässliche Bedingung, dass

$$x^3 \equiv b \pmod{p} \tag{2}$$

zu den möglichen Congruenzen gehört. Lässt sich dann weiter allgemein zeigen, dass aus der Möglichkeit der Congruenz (1) stets das Statthaben der Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{p^{\pi+1}}$$

folgt, so dürfen wir offenbar behaupten, dass (1) möglich, wenn $b$ cubischer Rest von $p$ ist. Zu dem Behufe bezeichne $\alpha$ eine Wurzel der Congruenz (1); es sei also:

$$\alpha^3 - b = hp^\pi.$$

Ist aber $x \equiv \alpha \pmod{p^\pi}$ eine Wurzel der Congruenz (1), d. h. ist $x = \alpha + p^\pi . y$, so wird:

$$x^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 p^\pi y + 3\alpha p^{2\pi} y^2 + p^{3\pi} y^3,$$

mithin:

$$x^3 - b \equiv p^\pi (3\alpha^2 y + h) \pmod{p^{\pi+1}}.$$

Soll nun $x^3 - b$ durch $p^{\pi+1}$ theilbar sein, so hat man offenbar $y$ so zu wählen, dass

$$3\alpha^2 y \equiv -h \pmod{p}$$

wird, eine Bedingung, die stets befriedigt werden kann, da weder 3, noch $\alpha$ durch $p$ aufgeht.

Es lässt sich also in der That aus einer Wurzel $\alpha$ der Congruenz (1) stets eine Wurzel der Congruenz $x^3 \equiv b \pmod{p^{\pi+1}}$ ableiten, welche $\equiv \alpha \pmod{p^\pi}$ ist. Auf diese Weise erhellt sofort, dass aus einer Wurzel $\alpha$ der Congruenz $x^3 \equiv b \pmod{p}$ nach und nach eine Wurzel derselben Congruenz in Bezug auf die Moduli $p^2, p^3, \ldots . p^\pi$ gewonnen werden kann *). Daher das Resultat:

Bezeichnet $b$ eine durch die Primzahl $p = 3n + 1$ nicht theilbare Zahl, so ist für die Möglichkeit der Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{p^\pi}$$

die erforderliche und hinreichende Bedingung, dass $b$ cubischer Rest von $p$, also

$$b^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist; wird dieser Bedingung genügt, so besitzt die gegebene Congruenz drei incongruente Wurzeln, welche ermittelt werden können, sobald man eine Wurzel der Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{p}$$

kennt.

**Beispiel.** Sei $p = 7$, $\pi = 3, 4$; also $x^3 \equiv b \pmod{7^\pi}$. Nun ist für $p = 7$ die Zahl 6 ein cubischer Rest, indem $6^2 \equiv 1 \pmod{7}$.

---

*) Man kann dies Uebergehen von einer gegebenen Potenz $p^\pi$ des Moduls zu einer höheren $p^{\pi+\pi_1}$, wie aus dem Obigen sofort einleuchtet, dadurch abkürzen, dass man $\pi_1 \overset{=}{<} \pi$ (statt 1 also $\pi_1$) setzt, mithin von $\pi = 2$ gleich zu $\pi = 4$ übergeht.

Die eine Wurzel der Congruenz $x^3 \equiv 6 \pmod 7$ heisst $x \equiv 3$; mithin ist $\alpha^3 - b = hp^\pi$, hier $27 - 6 = 3.7$, folglich giebt $3\alpha^2 y \equiv -h \pmod 7$:

$$3.9.y \equiv -3 \pmod 7 \quad \text{oder} \quad 9y \equiv -1,$$

d. g.

$$y \equiv 3 \pmod 7,$$

und sonach bezeichnet $x = \alpha + p^\pi y = 3 + 21 = 24$ eine Wurzel der Congruenz $x^3 \equiv 6 \pmod{49}$. Die beiden andern Wurzeln findet man durch Auflösung der Congruenz

$$x^2 + 24x + 24^2 \equiv 0 \pmod{49} \quad \text{oder} \quad (2x + 24)^2 \equiv -3.24^2,$$

d. g.

$$2x + 24 \equiv \pm 6, \quad \text{also} \quad x \equiv -9 \quad \text{und} \quad x \equiv -15 \pmod{49}.$$

Hierdurch sind wir nun in den Stand gesetzt, auch die Wurzeln der Congruenzen $x^3 \equiv 6 \pmod{7^3 = 343}$ und $x^3 \equiv 6 \pmod{7^4}$ zu bestimmen. Eine dieser Wurzeln heisst nun für den Modul $7^3 = 343$ $x \equiv 24 + 98 = 122$ und für den Modul $7^4$ $x \equiv \alpha' = \alpha + p^\pi y = 24 + 16.49 = 808$; die letztere Wurzel haben wir gleich aus der Wurzel 24 der Congruenz $x^3 \equiv 6 \pmod{49}$ abgeleitet, indem $24^3 \equiv -12 \pmod{49}$, $282 \equiv -12 \pmod{49}$ [denn $\alpha^3 - b = hp^\pi$, d. i. $24^3 - 6 = 282.49$], also die Congruenz

$$3\alpha^2 y \equiv -h \pmod{p^{\pi_1}}$$

die folgende giebt:

$$3(-12)y \equiv -(-12) \pmod{7^2},$$

d. h.

$$y \equiv 16 \pmod{49}.$$

## §. 9.

Ein Blick auf das im Obigen angewendete Beweisverfahren zeigt, dass sich dasselbe sofort auf den Fall übertragen lässt, in welchem der Modul $k$ eine Potenz $p^\pi$ der Primzahl $p = 3n + 2$ ausdrückt. Nun wissen wir aber aus dem Früheren, dass die Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{p = 3n + 2}$$

stets möglich ist; mithin gehört auch

$$x^3 \equiv b \pmod{p^\pi}$$

zu den immer möglichen Congruenzen. Nur hat in diesem Fa

die vorgelegte Congruenz bloss eine Wurzel; denn ist $\alpha$ eine der Wurzeln, so kann nur der Factor $x-\alpha$ von $x^3-\alpha^3$ durch $p^\pi$ aufgehen; die Congruenz

$$x^2+\alpha x+\alpha^2\equiv 0 \pmod{p^\pi}$$

oder, was dasselbe,

$$(2x+\alpha)^2\equiv -3\alpha^2 \pmod{p^\pi}$$

ist, — wegen $\left(\frac{-3\alpha^2}{p}\right)=-1$, — unmöglich.

Wie man sieht, ist dieser Grund nicht anwendbar, sobald man $p=2$ setzt. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass auch für diesen Fall die vorgelegte Congruenz $x^3\equiv b \pmod{2^\pi}$ nur eine Wurzel haben kann. Denn da $b$ und folglich auch jedes $x$ ungerade sein muss, so ist $x^2+\alpha x+\alpha^2$ nie gerade und demnach nie durch $2^\pi$ theilbar *).

## §. 10.

Wir kommen nun zu dem Falle, wo der Modul eine Potenz der Zahl 3 ausdrückt, und zwar werden wir zunächst die Congruenz

(1) $$x^3\equiv b \pmod 9$$

betrachten. Da der Voraussetzung zufolge $b$ eine nicht durch 3 aufgehende Zahl bedeuten muss, so kann offenbar auch $x$ nur eine der Formen $3n\pm 1$ besitzen. Nun ist aber

$$(3n\pm 1)^3=(3n)^3\pm 3.(3n)^2+3.3n\pm 1,$$

d. g.

$$(3n\pm 1)^3\equiv\pm 1 \pmod 9.$$

Soll demnach die Congruenz (1) möglich sein, so muss nothwendig

$$b\equiv\pm 1 \pmod 9$$

sein. Wird umgekehrt dieser Bedingung genügt, so hat offenbar die Congruenz (1) die drei incongruenten Wurzeln

$$x\equiv 1,\ \equiv 4,\ \equiv 7 \pmod 9$$

---

*) Ist $\pi\gtreqless 3$, so ist offenbar die Congruenz

$$(2x+\alpha)^2\equiv -3\alpha^2 \pmod{2^\pi}$$

unmöglich, indem $-3\alpha^2$ — wegen des ungeraden $\alpha$ — nicht $\equiv 1$, sondern $\equiv -3 \pmod 8$ ist.

oder

$$x \equiv 2,\ \equiv 5,\ \equiv 8 \pmod 9),$$

je nachdem $b \equiv 1$ oder $b \equiv -1$.

Jede durch 3 nicht theilbare Zahl kann ferner unter einer der Formen $9n \pm 1$, $9n \pm 2$, $9n \pm 4$ aufgefasst werden. Erhebt man jede derselben zur dritten Potenz, so kommt:

$$(9n \pm 1)^3 \equiv \pm 1 \pmod{27},\quad (9n \pm 2)^3 \equiv \pm 8,\quad (9n \pm 4)^3 \equiv \pm 10.$$

Soll daher die Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{27} \tag{2}$$

möglich sein, so ist die unerlässliche Bedingung die, dass man habe entweder

$$b \equiv \pm 1 \pmod{27} \text{ oder } b \equiv \pm 8 \pmod{27},$$

oder endlich

$$b \equiv \pm 10 \pmod{27}.$$

Und umgekehrt überzeugt man sich sogleich, dass in jedem dieser Fälle die Congruenz (2) respective die drei inconguenten Wurzeln hat:

$$x \equiv \pm 1,\ \equiv \pm 10,\ \equiv \pm 19 \pmod{27},$$

$$x \equiv \pm 2,\ \equiv \pm 11,\ \equiv \pm 20 \pmod{27},$$

$$x \equiv \pm 4,\ \equiv \pm 13,\ \equiv \pm 22 \pmod{27}.$$

Mit Berücksichtigung der für den Modul 27 geltenden Bedingungen können wir offenbar sofort behaupten, dass die Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{3^\pi}, \tag{3}$$

wo $\pi \gtrless 3$ ist, zu den Unmöglichkeiten gehört, wenn $b$ mit keiner der Zahlen $\pm 1$, $\pm 8$, $\pm 10$ nach dem Modul 27 congruent ist. Dass aber umgekehrt irgend eine dieser Beziehungen das Bestehen der Congruenz (3) zur Folge hat, werden wir sogleich sehen. Setzen wir nämlich voraus, die Congruenz (3) habe die Wurzel $\alpha$, d. h.

$$\alpha^3 - b = h.3^\pi,$$

so folgt für $x = \alpha + 3^{\pi-1}.y$:

$$x^3 - b = 3^\pi(\alpha^2 y + h) + \alpha.3^{2\pi-1}y^2 + 3^{3\pi-3}y^3,$$

mithin:

$$\frac{x^3-b}{3^\pi} = \alpha^2 y + h + \alpha . 3^{\pi-1} y^2 + 3^{2\pi-3} y^3.$$

Durch zweckmässige Wahl des $y$ wird man diese Gleichung offenbar nochmals durch $3^{\pi_1}$ theilbar machen können. Nimmt man $\pi_1 \leqq \pi - 1$, so entspringt die Congruenz ersten Grades:

$$\alpha^2 y + h \equiv 0 \pmod{3^{\pi_1}}, \tag{4}$$

die stets möglich ist, weil $\alpha$ nicht durch 3 aufgeht. Wir können daher eine Wurzel $\alpha'$ der Congruenz $x^3 - b \equiv 0 \pmod{3^{\pi+\pi_1}}$ aus der Wurzel $\alpha$ der Congruenz (3) bilden, indem wir $\alpha + 3^{\pi-1} y = \alpha'$ setzen, wo $y$ aus der Congruenz (4) zu entnehmen ist.

Da nun die Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{27}$$

unter den angegebenen Bedingungen stets möglich ist, so wird man aus dieser gleich eine Wurzel der Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{3^5}$$

ableiten und von dieser Congruenz gleich wieder zu der folgenden

$$x^3 \equiv b \pmod{3^9}$$

übergehen können, und so weiter.

Ist auf diese Weise eine Wurzel der Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{3^\pi}$$

gefunden, so ergiebt sich, dass von den Factoren von $x^3 - \alpha^3 = (x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$ nur einer durch $3^{\pi-1}$ theilbar zu machen ist, weil der eine von ihnen durch 3 aufgeht. Denn wäre gleichzeitig

$$x - \alpha \equiv 0 \pmod{3^\pi}$$

und

$$x^2 + \alpha x + \alpha^2 \equiv 0 \pmod{3^\pi},$$

so müsste auch $3\alpha x \equiv 0 \pmod{3^\pi}$ sein, was wegen der Natur von $\alpha$ und $x$ unmöglich ist. Bringt man ferner $x^2 + \alpha x + \alpha^2 \equiv 0$ auf die Form

$$(2x + \alpha)^2 \equiv -3\alpha^2 \pmod{3^\pi},$$

so erkennt man sofort, dass $2x + \alpha$ die Form $3m$ besitzen muss; mithin ergibt sich die Congruenz

$$3m^2 \equiv -\alpha^2 \pmod{3^{\pi-1}};$$

diese aber ist unmöglich, weil $\alpha$ eine durch 3 nicht theilbare Zahl bedeutet. Daher kann auch nur $x-\alpha$ durch $3^{\pi-1}$ theilbar gemacht werden, und sonach wird der Ausdruck $x=\alpha+3^{\pi-1}.t$, wo $t$ eine beliebige Zahl bedeutet, die Wurzeln der Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{3^\pi}$$

liefern. Nimmt man $t=0, 1, 2$, so erhält man:

$$x \equiv \alpha \pmod{3^\pi}, \quad x \equiv \alpha + 3^{\pi-1} \pmod{3^\pi}$$

und

$$x \equiv \alpha + 2.3^{\pi-1} \text{ oder } \equiv \alpha - 3^{\pi-1} \pmod{3^\pi},$$

d. h. drei incongruente Wurzeln.

Unsere bisherigen Untersuchungen haben uns also folgendes Resultat gelehrt:

1) Für eine durch 3 nicht theilbare Zahl $b$ ist die Congruenz

$$x^3 \equiv b \pmod{3^\pi}$$

stets möglich, wenn $\pi=1$; in diesem Falle hat die vorgelegte Congruenz nur eine Wurzel $x \equiv \pm 1$, je nachdem $b \equiv \pm 1 \pmod 3$.

2) Für $\pi=2$ ist die gegebene Congruenz nur dann möglich, wenn $b \equiv \pm 1 \pmod 9$, und zwar besitzt sie dann jedesmal drei incongruente Wurzeln.

3) Ist endlich $\pi \gtrless 3$, so gehört genannte Congruenz nur dann zu den möglichen, wenn eine der Bedingungen Statt hat:

$$b \equiv \pm 1, \quad \equiv \pm 8, \quad \equiv \pm 10 \pmod{27}.$$

In jedem dieser Fälle wird alsdann die Anzahl der incongruenten Wurzeln unserer Congruenz durch die Zahl 3 ausgedrückt.

Beispiel. Sei $b=10$ und $\pi=4$, also $x^3 \equiv 10 \pmod{81}$. Aus $x^3 \equiv 10 \pmod{27}$ folgt die eine Wurzel $x \equiv 4$; mithin ist $4^2 y \equiv -\frac{4^3-10}{27} = -2 \pmod 3$ die aufzulösende Congruenz ersten Grades; diese giebt $8y \equiv -1 \pmod 3$, somit $y \equiv 1 \pmod 3$. Die Wurzeln der Congruenz $x^3 \equiv 10 \pmod{81}$ heissen daher:

$$\alpha' = \alpha + 3^{\pi-1}y = 4+9 = 13; \quad \alpha'' = 13+27 = 40;$$

$$x \equiv \alpha''' = 13+2.27 = 67 \equiv -14 \pmod{81}.$$

Hätte man statt der Wurzel 4 der Congruenz $x^3 \equiv 10 \pmod{}$ die Wurzel $x \equiv 22$ genommen, so hätte man gefunden:

$y \equiv 2 \pmod 3$ und $x \equiv \alpha' \pmod{81} = \alpha + 3^{\pi-1}y = 22 + 9.2 = 40$;

$$x \equiv \alpha'' = 40 + 27 = 67; \quad x \equiv 40 + 54 \equiv 13 \pmod{81},$$

wie es nicht anders sein kann.

## §. 11.

Nachdem wir uns auf diese Weise über die Möglichkeit einer Congruenz $x^3 \equiv b \pmod k$, in der $b$ und $k$ relative Primzahlen bezeichnen und in welcher der Modul $k$ entweder eine Primzahl, oder irgend eine Potenz derselben darstellt, Kenntniss verschafft haben, sind wir nunmehr im Stande, den Fall näher zu beleuchten, in welchem der Modul $k$ irgend eine zusammengesetzte Zahl ausdrückt. Ist also $k = 3^\varrho p^\pi . p_1^{\pi_1} \ldots \times q^\varkappa . q_1^{\varkappa_1} \ldots$, wo $\varrho = 0, 1, 2, \gtreqless 3$ ist und die $p$ Primzahlen der Form $3n+1$, die $q$ aber Primzahlen von der Form $3n+2$ bedeuten; so folgt aus der Möglichkeit der Congruenz

$$(1) \qquad x^3 \equiv b \pmod k$$

offenbar auch stets das Stattfinden jeder der Congruenzen:

$$(2) \quad \begin{cases} x^3 \equiv b \pmod{3^\varrho}, \\ x^3 \equiv b \pmod{p^\pi}, \\ x^3 \equiv b \pmod{p_1^{\pi_1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^3 \equiv b \pmod{q^\varkappa}, \\ x^3 \equiv b \pmod{q_1^{\varkappa_1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dabei wird, um es nochmals zu wiederholen, $b$ stets als prim zum Modul $k$ vorausgesetzt.

Da also jede Wurzel der Congruenz (1) zugleich den Congruenzen (2) genügen muss, so wird nothwendig (1) unmöglich sein, wenn dies für irgend eine der Congruenzen (2) Statt findet.

Umgekehrt wird man aus den Wurzeln der Congruenzen (2) eine Wurzel der Congruenz (1) finden, wenn man ein $x$ bestimmt, das nach gegebenen Moduln (den Factoren von $k : 3^\varrho, p^\pi$, u. s. w.) bestimmten Zahlen (den Wurzeln der Congruenzen (2)) congruent ist. Jede solche Verbindung giebt alsdann eine Auflösung von der Form $x \equiv \lambda \pmod k$.

Nennt man nun $\sigma$ die Anzahl der Wurzeln von

$$x^3 \equiv b \pmod{3^\varrho}$$

und $\mu$ die Anzahl der verschiedenen Primzahlen $p$, so wird offenbar $\sigma . 3^\mu$ die Anzahl sämmtlicher Wurzeln der Congruenz (1) ausdrücken; denn jede der Congruenzen

$$x^3 \equiv b \pmod{q^\varkappa}$$

u. s. w. besitzt nur eine Wurzel. Nun ist aber $\sigma = 1$ oder $\sigma = 3$, je nachdem $\varrho = 0$, 1, oder $> 1$; daher ist die Anzahl der Wurzeln von (1) diesen Fällen entsprechend $= 3^\mu$, oder $= 3^{\mu+1}$.

So hat z. B. die Congruenz

$$x^3 \equiv 64 \pmod{105}$$

die drei Wurzeln $x \equiv 4, \equiv 64, \equiv 79 \pmod{105}$. Denn

$$x^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 3 \text{ giebt } x \equiv 1,$$
$$x^3 \equiv 64 \equiv 4 \pmod 5 \quad „ \quad x \equiv 4,$$
$$x^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 7 \quad „ \quad x \equiv 1, \equiv 2, \equiv 4.$$

Bezeichnen aber in den Congruenzen

$$x \equiv \alpha \pmod a, \quad x \equiv \beta \pmod b, \quad x \equiv \gamma \pmod c \ldots.$$

die Moduln $a, b, c, \ldots.$ relative Primzahlen zu einander, und sind $r, s, t, \ldots.$ Zahlen, welche gleichzeitig den folgenden Paaren von Congruenzen genügen:

$$r \equiv 1 \pmod a; \quad s \equiv 1 \pmod b; \quad t \equiv 1 \pmod c; \ldots.$$
$$r \equiv 0 \pmod{\frac{m}{a}}; \quad s \equiv 0 \pmod{\frac{m}{b}}; \quad t \equiv 0 \pmod{\frac{m}{c}}; \ldots.,$$

wo $m = abc \ldots.$; so ist:

$$x \equiv \alpha r + \beta s + \gamma t + \ldots. \pmod m.$$

Wendet man dies auf das obige Beispiel an, so folgt:

$$r \equiv 1 \pmod 3; \quad s \equiv 1 \pmod 5; \quad t \equiv 1 \pmod 7;$$
$$r \equiv 0 \pmod{35}; \quad s \equiv 0 \pmod{21}; \quad t \equiv 0 \pmod{15};$$

d. g.

$$r \equiv 70 \pmod{3, 35}; \quad s \equiv 21; \quad t \equiv 15;$$

demnach:

$$x \equiv 70 + 4.21 + 15 \equiv 64 \pmod{105};$$
$$x \equiv 70 + 4.21 + 30 \equiv 79 \pmod{105};$$
$$x \equiv 70 + 4.21 + 60 \equiv 4 \pmod{105}.$$

# XXXI.

## Neue Entwickelung der Theorie des Maasses der Krümmung.

Von

dem Herausgeber.

---

### Einleitung.

Die Theorie des Maasses der Krümmung, welche zuerst von Gauss in der berühmten Abhandlung: Disquisitiones circa superficies curvas. Gottingae. 1828. 4°. entwickelt worden ist, gehört unstreitig zu den schönsten und wichtigsten Arbeiten und Erfindungen dieses grossen Mathematikers, was von Niemand lebhafter als von mir anerkannt werden kann. Die Entwickelung dieser wichtigen Theorie selbst aber, wie dieselbe von Gauss, unter vielfacher Anwendung der sogenannten unendlich kleinen Grössen, ursprünglich gegeben worden ist, hat mich, wie ich offen zu gestehen keinen Anstand nehme, hauptsächlich aus dem so eben angegebenen Grunde nie vollständig befriedigt, da ich namentlich auch bei allen derartigen Untersuchungen stets auf möglichst strenge und bestimmte Gränzenbetrachtungen zurückzugehen und in solchen Gränzenbetrachtungen nicht den kleinsten Werth aller Untersuchungen dieser Art zu suchen gewohnt bin, wie ich schon an vielen anderen Orten oft genug bemerkt und hervorgehoben habe. Deshalb habe ich bereits vor einer ziemlichen Reihe von Jahren in einer in diesem Archiv. Thl. XXVIII. Nr. XVI. S. 285. abgedruckten kürzeren Abhandlung den ersten Abriss einer von der von Gauss gegebenen verschiedenen Entwickelung der mehr genannten wichtigen Theorie gegeben, ohne dass eine vollständige Ausführung derselben damals in meiner Absicht gelegen hätte, wie auch von mir, auf eine spätere weitere Ausführung verweisend, am Schluss der genannten Abhandlung ausdrücklich bemerkt worden ist. Ich will daher jetzt diesen wichtigen Gegenstand von Neuem aufnehmen und in der vorlie-

genden Abhandlung eine neue vollständige Entwickelung der allgemeinen Theorie des Maasses der Krümmung geben.

## §. 1.

Bevor wir zur Entwickelung der Theorie des Krümmungsmaasses selbst übergehen, schicken wir einige allgemeine algebraische Betrachtungen voraus, von deren Resultaten im Folgenden mehrfacher Gebrauch gemacht werden wird.

Zuerst bemerke man die folgende Relation:

1)
$$(ax^2-2bxx_1+cx_1^2)(ay^2-2byy_1+cy_1^2)-\{axy-b(xy_1+yx_1)+cx_1y_1\}^2 = (ac-b^2)(xy_1-yx_1)^2,$$

von deren Richtigkeit man sich sogleich durch gemeine algebraische Rechnung überzeugt.

Wenn ferner drei algebraische Gleichungen des ersten Grades:

2)
$$\begin{cases} ax+by+cz=d, \\ a'x+b'y+c'z=d', \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

gegeben sind, und dieselben nach der Reihe zuerst mit

$$b'c''-c'b'', \quad b''c-c''b, \quad bc'-cb';$$

dann mit

$$c'a''-a'c'', \quad c''a-a''c, \quad ca'-ac';$$

endlich mit

$$a'b''-b'a'', \quad a''b-b''a, \quad ab'-ba'$$

multiplicirt, in jedem Falle aber zu einander addirt werden; so erhält man, wie leicht erhellet, die drei folgenden Gleichungen:

3)
$$\{a(b'c''-c'b'')+a'(b''c-c''b)+a''(bc'-cb')\}x = d(b'c''-c'b'')+d'(b''c-c''b)+d''(bc'-cb'),$$

$$\{b(c'a''-a'c'')+b'(c''a-a''c)+b''(ca'-ac')\}y = d(c'a''-a'c'')+d'(c''a-a''c)+d''(ca'-ac'),$$

$$\{c(a'b''-b'a'')+c'(a''b-b''a)+c''(ab'-ba')\}z = d(a'b''-b'a'')+d'(a''b-b''a)+d''(ab'-ba');$$

der, wie man sogleich übersieht:

4)

$$\begin{aligned}
&\{a(b'c''-c'b'')+b(c'a''-a'c'')+c(a'b''-b'a'')\}x\\
&\quad=d(b'c''-c'b'')+d'(b''c-c''b)+d''(bc'-cb'),\\
&\{a(b'c''-c'b'')+b(c'a''-a'c'')+c(a'b''-b'a'')\}y\\
&\quad=d(c'a''-a'c'')+d'(c''a-a''c)+d''(ca'-ac'),\\
&\{a(b'c''-c'b'')+b(c'a''-a'c'')+c(a'b''-b'a'')\}z\\
&\quad=d(a'b''-b'a'')+d'(a''b-b''a)+d''(ab'-ba').
\end{aligned}$$

Wenn nun aber die Coefficienten

$$a,\ b,\ c;\quad a',\ b',\ c';\quad a'',\ b'',\ c''$$

hat, wie vorher angenommen wurde, ganz unabhängig von einander, sondern durch die Gleichungen:

5) . . . . . $\left\{\begin{aligned} a&=b'c''-c'b'',\\ b&=c'a''-a'c'',\\ c&=a'b''-b'a''\end{aligned}\right.$

mit einander verbunden sind; so ist, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}
b''c-c''b&=\ a'(a''a+b''b+c''c)-a''(a'a+b'b+c'c),\\
bc'-cb'&=-a'(a'a''+b'b''+c'c'')+a''(a'a'+b'b'+c'c');\\
c''a-a''c&=\ b'(a''a+b''b+c''c)-b''(a'a+b'b+c'c),\\
ca'-ac'&=-b'(a'a''+b'b''+c'c'')+b''(a'a'+b'b'+c'c');\\
a''b-b''a&=\ c'(a''a+b''b+c''c)-c''(a'a+b'b+c'c),\\
ab'-ba'&=-c'(a'a''+b'b''+c'c'')+c''(a'a'+b'b'+c'c');
\end{aligned}$$

und die Gleichungen 4) werden also unter dieser Voraussetzung:

6)

$$\begin{aligned}
(a^2+b^2+c^2)x&=ad+\{a'(a''a+b''b+c''c)-a''(a'a+b'b+c'c)\}d'\\
&\quad-\{a'(a'a''+b'b''+c'c'')-a''(a'a'+b'b'+c'c')\}d'',\\
(a^2+b^2+c^2)y&=bd+\{b'(a''a+b''b+c''c)-b''(a'a+b'b+c'c)\}d'\\
&\quad-\{b'(a'a''+b'b''+c'c'')-b''(a'a'+b'b'+c'c')\}d'',\\
(a^2+b^2+c^2)z&=cd+\{c'(a''a+b''b+c''c)-c''(a'a+b'b+c'c)\}d'\\
&\quad-\{c'(a'a''+b'b''+c'c'')-c''(a'a'+b'b'+c'c')\}d'';
\end{aligned}$$

oder:

7)

$$(a^2+b^2+c^2)x = ad + a'\{(a''a''+b''b''+c''c'')d' - (a'a''+b'b''+c'c'')d''\}$$
$$-a''\{(a'a''+b'b''+c'c'')d' - (a'a'+b'b'+c'c')d''\},$$

$$(a^2+b^2+c^2)y = bd + b'\{(a''a''+b''b''+c''c'')d' - (a'a''+b'b''+c'c'')d''\}$$
$$-b''\{(a'a''+b'b''+c'c'')d' - (a'a'+b'b'+c'c')d''\},$$

$$(a^2+b^2+c^2)z = cd + c'\{(a''a''+b''b''+c''c'')d' - (a'a''+b'b''+c'c'')d''\}$$
$$-c''\{(a'a''+b'b''+c'c'')d' - (a'a'+b'b'+c'c')d''\}.$$

Schreibt man diese Gleichungen auf folgende Art:

7*)

$$ad = (a^2+b^2+c^2)x - a'\{(a''a''+b''b''+c''c'')d' - (a'a''+b'b''+c'c'')d''\}$$
$$+a''\{(a'a''+b'b''+c'c'')d' - (a'a'+b'b'+c'c')d''\},$$

$$bd = (a^2+b^2+c^2)y - b'\{(a''a''+b''b''+c''c'')d' - (a'a''+b'b''+c'c'')d''\}$$
$$+b''\{(a'a''+b'b''+c'c'')d' - (a'a'+b'b'+c'c')d''\},$$

$$cd = (a^2+b^2+c^2)z - c'\{(a''a''+b''b''+c''c'')d' - (a'a''+b'b''+c'c'')d''\}$$
$$+c''\{(a'a''+b'b''+c'c'')d' - (a'a'+b'b'+c'c')d''\};$$

multiplicirt sie nun nach der Reihe mit $x$, $y$, $z$ und addirt sie dann zu einander, so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichungen 2), die folgende Gleichung:

8)

$$d^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$-d'\{(a''a''+b''b''+c''c'')d' - (a'a''+b'b''+c'c'')d''\}$$
$$+d''\{(a'a''+b'b''+c'c'')d' - (a'a'+b'b'+c'c')d''\}$$

oder:

9) . . . . . $d^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$
$$-(a''^2+b''^2+c''^2)d'^2$$
$$-(a'^2+b'^2+c'^2)d''^2$$
$$+2(a'a''+b'b''+c'c'')d'd''.$$

Man habe jetzt drei Systeme dreier Gleichungen des ersten Grades von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz = d, \\ a'x + b'y + c'z = d', \\ a''x + b''y + c''z = d''; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax_1 + by_1 + cz_1 = d_1, \\ a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 = d_1', \\ a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 = d_1''; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} ax_2 + by_2 + cz_2 = d_2, \\ a'x_2 + b'y_2 + c'z_2 = d_2', \\ a''x_2 + b''y_2 + c''z_2 = d_2''; \end{array}\right\}$$

ält man, wenn man die Gleichungen 7*) nach der Reihe
, $y_2$, $z_2$ multiplicirt und dann zu einander addirt, natürlich
unter Voraussetzung der Gleichungen 5), die Gleichung:

11)

$$\begin{aligned} = \quad & (a^2+b^2+c^2)(xx_2+yy_2+zz_2) \\ & -\{(a''a''+b''b''+c''c'')d' - (a'a''+b'b''+c'c'')d''\}d_2' \\ & +\{(a'a''+b'b''+c'c'')d' - (a'a'+b'b'+c'c')d''\}d_2''. \end{aligned}$$

endet man nun die Gleichung 9) auf das zweite der drei
ings-Systeme 10) an, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} \ldots \quad d_1^2 = \quad & (a^2+b^2+c^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2) \\ & -(a'^2+b'^2+c'^2)d_1'^2 \\ & -(a'^2+b'^2+c'^2)d_1''^2 \\ & +2(a'a''+b'b''+c'c'')d_1'd_1''. \end{aligned}$$

ht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so
sich die Gleichung:

13)

$$\begin{aligned} -d_1^2 = \quad & (a^2+b^2+c^2)(xx_2+yy_2+zz_2-x_1^2-y_1^2-z_1^2) \\ & +(a'^2+b'^2+c'^2)(d_1'^2-d''d_2'') \\ & +(a'a''+b'b''+c'c'')(d'd_2''-2d_1'd_1''+d''d_2') \\ & +(a''^2+b''^2+c''^2)(d_1'^2-d'd_2'). \end{aligned}$$

## §. 2.

allgemeine Gleichung einer Fläche sei jetzt, wenn X, Y, Z
änderlichen oder laufenden Coordinaten bezeichnen:

14) . . . . . $f(X, Y, Z) = 0,$

wobei wir immer ein rechtwinkliges Coordinatensystem voraussetzen.

Ein beliebiger, aber bestimmter Punkt dieser Fläche sei $(xyz)$, so dass also auch:

15) . . . . . $f(x, y, z) = 0$

ist; wenn aber $f(x, y, z)$ im Allgemeinen als eine Function dreier veränderlicher Grössen betrachtet wird, so soll

16) . . . . . $u = f(x, y, z)$

gesetzt werden. Alle im Folgenden vorkommenden Differentialquotienten sind partielle Differentialquotienten.

Die Gleichungen der Normale der krummen Fläche in dem Punkte $(xyz)$ sind bekanntlich:

17) . . . . . $$\frac{X-x}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial u}{\partial z}};$$

und wenn nun $\varphi$, $\psi$, $\chi$ die $180^0$ nicht übersteigenden Winkel sind, welche der eine der beiden von dem Punkte $(xyz)$ ausgehenden Theile dieser Normale mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliesst, $G$ aber einen gewissen Factor bezeichnet, so ist:

$$\cos\varphi = G\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \cos\psi = G\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \cos\chi = G\frac{\partial u}{\partial z};$$

also

$$G^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} = 1,$$

woraus sich

$$G = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

folglich nach den obigen Gleichungen, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$18)\ \ldots\ \begin{cases} \cos\varphi = \pm \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos\psi = \pm \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos\chi = \pm \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} \end{cases}$$

ergiebt. Offenbar entsprechen in diesen Formeln die oberen Zeichen dem einen, die unteren Zeichen dem anderen der beiden von dem Punkte $(xyz)$ ausgehenden Theile der Normale, wo es nun aber nöthig ist, ein Kriterium zu haben, mittelst welches diese beiden Theile der Normale von einander unterschieden werden können.

Wenn wie gewöhnlich $\partial u$ das vollständige Differential von $u$ bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z;$$

also nach 18) offenbar:

$$\partial u = \pm (\cos\varphi\partial x + \cos\psi\partial y + \cos\chi\partial z)\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Wenn nun aber

$$x + \partial x,\quad y + \partial y,\quad z + \partial z$$

die Coordinaten eines Punktes in dem Theile der Normale sind, welchem die Winkel $\varphi$, $\psi$, $\chi$ entsprechen; so ist offenbar:

$$\partial x = \cos\varphi\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2},$$
$$\partial y = \cos\psi\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2},$$
$$\partial z = \cos\chi\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2};$$

also:

$$\cos\varphi\partial x + \cos\psi\partial y + \cos\chi\partial z$$
$$= (\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2)\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2} = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\partial u = \pm \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Also ist $\partial u$ für den Theil der Normale, welchem in den Formeln 18) die oberen Zeichen entsprechen, positiv, für den Theil der Normale dagegen, welchem in den Formeln 18) die unteren Zeichen entsprechen, negativ; und nennen wir also, von dem Punkte $(xyz)$ an gerechnet, die Seite der krummen Fläche, nach welcher hin $\partial u$, und folglich, weil in dem Punkte $(xyz)$ selbst $u$ verschwindet, auch $u$ positiv ist, die positive Seite, die Seite der krummen Fläche dagegen, nach welcher hin $\partial u$, und folglich aus demselben Grunde wie vorher auch $u$ negativ ist, die negative Seite; so ist klar, dass man in den Formeln 18) die oberen oder unteren Zeichen nehmen muss, jenachdem die Winkel $\varphi$, $\psi$, $\chi$ dem auf der positiven Seite, oder dem auf der negativen Seite der krummen Fläche liegenden Theile der Normale entsprechen sollen. Ziehen wir daher, wie von jetzt an immer geschehen soll, die Normale von dem Punkte $(xyz)$ aus auf der positiven Seite der krummen Fläche, so muss man in den Formeln 18) die oberen Zeichen nehmen, und daher:

$$19) \ldots \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos\psi = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos\chi = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} \end{cases}$$

setzen.

Betrachten wir $z$ als Function der beiden unabhängigen veränderlichen Grössen $x$, $y$; so ist bekanntlich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y};$$

nach 19):

$$\cos\varphi = -\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}}},$$

$$\cos\psi = -\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}}},$$

$$\cos\chi = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}}};$$

$$\left\{\begin{aligned}
\cos\varphi &= \mp\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},\\
\cos\psi &= \mp\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},\\
\cos\chi &= \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};
\end{aligned}\right.$$

nan die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem itiv oder negativ ist.

## §. 3.

t einem der Längeneinheit gleichen Halbmesser wollen wir zt um den Anfang der Coordinaten als Mittelpunkt eine äche beschrieben denken, und wollen die Coordinaten des s, in welchem diese Kugelfläche von einem, von ihrem unkte aus parallel und gleich gerichtet mit der vorher be- ten Normale der krummen Fläche gezogenen Halbmesser itten wird, durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen, indem wir zugleich en, dass wir die beiden auf der gegebenen krummen Fläche f der Kugelfläche liegenden Punkte $(xyz)$ und $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ im

Folgenden einander entsprechende Punkte nennen werden. Da ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\xi = \cos\varphi, \quad \eta = \cos\psi, \quad \zeta = \cos\chi;$$

also nach 19):

$$21)\ldots\left\{\begin{aligned}\xi &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},\\ \eta &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},\\ \zeta &= \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}};\end{aligned}\right.$$

und nach 20):

$$22)\ldots\left\{\begin{aligned}\xi &= \mp\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},\\ \eta &= \mp\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},\\ \zeta &= \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};\end{aligned}\right.$$

wenn wir in diesen letzteren Formeln die oberen oder unteren Zeic nehmen, jenachdem $\frac{\partial u}{\partial z}$ positiv oder negativ ist.

## §. 4.

Wir wollen nun ausser dem Punkte $(xyz)$ der krummen Fl noch zwei diesem Punkte unendlich nahe liegende Punkte $(x_1$ und $(x_2y_2z_2)$ dieser Fläche, also überhaupt die drei einander endlich nahe liegenden Punkte

$$(xyz), \quad (x_1y_1z_1), \quad (x_2y_2z_2)$$

der krummen Fläche betrachten, und die diesen Punkten entsprechenden Punkte der Kugelfläche respective durch

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}), \quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1), \quad (\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2)$$

bezeichnen. Die Flächenräume der zwischen den drei Punkten auf der krummen Fläche und den drei entsprechenden Punkten auf der Kugelfläche liegenden unendlich kleinen Dreiecke, deren Ebenen offenbar einander parallel sind, weil sie auf parallelen geraden Linien senkrecht stehen, mögen respective durch $D$ und $\mathfrak{D}$, und ihre Projectionen auf der Ebene der $xy$ durch $D_{xy}$ und $\mathfrak{D}_{xy}$ bezeichnet werden. Dann ist nach einem bekannten Satze*):

$$2D_{xy} = \mp\{(x_1-x_2)y + (x_2-x)y_1 + (x-x_1)y_2\},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um von dem Punkte $(xy)$ durch den Punkt $(x_1y_1)$ zu dem Punkte $(x_2y_2)$ zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der $x$ durch den rechten Winkel $(xy)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y$ zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss; und ganz eben so ist:

$$2\mathfrak{D}_{xy} = \mp\{(\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2)\mathfrak{y} + (\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x})\mathfrak{y}_1 + (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\mathfrak{y}_2\},$$

mit einer ganz ähnlichen Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher. Bezeichnen wir nun das, jenachdem die Punkte

$$(xyz), \quad (x_1y_1z_1), \quad (x_2y_2z_2)$$

auf der krummen Fläche, und die entsprechenden Punkte

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}), \quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1), \quad (\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2)$$

auf der Kugelfläche, eine gleichstimmige oder eine ungleichstimmige Lage haben, wovon der Sinn aus dem unmittelbar Vorhergehenden sogleich ohne Weiteres ganz von selbst erhellen wird, positiv oder negativ genommene Verhältniss $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ durch $k$, so können wir nach dem Vorhergehenden, weil nach einem bekannten Satze von den Projectionen ebener Figuren

$$\frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{\mathfrak{D}_{xy}}{D_{xy}}$$

ist, offenbar in völliger Allgemeinheit

---

*) M. s. Archiv. Thl. III. S. 263.

$$k = \frac{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)\mathfrak{y} + (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x})\mathfrak{y}_1 + (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1)\mathfrak{y}_2}{(x_1 - x_2)y + (x_2 - x)y_1 + (x - x_1)y_2}$$

setzen, und diese Grösse wird das Maass der Krümmung oder das Maass der Curvatur der krummen Fläche in dem Punkte $(xyz)$ genannt, insofern es sich bei diesem Begriffe, was man immer vor Augen zu behalten hat, um das Verhältniss unendlich kleiner Flächenelemente auf der krummen Fläche und auf der Kugelfläche an den einander entsprechenden Punkten $(xyz)$ und $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ beider Flächen handelt. Will man nun aber dies auf einen völlig strengen Ausdruck bringen, so wird man sagen: das Maass der Krümmung oder das Maass der Curvatur der krummen Fläche in dem Punkte $(xyz)$ dieser Fläche ist die Gränze, welcher der Bruch

$$\frac{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)\mathfrak{y} + (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x})\mathfrak{y}_1 + (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1)\mathfrak{y}_2}{(x_1 - x_2)y + (x_2 - x)y_1 + (x - x_1)y_2}$$

sich nähert, wenn die Punkte $(x_1y_1z_1)$ und $(x_2y_2z_2)$ auf der krummen Fläche dem Punkte $(xyz)$ auf derselben immer näher rücken, was wir daher wie gewöhnlich in strengerer Weise wie vorher durch:

$$23) \quad \ldots \quad k = \mathrm{Lim} \frac{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)\mathfrak{y} + (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x})\mathfrak{y}_1 + (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1)\mathfrak{y}_2}{(x_1 - x_2)y + (x_2 - x)y_1 + (x - x_1)y_2}$$

ausdrücken, die Gränze immer in dem aus dem Vorhergehenden sich von selbst ergebenden Sinne genommen.

## §. 5.

Setzen wir jetzt:

$$x_1 = x + \Delta_1 x, \quad y_1 = y + \Delta_1 y, \quad z_1 = z + \Delta_1 z;$$

$$x_2 = x + \Delta_2 x, \quad y_2 = y + \Delta_2 y, \quad z_2 = z + \Delta_2 z$$

und:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \Delta_1 \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} + \Delta_1 \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} + \Delta_1 \mathfrak{z};$$

$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x} + \Delta_2 \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y} + \Delta_2 \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z} + \Delta_2 \mathfrak{z};$$

so ist nach 23), wie man leicht findet:

$$k = \mathrm{Lim} \frac{\Delta_1 \mathfrak{x} \Delta_2 \mathfrak{y} - \Delta_1 \mathfrak{y} \Delta_2 \mathfrak{x}}{\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_1 y \Delta_2 x}.$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist aber bekanntlich:

$$\Delta_1 \mathfrak{x} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \Delta_1 x + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} \Delta_1 y + R_1,$$

$$\Delta_1 \mathfrak{y} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} \Delta_1 x + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} \Delta_1 y + R_1'$$

und

$$\Delta_2 \mathfrak{x} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \Delta_2 x + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} \Delta_2 y + R_2,$$

$$\Delta_2 \mathfrak{y} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} \Delta_2 x + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} \Delta_2 y + R_2';$$

wo die Reste $R_1$, $R_1'$ in Bezug auf die Veränderungen $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$ und die Reste $R_2$, $R_2'$ in Bezug auf die Veränderungen $\Delta_2 x$, $\Delta_2 y$ von der zweiten Ordnung sind. Also ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\Delta_1 \mathfrak{x} \Delta_2 \mathfrak{y} - \Delta_1 \mathfrak{y} \Delta_2 \mathfrak{x} = \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}\right)(\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_1 y \Delta_2 x) + \mathfrak{R},$$

wo der Rest

$$\mathfrak{R} = \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} R_2' - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} R_2\right) \Delta_1 x + \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} R_2' - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} R_2\right) \Delta_1 y$$
$$+ \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} R_1 - \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} R_1'\right) \Delta_2 x + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} R_1 - \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} R_1'\right) \Delta_2 y$$

in Bezug auf die Veränderungen $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$; $\Delta_2 x$, $\Delta_2 y$ von der dritten Ordnung ist. Also ist nach dem Obigen:

$$k = \operatorname{Lim} \frac{\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}\right)(\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_1 y \Delta_2 x) + \mathfrak{R}}{\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_1 y \Delta_2 x},$$

oder:

$$k = \operatorname{Lim} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{y}} + \frac{\mathfrak{R}}{\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_1 y \Delta_2 x} \right\},$$

folglich offenbar:

$$k = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + \operatorname{Lim} \frac{\mathfrak{R}}{\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_1 y \Delta_2 x}.$$

Nach dem, was vorher über die Ordnung von $\mathfrak{R}$ bemerkt worden ist, ist aber offenbar:

$$\operatorname{Lim} \frac{\mathfrak{R}}{\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_1 y \Delta_2 x} = 0,$$

also:

$$24) \ldots\ldots\ldots k = \frac{\partial x}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y},$$

welcher Ausdruck für das Maass der Krümmung nun weiter entwickelt werden muss.

§. 6.

Nach 22) ist:

$$x = \mp \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\eta = \mp \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};$$

woraus durch Differentiation leicht erhalten wird:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \mp \frac{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \mp \frac{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \mp \frac{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \mp \frac{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Also ist, wie man mittelst leichter Rechnung sogleich findet:

$$\frac{\partial x}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^2},$$

folglich nach 24):

$$25) \ldots\ldots\ k = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^2}.$$

## §. 7.

Wie wir schon in §. 2. gesehen haben, ist bekanntlich:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}};$$

also:

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Ferner hat man nach den Lehren der Differentialrechnung bekanntlich die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0;$$

aus denen man mit Hülfe der obigen Ausdrücke von

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y}$$

leicht erhält:

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

und

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

woraus sich ferner mittelst leichter Rechnung, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^4\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}\\
=\;&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2\right\}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)^2\right\}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}\\
&-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right\}\\
&-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\}\\
&-2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right\}
\end{aligned}$$

ergiebt. Weil nun nach dem oben gefundenen Ausdrucke von

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

und der Formel 25) offenbar

$$k\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^4\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}$$

ist, so erhält man mittelst des Vorstehenden die folgende merkwürdige Gleichung zur Bestimmung des Maasses der Krümmung

$$\begin{aligned}
26)\;\ldots\ldots\;&k\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2\\
=\;&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2\right\}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)^2\right\}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}\\
&-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right\}\\
&-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\}\\
&-2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right\}.
\end{aligned}$$

In der Abhandlung Thl. XXVIII. Nr. VIII. S. 200. des Archivs habe ich mit Beibehaltung aller dort gebrauchten Bezeichnungen die folgende Gleichung bewiesen:

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\Omega\Omega_1\\
&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2\right\}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)^2\right\}\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}\\
&-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right\}\\
&-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\}\\
&-2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right\},
\end{aligned}$$

woraus sich, in Verbindung mit der Gleichung 26), der folgende Ausdruck ergiebt:

$$27)\ \ldots\ldots\ k=\frac{\Omega\Omega_1}{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2}.$$

Bezeichnen nun $R$, $R_1$ die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser der krummen Fläche in dem Punkte $(xyz)$, so ist nach der angeführten Abhandlung S. 176. und S. 181.:

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\Omega^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},\qquad \frac{1}{R_1^2}=\frac{\Omega_1^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2};$$

also:

$$\frac{1}{R^2R_1^2}=\frac{\Omega^2\Omega_1^2}{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2},$$

und folglich:

$$\frac{1}{RR_1}=\pm\frac{\Omega\Omega_1}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

oder:

$$\frac{\Omega\Omega_1}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \pm \frac{1}{RR_1},$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $\Omega\Omega_1$ positiv oder negativ ist. Also ist nach 27):

$$28) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots k = \pm \frac{1}{RR_1},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\Omega\Omega_1$ oder, wie aus dem Obigen unmittelbar hervorgeht, die Grösse

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)^2 \right\} \\
&+ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)^2 \right\} \\
&+ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} \\
&- 2\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right\} \\
&- 2\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\} \\
&- 2\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right\}
\end{aligned}$$

positiv oder negativ ist.

## §. 8.

Die durch die Gleichung 15) verbundenen Coordinaten $x, y, z$ können wir als Functionen zweier beliebiger unabhängiger veränderlicher Grössen betrachten, welche wir im Allgemeinen durch $p$, $q$ bezeichnen wollen. Dann hat man nach den Lehren der Differentialrechnung für die vollständigen Differentiale $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$ bekanntlich die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\partial x &= \frac{\partial x}{\partial p}\partial p + \frac{\partial x}{\partial q}\partial q, \\
\partial y &= \frac{\partial y}{\partial p}\partial p + \frac{\partial y}{\partial q}\partial q, \\
\partial z &= \frac{\partial z}{\partial p}\partial p + \frac{\partial z}{\partial q}\partial q;
\end{aligned}$$

oder eigentlich:

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial x}{\partial q}\Delta q,$$

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial y}{\partial q}\Delta q,$$

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial z}{\partial q}\Delta q;$$

wo $\Delta p$, $\Delta q$ ganz beliebige Grössen sind. Weil nun aber $z$ Function von $x$, $y$ ist; so ist das vollständige Differential $\partial z$ auch

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y,$$

wo auch $\partial x$, $\partial y$ wie vorher vollständige Differentiale sind; also ist nach dem Obigen:

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial x}{\partial q}\Delta q\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial y}{\partial q}\Delta q\right)$$

oder:

$$\partial z = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta p + \left(\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta q.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der obigen Gleichung

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial z}{\partial q}\Delta q,$$

so erhält man unmittelbar die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial p},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial q};$$

zu denen man übrigens auch auf folgende Art gelangen kann.

Betrachten wir bloss $p$ als veränderlich und bezeichnen unter dieser Voraussetzung die vollständigen Differentiale von $x$, $y$, $z$ durch $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$; so ist nach den Lehren der Differentialrechnung bekanntlich:

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y$$

und

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial p}\partial p, \quad \partial y = \frac{\partial y}{\partial p}\partial p, \quad \partial z = \frac{\partial z}{\partial p}\partial p:$$

wo alle Differentialquotienten natürlich partielle sind; also:

$$\frac{\partial z}{\partial p}\partial p = \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\partial p + \frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\partial p,$$

woraus

$$\frac{\partial z}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Ganz eben so findet man:

$$\frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},$$

und hat also jetzt wieder die beiden oben gefundenen Gleichungen

$$29)\ \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial q}; \end{cases}$$

aus denen man leicht:

$$30)\ \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial p} - \dfrac{\partial y}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial q}}{\dfrac{\partial x}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial q} - \dfrac{\partial x}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial p}}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial q} - \dfrac{\partial x}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial p}}{\dfrac{\partial x}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial q} - \dfrac{\partial x}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial p}} \end{cases}$$

erhält.

Setzen wir der Kürze wegen:

$$31)\ \ldots\ldots \begin{cases} X = \dfrac{\partial y}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial q} - \dfrac{\partial y}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial p}, \\ Y = \dfrac{\partial z}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial q} - \dfrac{\partial z}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial p}, \\ Z = \dfrac{\partial x}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial q} - \dfrac{\partial x}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial p}; \end{cases}$$

so werden die Gleichungen 30):

$$32)\ \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{X}{Z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Y}{Z}.$$

Zwischen den Grössen $X$, $Y$, $Z$ bestehen verschiedene Relationen, die wir jetzt zunächst entwickeln wollen.

Auf der Stelle erhellet die Richtigkeit der beiden Gleichungen:

$$33) \quad \left\{ \begin{array}{l} X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p} + Z\frac{\partial z}{\partial p} = 0, \\ X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q} = 0; \end{array} \right.$$

und nach einer sehr bekannten algebraischen Relation ist:

$$34) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2\right\} - \left(\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2.$$

Ferner findet man durch Differentiation, mit Rücksicht auf die Gleichungen 33) leicht:

35)

$$X\frac{\partial Y}{\partial p} - Y\frac{\partial X}{\partial p} = \left(X\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)\frac{\partial z}{\partial p} - \left(X\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\right)\frac{\partial z}{\partial q},$$

$$Y\frac{\partial Z}{\partial p} - Z\frac{\partial Y}{\partial p} = \left(X\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)\frac{\partial x}{\partial p} - \left(X\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\right)\frac{\partial x}{\partial q},$$

$$Z\frac{\partial X}{\partial p} - X\frac{\partial Z}{\partial p} = \left(X\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)\frac{\partial y}{\partial p} - \left(X\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\right)\frac{\partial y}{\partial q}$$

und:

36)

$$X\frac{\partial Y}{\partial q} - Y\frac{\partial X}{\partial q} = -\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)\frac{\partial z}{\partial q} + \left(X\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right)\frac{\partial z}{\partial p},$$

$$Y\frac{\partial Z}{\partial q} - Z\frac{\partial Y}{\partial q} = -\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)\frac{\partial x}{\partial q} + \left(X\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right)\frac{\partial x}{\partial p},$$

$$Z\frac{\partial X}{\partial q} - X\frac{\partial Z}{\partial q} = -\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)\frac{\partial y}{\partial q} + \left(X\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right)\frac{\partial y}{\partial p}.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen:

$$37)\ \ldots\ \begin{cases} U = X\frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q}, \\ P = X\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}, \\ Q = X\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}; \end{cases}$$

so ist:

$$38)\ \ldots\ \begin{cases} X\frac{\partial Y}{\partial p} - Y\frac{\partial X}{\partial p} = U\frac{\partial z}{\partial p} - P\frac{\partial z}{\partial q}, \\ Y\frac{\partial Z}{\partial p} - Z\frac{\partial Y}{\partial p} = U\frac{\partial x}{\partial p} - P\frac{\partial x}{\partial q}, \\ Z\frac{\partial X}{\partial p} - X\frac{\partial Z}{\partial p} = U\frac{\partial y}{\partial p} - P\frac{\partial y}{\partial q} \end{cases}$$

und:

$$39)\ \ldots\ \begin{cases} X\frac{\partial Y}{\partial q} - Y\frac{\partial X}{\partial q} = -U\frac{\partial z}{\partial q} + Q\frac{\partial z}{\partial p}, \\ Y\frac{\partial Z}{\partial q} - Z\frac{\partial Y}{\partial q} = -U\frac{\partial x}{\partial q} + Q\frac{\partial x}{\partial p}, \\ Z\frac{\partial X}{\partial q} - X\frac{\partial Z}{\partial q} = -U\frac{\partial y}{\partial q} + Q\frac{\partial y}{\partial p}. \end{cases}$$

Aus der ersten der Formeln 32) erhält man, wenn man, was offenbar verstattet ist, $\frac{\partial z}{\partial x}$ für $z$ setzt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial p};$$

nach derselben Formel und 39) ist aber:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial q} = -\frac{Z\frac{\partial X}{\partial q} - X\frac{\partial Z}{\partial q}}{Z^2} = \frac{U\frac{\partial y}{\partial q} - Q\frac{\partial y}{\partial p}}{Z^2},$$

und auf ähnliche Art nach 38):

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial p} = -\frac{Z\frac{\partial X}{\partial p} - X\frac{\partial Z}{\partial p}}{Z^2} = -\frac{U\frac{\partial y}{\partial p} - P\frac{\partial y}{\partial q}}{Z^2};$$

ist nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{P\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 - 2U\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} + Q\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2}{Z^3}.$$

der zweiten der Formeln 32) erhält man in gleicher Weise:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial q}}{Z};$$

selben Formel und 38) ist aber:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial p} = -\frac{Z\frac{\partial Y}{\partial p} - Y\frac{\partial Z}{\partial p}}{Z^2} = \frac{U\frac{\partial x}{\partial p} - P\frac{\partial x}{\partial q}}{Z^2},$$

ähnliche Art nach 39):

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial q} = -\frac{Z\frac{\partial Y}{\partial q} - Y\frac{\partial Z}{\partial q}}{Z^2} = -\frac{U\frac{\partial x}{\partial q} - Q\frac{\partial x}{\partial p}}{Z^2};$$

ist nach dem Obigen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{P\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 - 2U\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial x}{\partial q} + Q\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2}{Z^3}.$$

ıer erhält man aus der ersten der Formeln 32), wenn man

setzt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial p}}{Z};$$

n Vorhergehenden ist aber:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial q} = -\frac{U\frac{\partial x}{\partial q} - Q\frac{\partial x}{\partial p}}{Z^2}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial p} = \frac{U\frac{\partial x}{\partial p} - P\frac{\partial x}{\partial q}}{Z^2};$$

ınbar:

42)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{P\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} - U\left(\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}\right) + Q\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}}{Z^3}.$$

Aus der zweiten der Formeln 32) erhält man, wenn man $\frac{\partial z}{\partial x}$ für $z$ setzt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial q}}{Z};$$

nach dem Vorhergehenden ist aber:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial p} = -\frac{U\frac{\partial y}{\partial p} - P\frac{\partial y}{\partial q}}{Z^2}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial q} = \frac{U\frac{\partial y}{\partial q} - Q\frac{\partial y}{\partial p}}{Z^2};$$

also offenbar:

42*)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{P\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} - U\left(\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}\right) + Q\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}}{Z^3},$$

ganz wie vorher, wie es sein muss.

Aus 40), 41), 42) erhält man unmittelbar:

$$Z^6\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right\}$$
$$= \left\{P\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 - 2U\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} + Q\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2\right\}\left\{P\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 - 2U\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial x}{\partial q} + Q\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2\right\}$$
$$-\left\{P\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} - U\left(\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}\right) + Q\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}\right\}^2,$$

also nach der allgemeinen algebraischen Relation 1):

$$Z^6\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right\}$$
$$= (PQ - U^2)\left(\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 = Z^2(PQ - U^2),$$

und folglich:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{PQ - U^2}{Z^4}.$$

Ferner ist nach 32):

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{Z^2},$$
$$\left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^2 = \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)^2}{Z^4},$$

so nach 25) offenbar:

$$43) \quad \ldots\ldots\ldots k = \frac{PQ - U^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^2},$$

elches ein neuer merkwürdiger Ausdruck für $k$ ist.

Setzt man noch der Kürze wegen:

$$44) \quad \ldots\ldots \begin{cases} E = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2, \\ F = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p} \cdot \frac{\partial z}{\partial q}, \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2; \end{cases}$$

ist nach 34):

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = EG - F^2,$$

so nach 43):

$$45) \quad \ldots\ldots\ldots k = \frac{PQ - U^2}{(EG - F^2)^2}.$$

## §. 9.

Wir wollen nun noch einen anderen Ausdruck für das Maass er Krümmung $k$ entwickeln, der besonders deshalb sehr bemerenswerth ist, weil er bloss von den drei Grössen $E$, $F$, $G$ abhängt.

Durch Differentiation dieser Grössen erhält man leicht:

$$\frac{\partial E}{\partial p} = 2\left(\frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + \frac{\partial z}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\right),$$

$$\frac{\partial E}{\partial q} = 2\left(\frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} + \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} + \frac{\partial z}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q}\right);$$

mer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p} = {} & \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} + \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} \\ & + \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} + \frac{\partial y}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} \\ & + \frac{\partial z}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q} + \frac{\partial z}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} \\ = {} & \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial y}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + \frac{\partial z}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial q} = &\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\\ &+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + \frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}\\ &+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} + \frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\\ =&\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + \frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + \frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2},\end{aligned}$$

wie aus Nachstehendem erhellet; endlich:

$$\frac{\partial G}{\partial p} = 2\left(\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q} + \frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q} + \frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right),$$

$$\frac{\partial G}{\partial q} = 2\left(\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + \frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + \frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right).$$

Durch nochmalige Differentiation erhält man hieraus ferner

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} = &\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q^2} + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right)^2\\ &+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q^2} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}\right)^2\\ &+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q} = &\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} + \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p^2\partial q} + \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\\ &+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p^2\partial q} + \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}\\ &+\frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p^2\partial q} + \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\\ =&\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial p^2} + \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\\ &+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}\\ &+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial p^2} = &\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p^2\partial q} + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right)^2\\ &+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p^2\partial q} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}\right)^2\\ &+\frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p^2\partial q} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)^2.\end{aligned}$$

nach und nach 37) haben wir jetzt die drei folgenden von Gleichungen:

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=P,$$

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=U,$$

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=Q;$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial p},$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q},$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=\frac{\partial F}{\partial q}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p};$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=\frac{\partial F}{\partial p}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+\frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial q};$$

ders geordnet:

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=P,$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial p},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=\frac{\partial F}{\partial p}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q};$$

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=U,$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+\frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p};$$

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=Q,$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=\frac{\partial F}{\partial q}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial q};$$

wobei zu bemerken ist, dass nach 31) in diesen Gleichungen:

$$X = \frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial z}{\partial p},$$

$$Y = \frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial x}{\partial p},$$

$$Z = \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial p},$$

ist.

Vergleichen wir nun diese Gleichungen mit den Gleichungen 10), so ist dort zu setzen:

$$a = X, \quad b = Y, \quad c = Z;$$

$$a' = \frac{\partial x}{\partial p}, \quad b' = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad c' = \frac{\partial z}{\partial p};$$

$$a'' = \frac{\partial x}{\partial q}, \quad b'' = \frac{\partial y}{\partial q}, \quad c'' = \frac{\partial z}{\partial q};$$

und nach Vorstehendem ist:

$$a = b'c'' - c'b'',$$

$$b = c'a'' - a'c'',$$

$$c = a'b'' - b'a'';$$

so dass also die Gleichungen 5) erfüllt sind.

Ferner ist in den Gleichungen 10) zu setzen:

$$d = P, \qquad d_1 = U, \qquad d_2 = Q,$$

$$d' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial p}, \qquad d_1' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q}, \quad d_2' = \frac{\partial F}{\partial q} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p},$$

$$d'' = \frac{\partial F}{\partial p} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q}, \quad d_1'' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}, \quad d_2'' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial q},$$

und:

$$x = \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}, \quad y = \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}, \quad z = \frac{\partial^2 z}{\partial p^2},$$

$$x_1 = \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q}, \quad y_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q}, \quad z_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q},$$

$$x_2 = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}, \quad y_2 = \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}, \quad z_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}.$$

ieraus ergiebt sich:

$$a^2 + b^2 + c^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = EG - F^2,$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2 = E,$$

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 = G;$$

$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial q} = F.$$

erner ist:

$$d_1''^2 - d''d_2'' = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial p} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}$$
$$= \tfrac{1}{4}\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2 - \left(2\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial q}\right)\frac{\partial G}{\partial q}\right\},$$

$$d_1'^2 - d'd_2' = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial p}$$
$$= \tfrac{1}{4}\left\{\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2 - \left(2\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial p}\right)\frac{\partial E}{\partial p}\right\},$$

$$d'd_2'' - 2d_1'd_1'' + d''d_2'$$

$$\cdot\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial q} - 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p} + \left(\frac{\partial F}{\partial p} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial q} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\left\{\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial q} - 2\cdot\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial p} + (2\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial q})(2\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial p})\right\}.$$

ndlich ist:

$$xx_2 + yy_2 + zz_2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$$

$$\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)^2.$$

dem Obigen ist aber, wie man sogleich übersieht:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial p^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial p^2} = -\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial p\partial q^2} - \frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial p\partial q^2} - \frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial p\partial q^2}$$
$$- \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial p^2\partial q} - \frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial p^2\partial q} - \frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial p^2\partial q}$$
$$- 2\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right)$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}=\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q^2}+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q^2}+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q^2}$$
$$+\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial p^2\partial q}+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial p^2\partial q}+\frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial p^2\partial q}$$
$$+2\left\{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)^2\right\},$$

also durch Addition:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}$$
$$=-2\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)^2\right\},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$x x_2+y y_2+z z_2-x_1^2-y_1^2-z_1^2=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{dq^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right).$$

Weil nun

$$dd_2-d_1^2=PQ-U^2$$

ist, so ist in Folge der Gleichung 13):

$$4(PQ-U^2)=E\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2-\left(2\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial E}{\partial q}\right)\frac{\partial G}{\partial q}\right\}$$
$$+F\left\{\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}-2\cdot\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}+\left(2\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial E}{\partial q}\right)\left(2\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\partial G}{\partial p}\right)\right\}$$
$$+G\left\{\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2-\left(2\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\partial G}{\partial p}\right)\frac{\partial E}{\partial p}\right\}$$
$$-2(EG-F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right);$$

nach 45) ist aber:

$$k=\frac{PQ-U^2}{(EG-F^2)^2},$$

also:

$$4(EG-F^2)^2 k=4(PQ-U^2),$$

und folglich nach Vorstehendem:

46)

$$4(EG-F^2)^2k = E\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2-\left(2\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial E}{\partial q}\right)\frac{\partial G}{\partial q}\right\}$$
$$+F\left\{\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}-2\cdot\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}+\left(2\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial E}{\partial q}\right)\left(2\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\partial G}{\partial p}\right)\right\}$$
$$+G\left\{\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2-\left(2\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\partial G}{\partial p}\right)\frac{\partial E}{\partial p}\right\}$$
$$-2(EG-F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right)$$

oder:

47)

$$4(EG-F^2)^2k = E\left\{\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}-2\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}+\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2\right\}$$
$$+F\left\{\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial q}-\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}-2\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}+4\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}-2\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}\right\}$$
$$+G\left\{\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}-2\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}+\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right\}$$
$$-2(EG-F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right).$$

Dies ist der von Gauss gegebene höchst merkwürdige, bloss von den drei Grössen $E$, $F$, $G$ abhängende Ausdruck für das Maass der Krümmung. Liouville hat demselben (m. s. Archiv. Thl. XIX. S. 344.) eine andere Form gegeben, der ich aber, als viel weniger entwickelt, nicht so viel Werth beilegen kann, um es für nöthig zu halten, mich hier weiter mit derselben zu beschäftigen.

## §. 10.

Wenn wir uns auf der Fläche eine beliebige, aber bestimmte Curve denken, so haben wir für diese Curve $p$, $q$ uns nicht mehr als unabhängige veränderliche Grösse vorzustellen, sondern wir müssen uns vielmehr die eine dieser beiden Grössen als abhängig von der anderen, als eine Function dieser letzteren denken, etwa $q$ als eine Function von $p$. Dann ist nach den Lehren der Differentialrechnung, wenn wir jetzt die partiellen Differentialquotienten von $x$, $y$, $z$ nach $p$ und $q$ bestimmter durch

$$\frac{\partial_p x}{\partial p},\ \frac{\partial_p y}{\partial p},\ \frac{\partial_p z}{\partial p}\ \text{und}\ \frac{\partial_q x}{\partial q},\ \frac{\partial_q y}{\partial q},\ \frac{\partial_q z}{\partial q}$$

bezeichnen:

$$\frac{\partial x}{\partial p}=\frac{\partial_p x}{\partial p}+\frac{\partial_q x}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p},$$
$$\frac{\partial y}{\partial p}=\frac{\partial_p y}{\partial p}+\frac{\partial_q y}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p},$$
$$\frac{\partial z}{\partial p}=\frac{\partial_p z}{\partial p}+\frac{\partial_q z}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}.$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial y}{\partial p}=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p},\quad \frac{\partial z}{\partial p}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p};$$

also:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p}}=\frac{\frac{\partial_p y}{\partial p}+\frac{\partial_q y}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}}{\frac{\partial_p x}{\partial p}+\frac{\partial_q x}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p}}=\frac{\frac{\partial_p z}{\partial p}+\frac{\partial_q z}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}}{\frac{\partial_p x}{\partial p}+\frac{\partial_q x}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}}.$$

Bezeichnet nun $s$ wie gewöhnlich im Allgemeinen den Bogen der Curve, so ist bekanntlich:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2=1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2,$$

also nach den vorstehenden Formeln:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial_p x}{\partial p}+\frac{\partial_q x}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial_p y}{\partial p}+\frac{\partial_q y}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial_p z}{\partial p}+\frac{\partial_q z}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2}{\left(\frac{\partial_p x}{\partial p}+\frac{\partial_q x}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2};$$

es ist aber:

$$\frac{\partial s}{\partial p}=\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p}=\frac{\partial s}{\partial x}\left(\frac{\partial_p x}{\partial p}+\frac{\partial_q x}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}\right),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2=\left(\frac{\partial_p x}{\partial p}+\frac{\partial_q x}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial_p y}{\partial p}+\frac{\partial_q y}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial_p z}{\partial p}+\frac{\partial_q z}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2,$$

und folglich nach gehöriger Entwickelung:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2 = \left(\frac{\partial_p x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial_p y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial_p z}{\partial p}\right)^2$$
$$+ 2\left(\frac{\partial_p x}{\partial p}\cdot\frac{\partial_q x}{\partial q} + \frac{\partial_p y}{\partial p}\cdot\frac{\partial_q y}{\partial q} + \frac{\partial_p z}{\partial p}\cdot\frac{\partial_q z}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial p}$$
$$+ \left\{\left(\frac{\partial_q x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial_q y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial_q z}{\partial q}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right).$$

Weil in den Ausdrücken 44) von $E$, $F$, $G$ bekanntlich

$$\frac{\partial x}{\partial p},\ \frac{\partial y}{\partial p},\ \frac{\partial z}{\partial p} \text{ und } \frac{\partial x}{\partial q},\ \frac{\partial y}{\partial q},\ \frac{\partial z}{\partial q}$$

die partiellen Differentialquotienten von $x$, $y$, $z$ in Bezug auf $p$ und $q$ waren, so ist in der jetzigen Bezeichnung:

$$E = \left(\frac{\partial_p x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial_p y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial_p z}{\partial p}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial_p x}{\partial p}\cdot\frac{\partial_q x}{\partial q} + \frac{\partial_p y}{\partial p}\cdot\frac{\partial_q y}{\partial q} + \frac{\partial_p z}{\partial p}\cdot\frac{\partial_q z}{\partial q},$$
$$G = \left(\frac{\partial_q x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial_q y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial_q z}{\partial q}\right)^2;$$

also nach dem Obigen:

48) . . . . . $\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2 = E + 2F\frac{\partial q}{\partial p} + G\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2,$

und folglich:

49) . . . . . $\partial s^2 = E\Delta p^2 + 2F\Delta p\partial q + G\partial q^2.$

Betrachtete man $p$ als Function von $q$, so wäre eben so:

50) . . . . . $\partial s^2 = E\partial p^2 + 2F\partial p\Delta q + G\Delta q^2.$

Kürzer schreibt man die beiden letzten Formeln bekanntlich:

51) . . . . . $\partial s^2 = E\partial p^2 + 2F\partial p\partial q + G\partial q^2,$

wo aber, wie aus der Differentialrechnung bekannt ist, die Bedeutung von $\partial p$ und $\partial q$ sich danach modificirt, welche der beiden Grössen $p$, $q$ man als unabhängig variabel, und welche demzufolge als Function dieser letzteren betrachtet.

Weil nach 47) sich $k$ bloss durch $E$, $F$, $G$ ausdrücken lässt, so erhellet jetzt aus dem Vorhergehenden, dass, um das Maass der Krümmung finden zu können, man nicht die endlichen Formeln zu kennen braucht, durch welche $x$, $y$, $z$ als Functionen

der veränderlichen Grössen $p$, $q$ dargestellt werden, sondern man braucht bloss den allgemeinen Ausdruck

$$E\partial p^2 + 2F\partial p\partial q + G\partial q^2$$

von $\partial s^2$ zu kennen, weil dadurch die zur Bestimmung von $k$ allein erforderlichen Grössen $E$, $F$, $G$ als Coefficienten von $\partial p^2$, $2\partial p\partial q$, $\partial q^2$ in diesem allgemeinen Ausdrucke von $\partial s^2$ bekannt werden.

## §. 11.

Die Theorie des Maasses der Krümmung ist reich an wichtigen und merkwürdigen Folgerungen; wenn auch diese weiteren Entwickelungen und Anwendungen jetzt nicht in unserer Absicht liegen, da wir hier nur die Entwickelung der Theorie des Maasses der Krümmung an sich im Auge hatten, so wollen wir doch in der Kürze Folgendes bemerken.

Wenn wir uns zwei krumme Flächen denken, und die eine sich über die andere ausbreiten lassen soll, so dass beide Flächen sich ihrer ganzen Ausdehnung nach genau an einander anschliessen, also jeder Punkt der einen Fläche mit einem bestimmten Punkte der anderen Fläche genau zusammenfällt, welche zusammenfallenden Punkte der beiden Flächen wir einander entsprechende Punkte derselben nennen, und im Allgemeinen durch $(xyz)$ und $(x'y'z')$ bezeichnen wollen; so wird es offenbar erforderlich sein, dass in allen solchen einander entsprechenden Punkten der beiden Flächen die auf denselben nach allen Seiten hin genommenen linearen Elemente mit einander zusammenfallen. Es muss also, wenn wir beliebige unendlich kleine einander gleiche Veränderungen von $p$, $q$ und $p'$, $q'$, von denen $x$, $y$, $z$ und $x'$, $y'$, $z'$ als abhängig betrachtet werden, im Allgemeinen durch $i_p$, $i_q$ bezeichnen, unabhängig von bestimmten Werthen dieser Veränderungen, also ganz allgemein,

$$Ei_p^2 + 2Fi_pi_q + Gi_q^2 = E'i_p^2 + 2F'i_pi_q + G'i_q^2,$$

wo die Bedeutung von $E'$, $F'$, $G'$ von selbst erhellet, sein, woraus sich unmittelbar für alle einander entsprechende Punkte der beiden Flächen die Gleichungen

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'$$

ergeben, wenn die eine Fläche sich über der anderen genau soll ausbreiten lassen. Verbindet man dies mit den früheren Entwickelungen des Maasses der Krümmung, so ergiebt sich, dass, wenn die eine Fläche sich über der anderen genau

soll ausbreiten lassen, in allen entsprechenden Punkten der beiden Flächen das Maass der Krümmung dasselbe sein muss.

Da nun nach dem allgemeinen Begriffe des Maasses der Krümmung (§. 4.) für die Ebene das Maass der Krümmung in allen Punkten offenbar Null ist, so ergiebt sich, dass für jede Fläche, die sich in eine Ebene soll ausbreiten lassen, in allen ihren Punkten, also ganz allgemein, das Maass der Krümmung $k=0$ sein muss; nun ist aber nach 25):

$$k=\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^2},$$

also muss, wenn die entsprechende Fläche sich in eine Ebene soll ausbreiten lassen, allgemein

$$52)\ldots\ldots\ldots\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

sein, ein schon früher bekannter Satz, der sich aber mittelst der Theorie des Maasses der Krümmung besonders streng beweisen lässt. Dass man diese Bedingungsgleichung auch noch auf andere Arten ausdrücken könnte, erhellet aus unseren früheren Entwickelungen von selbst und bedarf daher einer weiteren Erläuterung nicht.

# XXXII.

## Construction du carré dont les côtés passent par quatre points donnés.

Par

Monsieur ***Fasbender***,

Professeur à Thorn.

---

Deux droites perpendiculaires entre elles, $AB$ et $CD$ (Tab. X. Fig. 7.), étant coupées par les côtés d'un carré $EFGH$, la partie $AB$ de l'une interceptée par deux côtés opposés $EH$ et $FG$ sera égale à la partie $CD$ de l'autre interceptée par les deux autres côtés opposés. Cela aura lieu, quelle que soit la situation du point de concours des deux perpendiculaires. De même la proposition n'en sera pas moins vraie, si les points d'intersection ou quelques uns d'entre eux appartiennent non pas aux côtés mêmes du carré, mais bien à leurs prolongements, comme dans Tab. X. Fig. 8. Quant à la démonstration, nous faisons observer qu'elle se déduit des théorèmes les plus connus de la théorie des parallèles et de l'égalité des triangles.

Le quadrilatère $EFGH$ étant seulement rectangulaire, les parties interceptées sont en raison inverse des côtés interceptants.

Si l'on se propose de construire un carré, dont les côtés passent par quatre points donnés $A$, $B$, $C$ et $D$ (Tab. X. Fig. 9.) dans l'ordre indiqué, on trouve au moyen de ce qui précède un second point de chaque côté du carré. En effet, joignons les deux points $A$ et $C$, voisins de $D$, par une droite $AC$, de $B$ abaissons sur $AC$ une perpendiculaire, déterminons dans celle-ci un point $E$ tel que $BE = AC$, le point $E$ sera situé sur le côté du

carré qui passe par $D$, ce qui conduit immédiatement à la construction du carré $FGHJ$ lui-même. — En déterminant dans la perpendiculaire un second point $E'$ tel que $BE' = AC$ et répétant ces raisonnements, on trouve un second carré $F'G'H'J'$, dont les côtés passent par les quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ dans l'ordre indiqué.

Il se peut que la situation des quatre points donnés soit telle, qu'on ait $AC$ égale et perpendiculaire à $BD$. Alors l'un des deux points $E$ et $E'$ coincidera avec $D$, et il y aura une infinité de carrés correspondant à ce point, tandis que celui qui correspond à l'autre se réduira au point d'intersection de $AC$ et $BD$.

Lorsque l'on change l'ordre des quatre points donnés, il résulte, d'après la règle des combinaisons, qu'en général il y a troisfois deux carrés, dont les côtés passent par quatre points donnés dans un ordre quelconque.

La construction du carré, convenablement modifiée, renferme la construction du rectangle, dont les côtés ont un rapport demandé et passent par quatre points donnés.

Il y a plus de vingt ans que j'ai trouvé les résultats qu'on vient de lire. Aussi en ai-je fait part dans l'occasion à mes amis et à mes élèves. Je ne les ai rencontrés dans aucun livre, journal etc. qui aient été à ma portée. Seulement l'excellente collection de Mss. Gandtner et Junghans contient au Numéro 1031 le problème de la construction du carré. Toutefois la solution qui y est indiquée est moins simple et moins élégante que la mienne, parcequ'elle exige la connaissance de la théorie du cercle. Mr. l'éditeur de ce journal m'assurant que lui non plus n'a pas connu ma solution et m'ayant fait exprimer le désir de la publier, je n'hésite pas à y acquiescer.

# XXXIII.

## Die Entwickelung der trigonometrischen Funktionen in unendliche Faktorenfolgen.

Von

Herrn Professor Dr. ***Dienger***

an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

---

Die meisten mir bekannten Ableitungen der Sätze, nach denen $\sin x$, $\cos x$ sich in unendliche Produkte entwickeln lassen, sind nicht gegen alle Einwürfe gesichert. Die nachstehende Entwickelung scheint mir dagegen durchaus streng; ob sie schon einmal sonst wo gegeben wurde, weiss ich im Augenblicke nicht; schwer zu finden ist sie nicht. Ich gehe von dem Satze aus, der in der Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi f(z)\partial z + 2\sum_1^\infty \cos\mu x \int_0^\pi f(z)\cos\mu z\partial z \\ &= \pi f(+0), \text{ wenn } x = 0, \\ &= \frac{\pi}{2}[f(x-0)+f(x+0)], \text{ wenn } x \begin{matrix}>0\\<\pi\end{matrix}, \\ &= \pi f(\pi-0), \text{ wenn } x = \pi \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ausgesprochen ist und der erste der Sätze in der Theorie der Fourier'schen Reihen ist.

### I.

In der Gleichung (1) setzen wir $f(z) = \cos az$, wo $a$ eine Konstante. Dann ist:

$$\int f(z)\cos\mu z\,\partial z = \int \cos az\cos\mu z\,\partial z = \frac{\sin(\mu+a)z}{2(\mu+a)} + \frac{\sin(\mu-a)z}{2(\mu-a)},$$

wo nicht $a = \pm\mu$ sein darf. Daraus:

$$\int_0^{\pi} f(z)\cos\mu z\,\partial z = \frac{\sin(\mu+a)\pi}{2(\mu+a)} + \frac{\sin(\mu-a)\pi}{2(\mu-a)}$$

$$= \frac{\cos\mu\pi\sin a\pi}{2(\mu+a)} - \frac{\cos\mu\pi\sin a\pi}{2(\mu-a)} = -\frac{2a\cos\mu\pi\sin a\pi}{\mu^2-a^2}.$$

Setzt man dies in (1) ein und beachtet, dass $f(z)$ hier nur eindeutig ist, so hat man:

(2)

$$\sin a\pi\left[\frac{1}{a} - 2a\sum_1^{\infty}\frac{\cos\mu\pi\cos\mu x}{\mu^2-a^2}\right] = \pi\cos ax, \quad x \gtreqless 0 \text{ und } \gtreqless \pi.$$

Hier darf $a$ nicht 0 und auch nicht eine ganze Zahl sein, da sonst die Integrale andere Werthe annehmen würden.

Setzt man in (2) $x = \pi$, so ist wegen $\cos^2\mu\pi = 1$:

$$\frac{1}{a} - \frac{2a}{1^2-a^2} - \frac{2a}{2^2-a^2} - \frac{2a}{3^2-a^2} - \ldots = \pi\operatorname{cotg} a\pi. \qquad (3)$$

Wird dagegen $x = 0$ gesetzt, so ist wegen $\cos\mu\pi = (-1)^{\mu}$:

$$\frac{1}{a} + \frac{2a}{1^2-a^2} - \frac{2a}{2^2-a^2} + \frac{2a}{3^2-a^2} - \ldots = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \qquad (4)$$

Schreiben wir die beiden Gleichungen unter die Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a} - \pi\frac{\cos a\pi}{\sin a\pi} &= \frac{2a}{1^2-a^2} + \frac{2a}{2^2-a^2} + \frac{2a}{3^2-a^2} + \ldots, \\ \frac{1}{a} - \frac{\pi}{\sin a\pi} &= -\frac{2a}{1^2-a^2} + \frac{2a}{2^2-a^2} - \frac{2a}{3^2-a^2} + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

so erhalten wir durch Subtraktion:

$$\pi\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}a\pi) = 4a\left[\frac{1}{1^2-a^2} + \frac{1}{3^2-a^2} + \frac{1}{5^2-a^2} + \ldots\right]. \qquad (6)$$

Die Gleichungen (3), (4), (6) gelten für jedes $a$; nur sind die Fälle $a = 0$ oder $a$ eine ganze Zahl ausgeschlossen. Da für $a = 0$ übrigens

$$\frac{1}{a} - \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad \frac{1}{a} - \frac{\pi\cos a\pi}{\sin a\pi}$$

Null sind, so gelten die (5) auch noch für $a = 0$.

## II.

Wir integriren (5) und (6) nach $a$ von $a=0$ bis $a=\alpha$, wo $\alpha$ zwischen 0 und 1 liegt. Alsdann ist wegen

$$\int\left(\frac{1}{a}-\pi\frac{\cos a\pi}{\sin a\pi}\right)\partial a = \quad l(a)-l(\sin a\pi)=l\left(\frac{a}{\sin a\pi}\right),$$

$$\int\left(\frac{1}{a}-\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)\partial a = \quad l(a)-l(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\pi)=l\left(\frac{a}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\pi}\right),$$

$$\int\pi\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}a\pi)\partial a=-2l(\cos\tfrac{1}{2}a\pi);$$

und weil alle diese Grössen noch endlich sind für $a=0$:

$$l\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}\right)=-l\left(\frac{1^2-a^2}{1^2}\right)-l\left(\frac{2^2-a^2}{2^2}\right)-l\left(\frac{3^2-a^2}{3^2}\right)-\ldots,$$

$$l\left(\frac{a\pi}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\pi}\right)= \quad l\left(\frac{1^2-a^2}{1^2}\right)-l\left(\frac{2^2-a^2}{2^2}\right)+l\left(\frac{3^2-a^2}{3^2}\right)-\ldots,$$

$$-2l(\cos\tfrac{1}{2}a\pi)=-2[l\left(\frac{1^2-a^2}{1^2}\right)+l\left(\frac{3^2-a^2}{3^2}\right)+l\left(\frac{5^2-a^2}{5^2}\right)+\ldots];$$

wo die entstehenden Reihen bekanntlich abermals konvergent sind. Daraus ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin a\pi}{a\pi}&=(1-\frac{a^2}{1^2})(1-\frac{a^2}{2^2})(1-\frac{a^2}{3^2})\ldots,\\ \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\pi}{\frac{1}{2}a\pi}&=\frac{(1-\frac{a^2}{2^2})(1-\frac{a^2}{4^2})\ldots}{(1-\frac{a^2}{1^2})(1-\frac{a^2}{3^2})\ldots},\\ \cos\tfrac{1}{2}a\pi&=(1-\frac{a^2}{1^2})(1-\frac{a^2}{3^2})(1-\frac{a^2}{5^2})\ldots\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Diese Formeln gelten für $a=0$ und bis $a=1$. Für $a=1$ gelten die erste und dritte thatsächlich ebenfalls noch. Die zweite ist bloss Verbindung der ersten und dritten, kann also ausser Betrachtung bleiben.

Setzt man in der ersten $a\pi=x$, so ist:

$$\sin x=x(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2})(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2})(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2})\ldots,\quad x\gtreqless 0,\ \lessgtr\pi;\quad(8)$$

wird in der dritten $\frac{1}{2}\alpha\pi = x$ gesetzt, so erhält man:

(9)

$$\cos x = (1-\frac{4x^2}{1^2\pi^2})(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2})(1-\frac{4x^2}{5^2\pi^2})\ldots, \quad x \gtreqless 0, \quad \lesseqgtr \tfrac{1}{2}\pi.$$

Ich übergehe die weiteren Folgerungen, die sich an diese Formeln knüpfen lassen, um in I. die Ausnahmsfälle zu betrachten.

## III.

Ist $a = 0$, so ist $f(z) = 1$, also wird die (1) zur identischen Gleichung $\pi = \pi$. Ist $a$ eine positive ganze Zahl $n$, so ist:

$$\int_0^\pi \cos nz \cos \mu z \partial z = 0, \quad \text{wenn nicht} \quad \mu = n;$$
$$= \tfrac{1}{2}, \quad \text{wenn} \quad \mu = n.$$

Dadurch reduzirt sich (1) abermals auf eine leere Identität. Dass also die Gleichungen (7) noch gelten für $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, liegt in der Form dieser Reihen und ist, wenn man will, zufällig.

Es ergiebt sich hiernach für diese besonderen Fälle kein Satz von Werth.

# XXXIV.

## Note über die Integration einer gewissen Gattung linearer Differentialgleichungen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

---

Kummer hat im 19. Bande des Crelle'schen Journals gezeigt, dass, wenn die Gleichung

$$\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} = x^{m-1}z$$

das Integral $z = \psi(x)$ hat, sodann das Integral der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$$

die Gestalt annimmt:

$$y = \int_0^x u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)du,$$

vorausgesetzt, dass $m$ und $n$ ganze positive Zahlen sind, und dass zwischen den $n+1$ Constanten, die in $\psi(x)$ vorhanden sind, eine gewisse Bedingungsgleichung Statt hat.

Auf ganz ähnliche Weise, wie der Satz von Kummer bewiesen wurde, lässt sich auch folgender Satz beweisen:

Ist nämlich das vollständige Integral der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^{m+n}z}{dx^{m+n}} = \frac{d^{m-1}(x^{m-1}z)}{dx^{m-1}} \tag{1}$$

von der Form $z = \psi(x)$, so ist das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}} = \frac{d^m(x^m y)}{dx^m} \tag{2}$$

von folgender Form:

$$y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)du, \tag{3}$$

hiebei bloss vorausgesetzt, dass $m$ und $n$ ganze positive Zahlen sind. (Zwischen den in $\psi(x)$ vorkommenden willkührlichen Constanten findet keine Bedingungsgleichung statt).

Um diesen Satz zu beweisen, stellen wir die Gleichung (2) auf folgende Weise auf:

$$\frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}} = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(x^m \frac{dy}{dx} + mx^{m-1}y\right), \tag{4}$$

und setzen nun hierin statt $y$ seinen in (3) stehenden Werth. Es ist vorerst:

(5)

$$x^m \frac{dy}{dx} + mx^{m-1}y = x^{m-1}\int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} [ux\psi'(ux) + m\psi(ux)]du.$$

Behandelt man das Integral:

$$\int_0^\infty u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} x\psi'(ux)du,$$

nachdem man statt $x\psi'(ux)du$ seinen Werth

$$\frac{d\psi(ux)}{du}du$$

gesetzt hat, mittelst der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man:

$$\int_0^\infty u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} x\psi'(ux)du$$

$$= \left\{ u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) \right\}_0^\infty + \int_0^\infty \psi(ux) e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} (u^{2m+n-1} - mu^{m-1})du,$$

und diess gibt in (5) substituirt:

(6)

$$x^m \frac{dy}{dx} + mx^{m-1}y = x^{m-1} \int_0^\infty u^{2m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)du,$$

da nämlich der Ausdruck

$$u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)$$

sowohl für $u = 0$, als auch für $u = \infty$ verschwindet.

Substituirt man nun den in (6) stehenden Ausdruck in die Gleichung (4), so hat man, auch im ersten Theile derselben für $y$ seinen Werth einführend, die Gleichung:

$$\int_0^\infty u^{2m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(m+n)}(ux)du$$

$$= \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} [x^{m-1} \int_0^\infty u^{2m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)du],$$

welche identisch sein soll. Man kann dieselbe folgendermassen schreiben:

(7)

$$\int_0^\infty u^{2m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} [\psi^{(m+n)}(ux) - \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \{x^{m-1}\psi(ux)\}]du = 0,$$

und diese Gleichung ist wirklich identisch, weil der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck Null ist. Entwickelt man nämlich denselben, so hat man:

(8)

$$\psi^{(m+n)}(ux) - \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \{x^{m-1}\psi(ux)\} = \psi^{(m+n)}(ux) - u^{m-1}x^{m-1}\psi^{(m-1)}(ux)$$

$$- \binom{m-1}{1} (m-1)u^{m-2}x^{m-2}\psi^{(m-2)}(ux)$$

$$- \binom{m-1}{2} (m-1)(m-2)u^{m-3}x^{m-3}\psi^{(m-3)}(ux) - \ldots.$$

Nun ist aber vermöge der Gleichung (2) identisch:

$$\psi^{(m+n)}(x) = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^{m-1}\psi(x)),$$

oder, in entwickelter Form:

$$\psi^{(m+n)}(x) = x^{m-1}\psi^{(n-1)}(x) + \binom{m-1}{1}(m-1)x^{m-2}\psi^{(n-2)}(x) + \binom{m-1}{2}(m-1)(m-2)x^{m-3}\psi^{(n-3)}(x) + \ldots.$$

und da diese Gleichung identisch ist, so bleibt sie auch identisch, wenn man $ux$ statt $x$ setzt, folglich ist in der That:

$$\psi^{(m+n)}(ux) - \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^{m-1}\psi(ux)) = 0$$

und daher die Gleichung (7) eine identische.

Es ist leicht, die hier gegebene Methode mannigfach zu erweitern.

---

# XXXV.

## Miscellen.

---

### Auszug aus einem Briefe des Herrn Professor Eugenio Beltrami in Pisa an den Herausgeber, betreffend die im Archiv mitgetheilten Beltrami'schen Sätze.

Pise, 7. Avril 1865.

Honorable collégue et très cher ami.

J'ai reçu de même deux envois de feuilles separées de votre „Archiv", contenant des démonstrations de quelques théorèmes de géométrie, donnés par moi dans un de mes travaux. Je vous

remercie infiniment de la peine que vous avez prise d'appeler l'attention des géomètres sur ces théorèmes, et beaucoup plus encore du soin que vous avez voulu prendre d'en chercher les démonstrations par la voie purement analytique, en y déployant votre élégance accoutumée. J'avais, il y a déjà quelques années de cela, développé par l'analyse trigonométrique les nombreuses rélations auxquelles donne lieu la considération du triangle rectiligne, des centres de ses cercles inscrits, exinscrits et circonscrits, etc. Mais la plus grande partie de ces rélations ayant été trouvé par d'autres, il serait inutile de publier mon travail. Je dois citer en particulier, comme très riche en résultats, le petit Mémoire de M. Noeggerath, cité par ce même auteur à la page 89 de vos Archives, T. XLIII. — L'extension à l'espace de trois dimensions a été, presque en même temps, l'objet de deux travaux, l'un de Mr. Prouhet, Nouvelles Annales, T. 2$^{me}$ de la II$^{e}$. série, p. 132, l'autre de moi-même, Giornale di Matematiche, T. I. pp. 208 et 354. Je crois vous avoir envoyé un exemplaire de ce dernier article. Mais la matière est loin d'être épuisée. Pour moi, il m'est impossible de m'en occuper à présent.

En réfléchissant de nouveau sur le théorème démontré par vous, page 102, T. XLIII., j'ai reconnu qu'on peut le rendre évident par les éléments de géométrie, de la manière suivante: Soit $ABC$ (Tab. X. Fig. 10.) le triangle donné, auquel je circonscris un cercle. Prenant les milieux $A'$, $B'$, $C'$ des arcs soustendus par les côtés $BC$, $CA$, $AB$ resp. et joignant $AA'$, $BB'$, $CC'$, j'obtiens les bissectrices internes du triangle. Cela fait, soient $AD$, $BE$, $CF$ les parallèles menées des sommets, suivant une certaine direction. Pour mener par $A$ une droite faisant avec $AA'$ le même angle que $AD$, il suffit évidemment de prendre un arc $A'J = A'D$ et de joindre $AJ$. De même, pour mener de $B$ une droite faisant avec $BB'$ le même angle que $BE$, il faut prendre de $B'$ un arc $= B'E$, du côté opposé à $B'E$, savoir, à cause de $B'C = B'A$, il faut prendre de $C$ vers $B$ un arc $= AE$: mais à cause des parallèles $AD$, $BE$ on a $AE = DB$, et, à cause que $CD = JB$, on a aussi $DB = CJ$, donc $AE = CJ$, et la droite qu'on doit mener par $B$, passe par le point $J$. Il en est de même de la troisième droite, car on a $AF = CD = BJ$, $AC = CB$, donc $CF = CJ$, et par suite la droite $CJ$ fait avec $CC'$ le même angle que $CF$. Ce qui démontre le théorème.

On peut aussi le faire dépendre d'une proposition plus générale et très-facile à démontrer. Voici de quelle manière.

Soient $A$, $B$ (Tab. X. Fig. 11.) deux points et $AO$, $BO$ deux

droites fixes. Posons $OAB = \alpha$, $OBA = \beta$. Par les points $A$, $B$ menons deux parallèles $AD$, $BE$, formant un angle $\theta$ avec $AB$; puis par les mêmes deux points menons deux nouvelles droites $AJ$, $BJ$ également inclinées que les deux parallèles sur les droites fixes $AO$, $BO$ respectivement. On aura évidemment

$$JBA = 2\beta + \theta, \quad JAB = 2\alpha - \theta$$

et par suite

$$AJB = 180^0 - 2(\alpha + \beta) = 2.AOB - 180^0.$$

Donc l'angle des deux droites $AJ$, $BJ$ est indépendant de celui que forment avec $AB$ les deux parallèles $AD$, $BE$. Il s'ensuit que quand la direction de ces deux droites varie, le point $J$ se meut sur une circonférence, passant par les deux points $A$ et $B$*). De cette propriété générale découle immédiatement le théorème: car lorsque les deux parallèles se superposent le long de $AB$, le point $J$ se trouve en $C$, au sommet d'un triangle $ABC$ dont les bissectrices en $A$, $B$ sont $AO$, $BO$, et dont, par suite, $CO$ serait la troisième bissectrice. Ainsi la circonférence en question passe par ce troisième point $C$. Il est facile d'apercevoir l'identité de ce dernier résultat avec le théorème dont il s'agit.

Mais c'est assez pour cet objet, et je vous prie instamment de me pardonner ces faciles développements**).

---

## Ueber einen Satz Beltrami's vom Dreieck und über Nagels Centralendreiecke.

Von Herrn Professor Reuschle in Stuttgart.

1) Im 3. Heft des 42. Theils theilt Grunert im Archiv der Mathem. und Phys. als einen Satz von Beltrami zu Pisa mit, dass in jedem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises der Schwerpunkt der Mittelpunkte der 4 Berührkreise ist (sofern diese 4 Punkte als mit gleichen Massen behaftet gedacht werden). Grunert leitet den Satz sehr schön aus seinen

---

*) Cette propriété subsiste encore quand on substitue aux deux parallèles $AD$, $BE$ deux droites concourant en un point variable d'une circonférence passant par $A$ et $B$.

**) Ich kann Herrn Beltrami nur meinen besten Dank für diese Mittheilungen sagen. G.

im 36. Theil mitgetheilten Formeln für die Coordinaten jener Mittelpunkte her und fordert die Mathematiker zu elementargeometrischen Beweisen desselben heraus. Im neuesten Heft (Thl. XLIII. Heft I. S. 89.) gibt Nöggerath einen scharfsinnigen, aber sehr verwickelten stereometrischen Beweis des Satzes und kündigt der Herausgeber zwei andere Beweise für das nächste noch nicht erschienene Heft an*).

2) Beltrami's Satz ist ein ziemlich unmittelbares Corollar eines von Nagel im 5. Abschnitt seiner Untersuchungen über die Kreise des Dreiecks aufgestellten Satzes, nämlich dass die Mittelpunkte des Umkreises und des Inkreises mit der Umkreismitte des grösseren Centralendreiecks (d. h. dessen Spitzen die Mittelpunkte der Ankreise sind) in Gerader liegen, der erste der 3 Punkte in der Mitte zwischen den beiden anderen, auf welcher Geraden überdies auch der Schwerpunkt jenes Centralendreiecks liegt (was Nagel als nächste Folgerung beifügt). Haben die Buchstaben $O_a$, $O_b$, $O_c$, $O$, $K$, $S$, $M$, $H$ ihre gewohnte Bedeutung für ein beliebiges Dreieck $ABC$**), und sind $K'$, $S'$, $M'$, $H'$ die entsprechenden Punkte für das grössere Centralendreieck $O_aO_bO_c$, so beweist sich der Nagel'sche Satz ganz einfach wie folgt. Vermöge der bekannten Relation zwischen den beiden Dreiecken $ABC$ und $O_aO_bO_c$ (nämlich, dass ersteres das Höhendreieck des letzteren ist) ist der Punkt $H'$ identisch mit $O$ und $M'$ mit $K$. Aber die Punkte $H'$, $M'$, $S'$, $K'$ liegen in Gerader, $M'$ in der Mitte von $\overline{H'K'}$, folglich ist auch $\overline{OKS'K'}$ eine Gerade und $\overline{OK} = \overline{KK'}$.

3) Aus diesem Nagel'schen Satze ergibt sich der Beltrami'sche nicht minder einfach, übrigens statisch, so. Da einerseits der Schwerpunkt $S'$ so liegt, dass $\overline{K'S'} = \frac{1}{3}\overline{H'K'}$, so folgt aus dem Vorigen $\overline{K'S'} = \frac{2}{3}\overline{OK}$ und $\overline{S'K} = \frac{1}{3}\overline{OK}$. Da anderseits der Schwerpunkt eines Dreiecks mit dem Schwerpunkt seiner 3 Spitzen identisch ist, so ist $S'$ Schwerpunkt der 3 Punkte $O_a$, $O_b$, $O_c$ und ist folglich der Schwerpunkt $X$ der 4 Punkte $O$, $O_a$, $O_b$, $O_c$ einerlei mit dem Schwerpunkte der 2 Punkte $O$ und $S'$, sofern letzterer als dreifach gilt, mithin ist $\overline{S'X} = \frac{1}{4}\overline{OX}$ und folglich, da auch $\overline{S'K} = \frac{1}{4}\overline{OK}$ war, $X$ identisch mit $K$.

---

*) Als ich diese Mittheilung erhielt, war Heft II. bereits erschienen. M. s. darin den Beweis von Schmidt. S. 238.

**) Nämlich $O$ Mittelpunkt des Inkreises, $O_a$, $O_b$, $O_c$ Mittelpunkte der 3 Ankreise, $K$ Mittelpunkt des Umkreises, $S$ Schwerpunkt, $M$ Mittelpunkt des Mittenkreises, $H$ Höhendurchschnitt.

4) Da man die 4 Punkte $O$, $O_a$, $O_b$, $O_c$ noch auf andere 3 Arten in ein Dreieck und einen einzelnen Punkt vertheilen kann ($OO_bO_c$ und $O_a$ u. s. w.), so muss ihr Schwerpunkt $X$ (d. h. $K$ vermöge Nr. 3) auch auf den Strecken $\overline{S_a'O_a}$, $\overline{S_b'O_b}$, $\overline{S_c'O_c}$ liegen, wo $S_a'$, $S_b'$, $S_c'$ die Schwerpunkte der Dreiecke $OO_bO_c$, $OO_cO_a$, $OO_aO_b$ sind. Also schneiden sich die Verbindungslinien der Mittelpunkte der 4 Berührkreise des Dreiecks mit den Schwerpunkten der 4 Centralendreiecke in einem und demselben Punkt $K$, der Umkreismitte des Urdreiecks*).

5) Dies führt zu einem statischen Beweis des andern Satzes von Nagel, der dem Obigen (Nr. 2.) zur Seite steht, nämlich dass der Umkreismittelpunkt des Urdreiecks und je ein Ankreismittelpunkt mit dem Umkreismittelpunkt des kleineren Centralendreiecks der 3 übrigen Berührkreise in Gerader liegt und zwar der erste der 3 Punkte in der Mitte der beiden andern. Da nämlich jener Ankreismittelpunkt (z. B. $O_a$) mit dem Höhendurchschnitt ($H_a'$) dieses Centralendreiecks ($OO_bO_c$) identisch ist, so liegt auf der Geraden $\overline{O_aKS_a'}$ auch der Umkreismittelpunkt ($K_a'$) dieses Dreiecks ($OO_bO_c$), und da, wie leicht zu sehen, der Umkreis des Urdreiecks der gemeinschaftliche Mittenkreis sämmtlicher 4 Centralendreiecke ist**), so werden die Strecken $\overline{K_a'O_a}$, $\overline{K_b'O_b}$, $\overline{K_c'O_c}$ im Punkt $K$ halbirt.

6) Der Umkreismittelpunkt $K$ ist daher nicht nur der Schwerpunkt der 8 Punkte $O$, $K'$, $O_a$, $K_a'$, $O_b$, $K_b'$, $O_c$, $K_c'$, sondern auch, wie (nach Beltrami) der von $O$, $O_a$, $O_b$, $O_c$, so der von

*) Sieht man von dem besonderen Fall ab, so hat man hierin den allgemeinen Satz vom Viereck, dass die Verbindungslinien der Schwerpunkte seiner 4 Diagonaldreiecke (d. h. deren jedes von 2 Seiten und 1 Diagonale gebildet ist) je mit der 4. Viereckspitze in einem einzigen Punkt sich schneiden, welcher der Schwerpunkt der 4 Punkte ist und auf jeder der 4 Strecken so liegt, dass das Scheitelstück das Dreifache des Fussstücks ist. Dieser ohne Zweifel bekannte Satz gilt auch vom windschiefen Viereck und ist im Grund der Satz vom Schwerpunkt des Tetraeders, sofern dieser Schwerpunkt mit dem Schwerpunkt der 4 Spitzen identisch ist, eine Identität, die übrigens unter den Vierecken nur bei dem Parallelogramm stattfindet.

**) Damit hängt dann auch der Satz in der Nagel'schen Schrift zusammen, dass die 4 Centralendreiecke den gleichen Halbmesser $2R$ haben, d. h. gleich dem Umkreisdurchmesser des Urdreiecks.

$K'$, $K_a'$, $K_b'$, $K_c'$, was sich auch ebenso wie oben direct beweisen lässt, indem man die Schwerpunkte $S''$, $S_a''$, $S_b''$, $S_c''$ der Dreiecke $K_a'K_b'K_c'$, $KK_b'K_c'$, $KK_c'K_a'$, $KK_a'K_b'$ beizieht, die auf den Strecken $\overline{K'O}$, $\overline{K_a'O_a}$, $\overline{K_b'O_b}$, $\overline{K_c'O_c}$ in Beziehung auf $K$ symmetrisch mit den schon oben eingeführten Schwerpunkten $S'$, $S_a'$, $S_b'$, $S_c'$ liegen.

7) Ueberhaupt stehen die 4 Punkte $K$, $K_a'$, $K_b'$, $K_c'$ und ihre 4 Dreiecke, die ich desshalb der Kürze wegen Cocentralendreiecke nennen möchte, in merkwürdigen Relationen zu den 4 Punkte $O$, $O_a$, $O_b$, $O_c$ und zu deren 4 Dreiecken, Nagel's Centralendreiecken.

*a*) Je ein Centralendreieck und das entsprechende Cocentralendreieck sind congruent und von invers ähnlicher Lage, wobei $K$ der gemeinschaftliche innere Aehnlichkeitspunkt der 4 Paare ist, von $O_aO_bO_c$ und $K_a'K_b'K_c'$, sowie von $OO_bO_c$ und $K'K_b'K_c'$ u. s. w.

*b*) Je ein Centralendreieck und ein Cocentralendreieck stehen in der Reciprocität, dass der Umkreismittelpunkt des einen der Höhendurchschnitt des andern ist und umgekehrt.

*c*) Die 8 Dreiecke haben den gleichen Umkreishalbmesser $2R$ und einen gemeinschaftlichen Mittenkreis, den Umkreis des Urdreiecks.

*d*) Je ein Centralendreieck ist dem Berührungsdreieck*) des vierten Berührkreises ähnlich mit parallelen Seiten, wie Nagel in seinen Untersuchungen bemerkt hat. Man kann beifügen: einmal, dass die Aehnlichkeitslage bei dem grösseren Centralendreieck und dem inneren Berührungsdreieck die directe, bei den übrigen 3 Paaren die inverse ist, wobei die Aehnlichkeitspunkte mit den Schwerpunkten der entsprechenden Cocentralendreiecke coincidiren oder mit ihnen symmetrisch liegen, jenachdem die Aehnlichkeitslage die inverse oder die directe, also der Aehnlichkeitspunkt ein innerer oder ein äusserer ist**), alsdann dass zwischen den Cocentralendrei-

*) So nennt Nagel passend das Dreieck, dessen Spitzen die 3 Punkte sind, in welchen ein und derselbe Berührkreis die Dreiecksseiten berührt.

**) Es fällt also z. B. der (innere) Aehnlichkeitspunkt des Dreiecks $O_aO_bO_c$ und des entsprechenden äusseren Berührungsdreiecks mit dem Punkt $S_a''$ zusammen u. s. w.; dagegen liegt der (äussere) Aehnlichkeitspunkt des Dreiecks $O_aO_bO_c$ und des innern Berührungsdreiecks auf der $\overline{OK'}$ in gleichem Abstand von $O$ wie $S''$.

ecken und den Berührungsdreiecken resp. die entgegengesetzten Lagenverhältnisse obwalten, wobei die Aehnlichkeitspunkte mit den Punkten $O$, $O_a$, $O_b$, $O_c$ selbst zusammenfallen, so dass also $O$ der (innere) Aehnlichkeitspunkt des Dreiecks $K_a'K_b'K_c'$ und des inneren Berührungsdreiecks ist, $O_a$ der (äussere) Aehnlichkeitspunkt des Dreiecks $K'K_bK_c$ und des entsprechenden Berührungsdreiecks u. s. w.

8) Die 6 Punkte $O_a$, $K_c'$, $O_b$, $K_a'$, $O_c$, $K_b'$ bilden in dieser Folge ein Sechseck von folgenden merkwürdigen Eigenschaften:

*a*) Es ist gleichseitig (jede Seite $= 2R$) und je 2 Gegenseiten sind parallel.

*b*) Je zwei Gegenwinkel sind gleich und werden durch die Hauptdiagonalen, welche die Gegenspitzen verbinden (d. h. je einen der Punkte $K$ mit einem der Punkte $O$), halbirt.

*c*) Gleichwohl ist es weder Sehnen- noch Tangenten-Sechseck, wohl aber halbiren sich die 3 Hauptdiagonalen gegenseitig in dem Punkte $K$, sowie überhaupt alle durch diesen Punkt gehenden und am Umfang begrenzten Strecken in $K$ halbirt werden, welcher Punkt mithin der „Mittelpunkt" des Sechsecks im eigentlichsten Sinn ist.

*d*) Von den übrigen 6 (Neben-) Diagonalen, welche überhaupt die Punkte $O$ untereinander und die Punkte $K$ untereinander verbinden, sind je zwei gleich und parallel ($K_a'K_b' \parallel O_aO_b$ u. s. w.), so dass sie mit den parallelen Gegenseiten Parallelogramme bilden.

Mit einem Wort, dieses Sechseck gehört in diejenige Classe von Sechsecken, welche unter den Sechsecken ist, was das Parallelogramm unter den Vierecken, als der besondere dem Rhombus entsprechende Fall.

*e*) Die Seiten des Sechsecks (resp. ihre Verlängerungen) schneiden die 6 Verlängerungen der Seiten des Urdreiecks in den Berührpunkten der Ankreise.

---

## Note sur les logarithmes des sinus et tangentes des petits angles.

Extrait du Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles, No. 52.

Par M. F. Burnier.

On trouve dans la plupart des tables de logarithmes des quan-

tités désignées par les lettres $S$ et $T$. Ce sont les logarithmes des rapports du sinus et de la tangente au nombre de secondes de l'arc. Les formules de Maskelyne qui donnent ces quantités au moyen du log. de la secante, mais pour de très petits arcs seulement, peuvent être beaucoup étendues, moyennant une correction en fonction de ce même log. secante, ainsi qu'on va le voir.

Pour cela, j'ai pris le développement de

$$\log\sec x = -\log\cos x,$$

qui procède suivant les puissances paires de $x$. Renversant cette série, j'en ai tiré $x^2$ en fonction de $\log\sec x$. J'ai substitué ce résultat dans le développement en série de $\log\frac{\sin x}{x}$. C'est ainsi que je suis arrivé à trouver:

$$\log\frac{\sin x}{x} = -\tfrac{1}{2}\log\sec x + \frac{4}{45.M}(\log\sec x)^2 - \frac{8}{2835.M^2}(\log\sec x)^3 + \ldots$$

$M$ est le module des tables. Le dernier terme écrit atteint une unité de la $10^{me}$, $9^{me}$ et $8^{me}$ décimale pour des valeurs de $\log\sec x$ correspondant à des angles de $5^0\,59'$, $7^0\,49'$ et $11^0\,27'$.

Si l'on néglige ce terme et qu'on entende par $x$ le nombre de secondes de l'arc, on aura la formule pratique suivante:

$$\log\frac{\sin x}{x} = \log 1'' - \tfrac{1}{2}\log\sec x + 0{,}204674\,(\log\sec x)^2.$$

Ajoutant $\log\sec x$, on aura de même:

$$\log\frac{\tang x}{x} = \log 1'' + \tfrac{1}{2}\log\sec x + 0{,}204674\,(\log\sec x)^2.$$

Une manière simple d'utiliser ces formules serait de former une petite table des valeurs de $\log 1'' + 0{,}204674\,(\log\sec x)^2$, suivant celles de $\log\sec x$. L'argument procéderait par unités de la $4^{me}$ décimale, depuis $\log\sec x = 0{,}0001$, jusqu'à $\log\sec x = 0{,}0040$. La dernière différence serait 1,6 de la $7^{me}$ décimale.

## Druckfehler.

In Nr. LXXI. der Bibliographie (bei Thl. XLIII. Heft 3.) auf der dritten Seite Z. 16. s. m. „Deviation" statt „Derivation".

# Literarischer Bericht

## CLXIX.

Der in der vorigen Nummer des Literarischen Berichts (S. 8.) von uns ausgesprochene innige Wunsch, dass die Vorsehung dem würdigen Greise F. G. W. v. Struve noch längeres Leben verleihen möge, ist leider nicht in Erfüllung gegangen. Schon am 23sten November d. J. (1864) starb in Petersburg der berühmte hochverdiente Astronom:

### Friedrich Georg Wilhelm von Struve.

Er war geboren in Altona am 15. April 1793, wurde 1813 Observator und 1817 Director der Sternwarte in Dorpat, 1839 Director der berühmten kais. russ. Hauptsternwarte in Pulkowa bei Petersburg. Welche grossartige Arbeiten hauptsächlich im Fache der Stellar-Astronomie und Geodäsie in diesen seinen verschiedenen amtlichen Stellungen entweder von ihm selbst oder unter seiner Leitung ausgeführt worden sind, ist bekannt genug, und kann nicht der Gegenstand dieser kurzen Anzeige sein. Sein Name ist für alle Zeiten mit goldenen Lettern in die Geschichte der Astronomie eingetragen. Im Jahre 1858 musste er in Folge schwerer Krankheit die Direction der Pulkowaer Sternwarte niederlegen, die nun in die kundigen Hände seines gleichfalls schon hochverdienten und berühmten Sohnes, des Herrn Otto v. Struve, gelegt ist. Möge das grossartige Institut, durch dessen Errichtung die kais. russische Regierung sich ein unvergängliches Denkmal in den Annalen der Astronomie gesetzt hat, auch unter der Leitung seines neuen Directors, wie schon in den letzten Jahren, noch lange fortfahren, die Astronomie mit so herrlichen Früchten wie bisher zu bereichern!

---

Am 10. November d. J. (1864) starb in Wien der hauptsächlich um Geodäsie, Theorie und Praxis des Nivellirens, Construction

neuer, alle früheren an Genauigkeit und Umfang der Anwendung weit übertreffender Nivellir Instrumente, Astronomie u. s. w. hochverdiente ehemalige Professor am polytechnischen Institute in Wien, ordentliches Mitglied der kais. Akademie der Wissenschaften u. s. w.,

**Simon Ritter von Stampfer.**

Durch Einsendung eines Necrologs dieses so vielfach verdienten Mannes zum Abdruck im Archiv würden wir sehr erfreuet werden.

---

## Mathematisches und physikalisches Unterrichtswesen.

**Protokoll der zweiten Versammlung der Directoren der Gymnasien und der Realschulen erster Ordnung in Pommern. Stettin 1864.**

Wir müssen alle Lehrer der Mathematik und Physik auf dieses Protokoll recht sehr aufmerksam machen, weil in der genannten Versammlung, unter dem Vorsitze des um das höhere Schulwesen in der Provinz Pommern hochverdienten Provinzial-Schulraths Dr. Wehrmann in Stettin, in sehr eingehender und überaus lehrreicher Weise, eine für das höhere Unterrichtswesen sehr wichtige, mit dem mathematischen und physikalischen Unterricht in engster Verbindung stehende Frage discutirt worden ist. Es war nämlich dem Königl. Provinzial Schul-Collegium in Stettin der Vorschlag gemacht worden:

„dass in Prima denjenigen Schülern“ — (der Gymnasien) — „welche am hebräischen Unterrichte Theil nehmen und sich anheischig machen, in der Lectüre griechischer und lateinischer Schriftsteller, sowie im schriftlichen und mündlichen Gebrauche der lateinischen Sprache, über das Mass des gewöhnlich Geleisteten hinauszugehen, gestattet werde, am Unterricht in der Mathematik und Physik, nachdem sie bei einer Versetzungsprüfung darin die Kenntniss eines guten Secundaners nachgewiesen, nicht ferner Theil zu nehmen.“

„Die dadurch gewonnenen Lehrstunden und die erübrigte Arbeitszeit sollen der classischen Philologie, zum Theil auch dem Studium der heiligen Schrift, zu Gute kommen; die Zahl der wöchentlichen für die Mathematik aber, wenn nicht schon in

Quarta, so doch in Tertia auf 4, die für die Physik in Secunda auf 2 erhöht werden."

Mit der Zweckmässigkeit oder Unzweckmässigkeit dieses Vorschlags hat sich ein grosser Theil der Verhandlungen beschäftigt, wie man aus den sehr ausführlichen Mittheilungen in Nr. III. S. 28 — S. 57 sehen wird. Dass auf Versammlungen dieser Art bindende Beschlüsse nicht gefasst werden können und sollen, liegt ganz in deren Natur; sie sind nur zum Austausch gegenseitiger Meinungen bestimmt, wie dies denn auch hier der Fall gewesen ist. Es liegt gleichfalls in der Natur der Sache, dass die Ansichten vielfach aus einander gehen mussten, und wir sind daher auch nicht im Stande, gefasste allgemeine und feststehende Beschlüsse hier mitzutheilen, können vielmehr unseren Lesern nur die Versicherung geben, dass, so wie für uns die Lectüre dieser Verhandlungen in jeder Beziehung sehr interessant und vielfach anregend gewesen ist, dieselbe dies gewiss auch für jeden unserer Leser sein wird; daher müssen diese Verhandlungen zur allgemeinsten Beachtung empfohlen werden.

Am wenigsten kann es unsere Absicht sein, uns hier auf eine Kritik und Darlegung unserer eigenen Ansichten einzulassen. Nur Eins können wir nicht unterlassen ganz in der Kürze zu bemerken. Wenn nämlich von einem der Herren Referenten S. 52. dem verstorbenen Mitscherlich die Aeusserung in den Mund gelegt wird: „dass in der **Physik** wenig geistesbildender Stoff enthalten sei", so glauben wir, schon im Interesse des verstorbenen grossen Chemikers, aus näherer und genauerer Kenntniss der Thatsache, hier bemerken zu dürfen, dass von demselben eine Aeusserung dieser Art — wenn auch keineswegs in so schroffer Weise, — in der That gethan worden ist, sich aber nicht auf die Physik, sondern vielmehr nur auf die „Chemie", rücksichtlich des Elementar-Unterrichts in derselben auf Schulen, bezogen hat. Von der Physik konnte auch Mitscherlich wohl schwerlich dergleichen behaupten!

---

## Arithmetik.

Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers, par V. — A. Lebesgue, Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, Membre correspondant de l'Institut. Paris. Gautier-Villars. 1864.

Herr Lebesgue, der sich um die Zahlenlehre bekanntlich grosse und vielfache Verdienste erworben hat, hat im Jahre 1859 ein elementares Werkchen über diesen Gegenstand unter dem Titel:

Exercices d'Analyse numérique. Extraits, Commentaires et Recherches relatifs à l'Analyse indéterminée et à la Théorie des Nombres. Paris. Leiber et Faraguet. 8°.

herausgegeben, welches wir im Literar. Ber. Nr. CXXXII. S. 4. angezeigt und unseren Lesern nach Verdienst zur Beachtung empfohlen haben. Im Jahre 1862 hat Herr Lebesgue diesem Werkchen ein zweites unter dem Titel:

Introduction à la théorie des Nombres. Paris. Mallet-Bachelier.

folgen lassen, welches uns leider bis jetzt noch nicht näher bekannt geworden ist, von dem wir aber bald noch eine eingehendere Anzeige liefern zu können hoffen. Jetzt beabsichtigt Herr Lebesgue eine Reihe einzelner Hefte herauszugeben, welche specielle Untersuchungen aus der Zahlenlehre und Beiträge zu derselben enthalten werden. Das erste dieser Hefte, auf deren Erscheinen wir unsere Leser recht sehr aufmerksam machen, liegt unter dem obigen Titel uns jetzt vor, wobei wir zu bemerken nicht unterlassen dürfen, dass dessen Herausgabe durch die Beihülfe und Unterstützung der thätigen „Société des Sciences physiques et naturelles" in Bordeaux in der rühmlichsten und mit grösstem Danke anzuerkennenden Weise gefördert und ermöglicht worden ist. Den Hauptinhalt dieses Heftes bildet eine Tafel der Theiler der Zahlen von 1 bis 115500, welche nur 20 Seiten umfasst. Diese Tafel geht weiter als die, vielen unserer Logarithmentafeln beigegebenen Factorentafeln, namentlich weiter als die Tafel von Vega-Hülsse, — welche nur die Zerlegung der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen bis 102000 enthält, — und besitzt eine von der gewöhnlichen in vielen Beziehungen abweichende sehr sinnreiche Einrichtung, die hauptsächlich aus auf der höheren Zahlenlehre beruhenden, und in derselben begründeten Betrachtungen und Untersuchungen hervorgegangen und durch dieselben erzielt worden ist. Nicht bloss wegen der schönen Tafel an sich, sondern ausserdem auch wegen dieser, in der vorausgeschickten ausführlichen und sehr lehrreichen Einleitung enthaltenen zahlentheoretischen Betrachtungen, empfehlen wir diese Schrift unseren Lesern recht sehr zur Beachtung, und bemerken, dass diese Einleitung folgende Paragraphen enthält: §. I. Crible

arithmétique, worin sich der Herr Verfasser mit den verschiedenen Methoden der Construction und Einrichtung eines „Cribrum arithmeticum“*) in überaus lehrreicher Weise beschäftigt. Den Schluss dieses Paragraphen bildet ein „Tableau des nombres premiers impairs, inférieurs à 5500. — §. II. Décomposition en facteurs des nombres qui depassent la limite des tables. — §. III. Usage de la Table ou du Crible arithmétique. — Man wird hieraus sehen, wie viel Nützliches und Lehrreiches diese Schrift von nur geringem Umfange enthält, und wird bei näherer und genauerer Kenntnissnahme unsere Empfehlung derselben gerechtfertigt finden**).

Indem wir schliesslich bemerken, dass die Tafel nach Anleitung des Verfassers von dem, namentlich auch durch seine fünfstelligen Logarithmentafeln sehr verdienten Herrn Professor Houël in Bordeaux berechnet worden ist, machen wir zugleich schon vorläufig auf die ferneren Hefte aufmerksam, welche Herr Lebesgue über verschiedene Partieen der Zahlenlehre zu publiciren beabsichtigt. Das nächste Heft wird dem Canon arithmeticus von Jacobi gewidmet sein, und denselben in einer abgekürzten Form liefern. Wir werden auch über dieses neue Heft nach seinem Erscheinen so bald als möglich berichten.

Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte. Nota di Placido Tardy. Napoli. 1864.

Bekanntlich hat Herr Hoppe in seiner Schrift: Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten. S. 38. eine bemerkenswerthe Formel zur independenten Darstellung von $D^n_x f(z)$, wo $z$ eine Function von $x$ ist, und $D^n_x f(z)$ den $n$ten Differentialquotienten von $f(z)$ in Bezug auf $x$ als unabhängige veränderliche Grösse bezeichnet, gegeben. In der vorliegenden Abhandlung hat nun Herr Professor Placido

*) Bekanntlich ist des Eratosthenes Sieb (Cribrum, *Κοσκινον*) eine Methode dieses alten gelehrten Mathematikers und Astronomen im 3ten Jahrhundert v. Ch. G., die Primzahlen aus den übrigen Zahlen auszusondern. M. s. z. B. Mathematisches Wörterbuch. Thl. II. S. 129. In den Philosophical Transactions. Vol. 62. findet sich eine Abhandlung von Horsley über das Sieb des Eratosthenes.

**) Eine Mittheilung aus der Einleitung haben wir bereits in Thl. XLII. S. 478 ff. gemacht, um schon vorläufig auf die verdienstliche Schrift aufmerksam zu machen.

Tardy in Genua diese Untersuchung zu weit grösserer Allgemeinheit erhoben, und eine Formel zur independenten Bestimmung von $D^n_x f(u, v)$, wo $u$, $v$ beliebige Functionen von $x$ bezeichnen, gegeben. Die vollständige Mittheilung dieser Formel, die ausserdem eine besondere Anweisung zu ihrem Gebrauche und ihrer Anwendung erfordern würde, würde hier zu viel Raum in Anspruch nehmen, und wir können daher unsere Leser in dieser Beziehung nur auf die sehr beachtenswerthe Abhandlung des Herrn Prof. P. Tardy selbst verweisen.

## Praktische Geometrie.

Leitfaden für den Unterricht im technischen Zeichnen an Real-, Gewerbe-, Handwerker- und Baugewerkenschulen. Von Dr. C. F. Dietzel, Oberlehrer am Gymnasium und der damit verbundenen Realschule, so wie Lehrer an der Königl. Baugewerkenschule in Zittau. Mit Holzschnitten. Leipzig. Seemann. 1864. 8°. I. Heft. Die Elemente der Projectionslehre. II. Heft. Die Schattenconstruction. III. Heft. Die Elemente der Perspective. IV. Heft. Die angewandte Projectionslehre.

Der Herr Vf. hat, wie es uns scheint, in diesem Werkchen eine sehr deutliche, anschauliche und recht praktische, zugleich ein äusserst geringes Maass mathematischer Vorkenntnisse in Anspruch nehmende Anleitung zum geometrischen Zeichnen nach den verschiedenen Projectionsarten gegeben, welche zugleich noch in der grossen Anzahl sehr sauberer Holzschnitte eine wesentliche Erläuterung findet. Das 4te Heft enthält auch in einfacher und deutlicher Weise die Grundzüge der axonometrischen Projectionsmethode. Wir glauben, dass dieses Werkchen allen Lehrern an den auf dem Titel genannten Unterrichtsanstalten recht sehr zur Beachtung empfohlen zu werden verdient; aber auch für solche Schüler, die eine der genannten Lehranstalten nicht besuchen können, scheint es uns zum Selbstunterricht recht brauchbar, und mag daher auch in dieser Rücksicht bestens empfohlen sein.

## Mechanik.

Studien zur analytischen Mechanik. Die allgemeinen Gesetze der Bewegung. Von Dr. J. Dienger, Pro-

essor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe. Stuttgart. J. C. Metzler. 1863. 8°.

Es ist nach unserer Ansicht sehr dankenswerth, dass der Herr Vf. in dieser Schrift eine zusammenhängende und streng systematische Entwickelung der allgemeinsten Gesetze der Mechanik aus den ersten und einfachsten Principien dieser herrlichen Wissenschaft geliefert hat, und zwar, wie er in dem Vorwort selbst sagt, ohne die „unendlich kleinen Grössen" (Variationen, Differentiale, u. s. w.), wodurch er zugleich die ziemlich verbreitete Ansicht, dass man ohne solche Grössen in der Mechanik nicht auskommen könne, zu widerlegen sucht. Eine Arbeit wie die vorliegende ist um so dankenswerther, weil Jeder weiss, dass bei den vielfachen Anwendungen, die gegenwärtig von der Mechanik in dem weiten Kreise der Naturwissenschaften gemacht werden, gerade die allgemeinsten mechanischen Gesetze die ausgedehnteste Anwendung bei der Lösung der betreffenden Aufgaben finden. Indem wir daher diese Schrift recht sehr zu allgemeinster Beachtung empfehlen, können wir hier nur noch nachstehend ihren Hauptinhalt angeben, wegen des Weiteren auf die gründlich und sorgfältig ausgearbeitete Schrift selbst verweisend: §. 1. Grundformeln. §. 2. Bewegung des Schwerpunkts des Systems. §. 3. Princip der Flächen. §. 4. Feste Punkte eines beweglichen Systems. §. 5. Umformung der allgemeinen Gleichungen. §. 6. Trägheitsmoment bei starren Körpern. §. 7. Rotation eines starren Körpers um eine feste Axe. §. 8. Rotation eines festen Körpers um einen festen Punkt. §. 9. Allgemeinste Bewegung eines starren freien Körpers. §. 10. Untersuchungen über die lebendige Kraft. §. 11. Bewegung eines festen Körpers bei Berücksichtigung der inneren Kräfte. §. 12. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. §. 13. Das Princip der kleinsten Wirkung. §. 14. Kleine Schwingungen eines Systems.

---

## Physik.

Lehrbuch der Physik mit mathematischer Begründung. Zum Gebrauch in den höheren Schulen und zum Selbstunterrichte. Von Dr. A. Kunzek, Edlen von Lichton, k. k. ord. Professor der Physik an der Universität in Wien u. s. w. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 390 in den Text gedruckten Holzschnitten. Wien. Braumüller. 1865. — XVII und 795 S. 8°.

Die erste Auflage (1853) dieses ausgezeichneten Lehrbuchs der Physik ist im Literar. Ber. Nr. LXXXVI. S. 11., die zweite

(1860) im Literar. Ber. Nr. CXXXV. S. 11. angezeigt worden. Es macht uns ungemeine Freude und liefert das beste Zeugniss für die Richtigkeit unseres gleich bei seinem ersten Erscheinen über dieses treffliche Buch gefällten sehr günstigen Urtheils, dass schon jetzt wieder eine neue Auflage desselben nöthig geworden ist. Zu wesentlichen und durchgreifenden Veränderungen der dem Buche in der zweiten Auflage gegebenen Gestalt hat der Herr Vf. keine Veranlassung gefunden, wie bei der Trefflichkeit desselben auch vorauszusehen war; aber eifrig ist er bemühet gewesen, in den einzelnen Theilen Alles zu verbessern, wo noch eine grössere Deutlichkeit oder richtigere Auffassung erzielt werden konnte, und zugleich alle neueren Entdeckungen, so weit und in dem Umfange, wie sie irgend in ein Buch von der Bestimmung des vorliegenden gehören, nachzutragen. Wir können uns demnach im Uebrigen ganz auf unsere Anzeige der zweiten Auflage in der oben genannten Nummer des Literarischen Berichts beziehen, und würden nur das dort Gesagte wiederholen müssen, wenn wir ausführlicher über die vorliegende dritte Auflage berichten wollten. Aber Das wollen und müssen wir hier nochmals wiederholen, dass das Hauptverdienst dieses Buchs in der überall strengen mathematischen Darstellung liegt, die — bei aller Anerkennung der grossen Bedeutung des Experiments und dessen sorgfältiger Berücksichtigung überall, wo es vorzugsweise zur Geltung kommt — nichts unbewiesen lässt, was irgend elementarmathematisch bewiesen werden kann. Mit vollem Rechte ist in diesem Buche die mathematische Darstellung nicht analytisch, sondern vorzugsweise synthetisch, insbesondere geometrisch, gehalten, welche letztere Darstellung ganz geeignet ist, mit Anschaulichkeit wahre mathematische Strenge verbinden zu können, was dem Herrn Vf. überall sehr wohl gelungen ist, und uns von Neuem mit besonderer Freude die strenge mathematische Schule hat erkennen lassen, in welcher derselbe gebildet worden ist und sich selbst gebildet hat. Nur wenn der physikalische Unterricht nach einem Buche wie das vorliegende ertheilt wird, kann und wird derselbe in vollem Umfange die bildende Kraft auf den Geist des Jünglings ausüben, welche in so hohem Maasse in ihm liegt und ihm beiwohnt. Bedenken wir aber nun auch, dass nach einem in allen Partieen so streng mathematisch-gehaltenen Buche, in dem Umfange von 795 eng gedruckten Seiten, auf den österreichischen Mittelschulen der Unterricht in der Physik ertheilt wird, so muss uns dies wahrlich mit grosser und wahrer Achtung vor dem Zustande dieses Unterrichtszweiges auf jenen Lehranstalten erfüllen. Auch kann und wird die vortheilhafte Rückwirkung des in dieser Weise ertheilten physi-

kalischen Unterrichts auf den eigentlichen mathematischen Unterricht nicht ausbleiben. Man nehme — natürlich mit eigenem wahren Sinn für wirkliche mathematische Strenge und eigener Kenntniss strenger geometrischer Methoden im Geiste der griechischen Geometer — nähere Kenntniss von dem vorliegenden trefflichen Buche, und man wird freudigst dem von uns vorher ausgesprochenen Urtheile beistimmen! Wir empfehlen also dieses Buch allen Lehrern der Physik, und eben so sehr denen der Mathematik, wiederholt, und zwar jetzt zum dritten Male, dringendst zu sorgfältigster Beachtung, und wünschen dem von uns hoch geehrten Herrn Vf., dass ihm in seinem hohen Alter die Vorsehung noch lange Jahre schenken möge, um die schönen Früchte seiner vieljährigen Bemühungen für das wahrhafte Gedeihen des physikalischen Unterrichts auf seinen vaterländischen Lehranstalten, — die Früchte seines patriotischen Eifers für die tüchtige Ausbildung des Geistes der diesen Lehranstalten anvertrauten Zöglinge durch den genannten Unterricht, — immer mehr und immer schöner erspriessen sehen zu können.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures, and condition of the Institution for the year 1862. Washington. 1863. 8°.

In diesem neuesten uns zugegangenen Jahrgange des „Annual Report" der Smithsonian Institution in Washington finden sich p. 108 — p. 239.:

Lectures on the undulatory theory of Light, by F. A. P. Barnard, S. T. D., LL. D., late Chancellor of the University of Mississippi.

auf welche wir recht sehr aufmerksam machen zu müssen glauben, weil diese Vorlesungen über die Theorie des Lichts nach unserer Meinung sehr deutlich geschrieben sind, und namentlich auch die mathematische Darstellung möglichst einfach gehalten, auch Alles durch eine grosse Anzahl sehr sauberer Holzschnitte erläutert worden ist. Der Hauptinhalt ist folgender:

**Part. I.** Introductory. Outline of optical discovery. — Early writers on optics. Snellius. Law of refraction. Effects of refraction. Unequal refrangibility of different colors. The rainbow. Diffraction. Double refraction. Colors of thin plates. Colors of thick plates. Progressive motion of Light. Velocity of Light. Velocity of Light in water and air. Lines in the spectrum. Polarization of

Light. Law of Malus. Polarization by refraction. Nicol's prism. Polariscopes. Colors in crystalline plates. Crystals cut across the axis. Crystals of quartz across the axis. Airy's spirals. Fresnel's prism. Circular polarization. Fresnel's rhomb. Total reflection. Elliptic polarization. Crystals of two axes. Polarizing structure artificially produced. Rotatory polarization of liquids. Hemihedrism. The tartrates. Atmospheric polarization. (Man sieht hieraus, dass dieser einleitende Theil sich zuvörderst mit einer sehr vollständigen Darlegung der von dem Licht dargebotenen Erscheinungen beschäftigt). — Theories of Light. Material Theory of Light. Theory of emission. Difficulties. Nach dieser allgemeinen Charakterisirung der älteren Theorien folgt nun: **Part. II.** Undulatory Theory. §. I. Vibration. §. II. Undulation. §. III. Reflection and Refraction. §. IV. Interference. §. V. Diffraction. §. VI. Colors of thin plates. §. VII. Polarization by Reflection and by Refraction. §. VIII. Circular and elliptical Polarization by Reflection. §. IX. Rotatory Polarization. §. X. Chromatics of polarized Light. §. XI. Double Refraction. §. XII. Wave surface. Conclusion. Index.

Man wird hieraus sehen, dass man hier eine sehr vollständige Theorie des Lichts vor sich hat. Ausser dieser Abhandlung machen wir auch noch auf die folgende, gleichfalls in diesem Jahrgange des „Report" befindliche aufmerksam:

The catalytic force, or studies on the Phenomena of contact. A prize memoir, by T. L. Phipson, D. S. — Translated for the Smithsonian Institution by C. A. Alexander. p. 395—p. 412.

so wie auf:

On Atoms. By Sir John Herschel. (Gespräch zwischen Hermogenes und Hermione.) p. 413. — p. 416.

---

## Krystallographie.

Eine Abhandlung über Krystallographie. Von W. H. Miller, Professor der Mineralogie an der Universität zu Cambridge. Für Studirende der Mathematik und der Mineralogie aus dem Englischen übersetzt von Dr. P. Joerres, Rector der höheren Knabenanstalt zu Ahrweiler. Bonn. Henry. 1864. 8°.

Als wir im Literar. Bericht Nr. CLX. S. 9. den „Tract of Crystallography by W. H. Miller. Cambridge. 1863."

anzeigten, forderten wir zugleich zu einer „recht baldigen Uebersetzung" dieses durch Kürze und geometrische Eleganz ausgezeichneten, auch für Mathematiker sehr zu empfehlenden Werkchens des berühmten Krystallographen von Cambridge auf. Vielleicht ist Herr Rector Joerres durch diese Aufforderung zur Herausgabe der vorliegenden Uebersetzung veranlasst worden, was wir nicht wissen können, da derselben eine Vorrede nicht beigegeben ist. Jedenfalls hat er sich durch diese, wie es, bei flüchtiger Durchsicht, uns geschienen hat, überall den Sinn des Originals treffende Uebersetzung ein Verdienst erworben, und wir empfehlen dieselbe sowohl im Allgemeinen, als auch namentlich Mathematikern zur Beachtung. Die äussere Ausstattung ist gut, wenn sie auch freilich der Eleganz des englischen Originals nicht gleich kommt; gewünscht hätten wir aber, dass die Figuren, gleich wie im Original, in sauberen Holzschnitten in den Text eingedruckt, und nicht in drei besonderen Figurentafeln am Ende beigefügt worden wären.

---

## Vermischte Schriften.

Société des sciences naturelles du Grand-Duché de Luxembourg. Tome septième. — Année 1864. Luxembourg. Imprimerie-Librairie de V. Buck. 1864. 8°.

Der sechste Theil dieser sehr beachtenswerthen Societätsschriften ist im Literar. Ber. Nr. CLXIV. S. 13. angezeigt worden. Der vorliegende siebente Theil enthält wieder mehrere sehr lehrreiche und lesenswerthe Abhandlungen, die wir der Beachtung unserer Leser recht sehr empfehlen.

Den meisten Raum nimmt in diesem Theile die folgende Abhandlung ein:

Nouvelle théorie mathématique de la chaleur et de l'électricité, par De Colnet-d'Huart, Docteur en sciences, professeur à l'Athénée royal de Luxembourg, membre de plusieurs sociétés savantes. Première Partie. Détermination de la relation qui existe entre la chaleur rayonnante, la chaleur de conductibilité et l'électricité.

welche Abhandlung auch als ein besonderes, Sr. Majestät dem Könige Wilhelm III. der Niederlande gewidmetes Buch unter

besonderem Titel erschienen ist. Der Herr Verfasser hat in dieser Abhandlung sowohl die Theorie der Wärme, als auch die der Electricität, von einem neuen Standpunkte aus bearbeitet, hauptsächlich gestützt auf die früheren bekannten trefflichen Arbeiten von Lamé, und hat — besonders hinweisend auf die beiden Ansichten von Huygens und Newton: „D'après Huygens la chaleur serait un mouvement moléculaire; mais alors la chaleur de conductibilité serait inexplicable; d'après Newton la chaleur serait un fluide en mouvement, et alors la chaleur rayonnante ne s'explique plus rationellement" — verschiedene dabei in den genannten Theorien sich zeigende Discordanzen auszugleichen, und Alles auf ein einziges Princip zurückzuführen gesucht, wobei er namentlich ein grosses Geschick in der Handhabung des Calculs an den Tag gelegt hat, so dass wir aus vollster Ueberzeugung seine Arbeit der sorgfältigsten Beachtung empfehlen müssen. Näher auf den Gegenstand einzugehen, wie wir gern möchten, würde mit gehöriger Deutlichkeit ohne grössere Weitläufigkeit nicht möglich sein, was uns der hier uns zugemessene Raum und die Natur dieser literarischen Berichte leider nicht gestatten; und wir können daher, indem wir auf die lehrreiche Abhandlung nochmals dringend aufmerksam machen, nur noch bemerken, dass dieselbe, nach einer in sehr lehrreicher Weise über die verschiedenen bisher erschienenen Wärmetheorieen sich verbreitenden Einleitung, die drei folgenden Kapitel enthält: Chapitre premier. Equations du mouvement de translation et du mouvement de rotation des molécules. — Chapitre deuxième. Théorie mathématique des courants électriques. — Chapitre troisième. Théorie mathématique de la chaleur et de la lumière. — Aber nur aus den Ueberschriften der einzelnen Paragraphen, die wir leider hier nicht geben können, würde man eine völlig deutliche Vorstellung von dem hier gebotenen reichen Inhalte gewinnen können.

Calcul, par approximation, des racines d'une équation numérique, algébrique ou transcendante. par J. P. Michaëlis, professeur à l'Athénée.

Herr Professor Michaelis hat in dieser beachtenswerthen Abhandlung die Newton'sche Nährungsmethode zur Lösung der numerischen Gleichungen in einigen wesentlichen Punkten vervollständigt, weshalb wir die Abhandlung der Aufmerksamkeit unserer Leser recht sehr empfehlen. Er sagt: „On sait, et cela résulte aussi de l'analyse suivante, que, quand même les conditions sous lesquelles la méthode de Newton est applicable, sont remplies, cette méthode ne peut être employée que pour l'une des deux limites, et qu'elle peut être fautive pour l'autre limite —

„Nous nous proposons d'indiquer comment on peut reconnaitre aisément à laquelle des deux limites il conviendra d'appliquer la formule de Newton; et nous montrerons que, pour l'autre limite, on trouve encore une approximation certaine en remplaçant dans les formules de Newton l'un des diviseurs $f'(a)$ ou $f'(A)$*) par un nombre que nous désignons par $m$, et qui se calcule aisément."

**Expression, sous forme de série, de toutes les racines de l'équation $\tang x = kx$; par J. P. Michaëlis, professeur à l'Athénée. p. 167 — p. 171.**

Die vorzugsweise auf geometrischem Wege gefundene Reihe ist jedenfalls sehr bemerkenswerth und gewährt eine rasche Annäherung, wie die beigefügten Beispiele zeigen.

**Emploi des imaginaires, pour la sommation d'une classe de séries trigonometriques, et pour le calcul de certaines intégrales; par J. P. Michaëlis, professeur à l'Athénée. p. 172 — p. 190.**

Die Reihen, mit deren Summirung der Herr Verfasser sich in dieser Abhandlung beschäftigt, sind die folgenden:

Wenn sich $f(x)$ in die Reihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots.$$

entwickeln lässt, wo also $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots.$ bekannte Coefficienten sind, so sollen die sehr allgemeinen Reihen:

$$A_0 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\{ a + A_1 x \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\}(a+b) + A_2 x^2 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\}(a+2b)$$

$$+ A_3 x^3 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\}(a+3b) + \ldots.$$

und

$$A_0 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\{ a + A_1 x e^m \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\}(a+b) + A_2 x^2 e^{2m} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\}a+2b) + \ldots.$$

summirt werden, für welche Summen, die er auch auf verschiedene specielle Fälle anwendet, der Herr Verfasser bemerkenswerthe Resultate erhält. Die theilweise schon anderweitig bekannten Integrale, wie z. B.

$$\int e^{ax} \cos bx \partial x, \quad \int e^{ax} \sin bx \partial x,$$

stehen zu diesen Reihen in naher Beziehung.

---

*) $a$ et $A$ étant les deux limites.

Mit der Anzeige dieser Abhandlungen erlauben wir uns noch die Anzeige der folgenden Abhandlung zu verbinden:

De l'Ellipsoide, par J. P. Michaëlis, professeur à l'Athénée de Luxembourg (Extrait des Publications de la société des Sciences de Liége, année 1863).

Wenn

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

wie gewöhnlich, die Gleichung des Ellipsoids ist, so lässt sich

$$x=a\cos\alpha,\quad y=b\cos\beta,\quad z=c\cos\gamma$$

setzen, und es ist in der That sehr bemerkenswerth, wie viele, auf andere Weise nur schwierig und weitläufig zu beweisende Sätze von dem Ellipsoid durch diese Transformation mit grosser Leichtigkeit und nur geringem Aufwande von Calcul bewiesen, auch mannigfaltige Bestimmungen und Lösungen von Aufgaben ausgeführt werden können. Alles dieses hat der Herr Verfasser in dieser sehr zu beachtenden Abhandlung sehr deutlich mit besonderem analytischen Geschick gezeigt.

---

## Italienische mathematische Literatur.

Die italienische mathematische Literatur ist jetzt so reich an wichtigen Erscheinungen, namentlich an einzelnen höchst interessanten und wichtigen Untersuchungen, es giebt sich gegenwärtig eine so grosse Lebhaftigkeit und Regsamkeit auf diesem wissenschaftlichen Felde in Italien kund, und es treten dort so viele tüchtige und höchst ausgezeichnete, in Deutschland grösstentheils noch ganz unbekannte wissenschaftliche Kräfte hervor: dass es uns ganz unmöglich ist, in diesen Blättern von allen diesen literarischen Erzeugnissen ausführlich zu berichten, wenn auch rücksichtlich mehrerer dies schon öfters geschehen ist, wie die Leser sich gewiss erinnern werden. Wenn nun auch solche Berichte künftig noch öfter als bisher erstattet werden sollen, so müssen wir doch, um bei der grossen Masse uns vorliegender Schriften nicht zu weit mit unseren Berichten zurückzubleiben, und unsere Leser wenigstens einigermassen und nur im Allgemeinen mit denselben bekannt zu machen, jetzt, ausführlichere Anzeigen uns vorbehaltend, das vorläufige Auskunftsmittel ergreifen, die neuesten und neueren dieser Schriften nur ihren Titeln nach anzugeben, wie in dem folgenden ersten, alphabetisch nach

den Verfassern geordneten Verzeichnisse, welchem mehrere andere folgen werden, geschieht. Gewiss werden schon aus diesem ersten Verzeichnisse die Leser mit Interesse Kenntniss nehmen von dem jetzt in Italien herrschenden lebhaften Treiben auf dem Gebiete der mathematischen Literatur.

Schon früher besonders angezeigte Schriften sind in das nachfolgende Verzeichniss nicht wieder aufgenommen worden. G.

Battaglini, G., Sulle serie di curve d'indice qualunque. Napoli. 1863. 4°.

— Nota sopra alcune questioni di Geometria. Napoli. 1862. 4°.

— Sopra alcune proprietà delle linee di secondo grado. Napoli. 1862. 4°.

— Sulla dipendenza equianarmonica. Napoli. 1863. 4°.

— Nota di Geometria. Napoli. 1862. 4°.

— Nota sui determinanti. Napoli. 1862. 4°.

— Sulle superficie di secondo grado. Napoli. 1862. 4°.

— Sopra una questione di massimi e minimi. Napoli. 1863. 4° (Das Problem ist folgendes: „Trovare tra tutte le superficie di 2° grado che passano per otto punti, ovvero che hanno una medesima linea d'intersezione, quella per la quale il prodotto dei quadrati de' semiassi è un massimo o un minimo".

— Sulle forme geometriche. Napoli. 1862. 4°.

— Sulla dipendenza di primo ordine. Napoli. 1863. 4°.

Beltrami, Eugenio, Intorno alle coniche di nove punti e ad alcune quistioni che ne dipendono. Bologna. 1863. 4°.

— Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti. Napoli. 1863. 4°.

— Intorno ad alcuni sistemi di curve piane. Roma. 1862. 4°.

— Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti. Roma. 1862. 4°.

Betti, E., Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa. Pisa. 1863. 4°.

Bordoni, A., Sull' equilibrio astratto delle volte. Memoria postuma. Milano. 1863. 4°.

Brioschi, F., Sopra una nuova formola nel calcolo integrale. Napoli. 1864. 4°.

— Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado. Milano. 1863. 4°.

— Sopra una nuova trasformazione dell' integrale ellittico. Milano. 1864. 8°.

Chelini, Domenico, Delle sezioni del cono e della prospettiva nell' insegnamento della Geometria analitica. Bologna. 1864. 4°.

Fergola, E., Sopra lo sviluppo della funzione $\frac{1}{ce^x - 1}$, e sopra una nuova espressione dei numeri di Bernoulli. Napoli. 1857. 4°.

— Sopra due formole di calcolo differenziale. Roma. 1858. 4°.

— Sopra la condizione per la possibilità dello sviluppo di qualunque funzione in serie ordinata secondo le potenze ascendenti della differenza della variabile sopra un valore costante. Napoli. 4°.

— Ricerca dell' espressione di una derivata qualunque di una funzione in termini delle derivate della funzione inversa. Napoli. 4°.

— Ricerche sulla risoluzione per serie di un'equazione qualunque. Napoli. 4°.

— Sopra alcune proprietà delle superficie di secondo grado. Napoli. 4°.

— Sopra talune proprietà delle soluzioni intere e positive dell' equazione

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots, + n\alpha_n = n.$$

Napoli. 1863. 4°.

— Sulla risoluzione per serie delle equazioni trinomie di grado qualunque. Napoli. 1862. 4°.

Padula, F, Ricerche su le superficie curve. Napoli. 4°.

— Su le equazioni relative al moto de' liquidi osservazioni. Napoli. 4°.

— Ricerche di Geometria analitica. Napoli. 1862. 4°.

Tardy, P., Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte. Napoli. 1864.

# Literarischer Bericht

## CLXX.

### Geschichte der Mathematik.

Le Talkhys d'Ibn Albannâ, publié et traduit (d'après un Ms. inédit de la Bibliothèque Bodléyenne coté Marsh. 371, No. CCXVII. du Catalogue d'Uri). Par Aristide Marre, Professeur, Officier de l'instruction publique. Rome. Imprimerie des sciences mathématiques et physiques. Via Lata. No. 211. A. 1865. 4°.

Dem so rühmlichen und für die Wissenschaft so folgenreichen Eifer, mit welchem schon seit langer Zeit der Fürst Don Balthasar Boncompagni in Rom — bei eigener tiefster und umfangreichster Kenntniss des Gegenstandes, und gegenwärtig jedenfalls der grösste Kenner der Geschichte der Mathematik, namentlich im Mittelalter — sich der Förderung historisch-mathematischer Studien widmet, verdankt die Geschichte der Mathematik auch die vorliegende sehr wichtige und in vielen Beziehungen höchst interessante Schrift. Von dem auf dem Titel genannten überaus merkwürdigen arabischen Manuscript der Bodleianischen Bibliothek, über dessen Verfasser Ibn Albannâ nur sehr wenig bekannt ist*), hatte der, leider schon im

*) pag. IX. heisst es: „En arabe le titre du livre est: Ketab Talkhys al hissâb, le nom de l'auteur est Abou'l Abbâs Ahmed ben Mohammed ben Othman Alâzadi, et son surnom Ibn Albannâ Al Garnâti (le fils de l'architecte de Grenade). Originaire de Grenade, mais habitant de Marok, Ibn Albannâ est plus communement appelé Al Marakeschi." Hierzu bemerken wir noch, dass derselbe in Marocco im Jahre 1222 unserer Zeitrechnung Astronomische Tafeln publicirte. (M. s. Journal Asiatique, Cinquième série. Tome IV. p. 371.)

38sten Lebensjahre der Wissenschaft entrissene Doctor Franz Woepcke eine Abschrift gemacht, in der Absicht, den arabischen Text zu übersetzen, woran ihn sein früher Tod verhinderte. Diese Abschrift gelangte in den Besitz des Fürsten Balthasar Boncompagni, welcher mit dem rühmlichsten Eifer Herrn Aristide Marre veranlasste, sich der Uebersetzung zu unterziehen, welche nun in der obigen Schrift uns vorliegt, und jedenfalls ein neuer sehr wichtiger Beitrag zur Geschichte der Mathematik ist, wobei wir zugleich nicht unterlassen wollen zu bemerken, dass, nach einer uns gemachten freundlichen Mittheilung, der arabische Text noch in dem laufenden Jahre gedruckt werden und dieser Uebersetzung sich unmittelbar anschliessen wird, indem die letztere schon jetzt nur deshalb herausgegeben wurde, um die Publication der wichtigen Schrift nicht zu lange zu verzögern.

Der „Talkhys" des Ibn Albannâ ist eine Schrift über die Regeln des Calculs, und besteht aus folgenden Theilen: **Première Partie.** Sur le nombre connu. — Première section. Sur les entiers. Chap. I. Des divisions du nombre et de ses ordres. Chap. II. De l'addition. Chap. III. De la soustraction. Chap. IV. De la multiplication et de l'offrande de son sel. Chap. V. Sur la division. — Seconde section. Sur les fractions. Chap. I. Sur les noms des fractions et leurs numérateurs. Chap. II. Sur l'addition et la soustraction des fractions. Chap. III. Sur la multiplication des fractions. Chap. IV. Sur la division et la dénomination. Chap. V. Sur la réintegration et l'abaissement. Chap. VI. Sur la conversion. — Troisième section. Sur les racines. Chap. I. Sur l'extraction de la racine des nombres entiers et de la racine des fractions. Chap. II. Sur l'addition des racines des nombres et leur soustraction. Chap. III. Sur la multiplication des racines des nombres et leur dénomination. Chap. IV. Sur la division des racines des nombres et leur dénomination. — **Seconde Partie.** Sur les règles par lesquelles il est possible de parvenir à l'inconnue demandée en partant de ce qui est connu et donné. Elle se divise en deux sections: section sur l'opération par la proportion, et section sur **Algèbr** et **Almokâbalah.** Diese zweite Abtheilung enthält also die eigentliche Algebra oder die Auflösung der Gleichungen, namentlich auch derer des zweiten Grades.

Die Leser werden aus Vorstehendem sehen, dass sie hier eine sehr vollständige Abhandlung eines alten arabischen Autors über die Arithmetik vor sich haben und die Wichtigkeit der Schrift für die Geschichte der Mathematik erkennen. Ganz be-

sonders bemerkenswerth ist es aber, dass dieser alte arabische Autor schon viele Regeln und Sätze kannte, deren Beweis selbst in unserer neueren allgemeinen Arithmetik nicht ohne alle Schwierigkeit ist, in welcher Beziehung wir bemerken, dass sich, in unseren Zeichen ausgedrückt, z. B. in der vorliegenden Schrift p. 5., p. 6., p. 7. die folgenden Sätze oder Gleichungen finden:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots.+n^3=(1+2+3+4+\ldots.+n)^2,$$

$$1^3+3^3+5^3+7^3+\ldots.+(2n-1)^3$$
$$=(1+3+5+7+\ldots.+(2n-1))\{2(1+3+5+7+\ldots.+(2n-1))-1\},$$

$$2^3+4^3+6^3+8^3+\ldots.+(2n)^3$$
$$=(2+4+6+8+\ldots.+2n).2(2+4+6+8+\ldots.+2n).$$

In der im vorigen Jahre (1864) erschienenen Schrift:

> Passages relatifs à des sommations de séries de cubes extraits de deux manuscrits arabes inédits du British Museum de Londres, cotés N.os CCCCXVII et CCCCXIX des manuscrits orientaux (N.os 7469 et 7470 des manuscrits additionnels). Par M. F. Woepcke. Rome. Imprimerie des sciences mathématiques et physiques. Via Lata. No. 211. A. 1864. 4°.

findet man p. 4.—p. 19. eine Stelle aus einer Schrift eines Commentators des Talkhys des Ibn Albannâ, nämlich des Chihâb Eddin Aboûl Abbâs Ahmed Ben Radjab, bekannt unter dem Namen Ibn Almadjdî, gestorben im Jahre 850 der Hedschra (29. März 1446 bis 18. März 1477 der christlichen Zeitrechnung) übersetzt, in welcher man p. 5., p. 10., p. 13. die folgenden Gleichungen bewiesen findet:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots.+n^3=(1+2+3+\ldots.+n)^2,$$
$$1^3+3^3+5^3+\ldots.+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1),$$
$$2^3+4^3+6^3+\ldots.+(2n)^3=2(2+4+6+\ldots.+2n)^2;$$

und aus einer anderen Schrift, dem „Schlüssel des Calculs“ von Djamchîd Ben Mas'oûd Ben Mahmoûd, dem Arzt, genannt Ghiyâth (Eddin) Alqâchânî, einem der Astronomen, welche an der Redaction der Tafeln von Oloug Beg Theil nahmen, übersetzt Dr. Woepcke a. a. O. p. 24. ff. eine Stelle, welche die Gleichungen

$$1^3+2^3+3^3+\ldots.+n^3=(1+2+3+\ldots.+n)^2,$$

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4$$
$$=[\tfrac{1}{3}\{1+2+3+\ldots+(n-1)+(n-1)\}+\{1+2+3+\ldots+n\}].\{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\}$$
$$=\tfrac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^2-n)$$

enthält, woraus man sieht, wie eifrig sich die Araber mit der Summirung der Potenzen der natürlichen Zahlen beschäftigten und wie sehr dieselbe unter ihnen verbreitet war.

Zum Schluss bemerken wir noch, dass Herr Aristide Marre in der sehr gelehrten Vorrede seiner Uebersetzung des Talkhys p. VII—p. XII über das übersetzte Manuscript und die weitere betreffende Literatur Alles das zusammengestellt hat, was zu wissen nöthig und interessant ist, so weit irgend die vorhandenen Quellen und Hülfsmittel reichten.

Möge die Schrift in die Hände aller Derer übergehen, welche der Geschichte der Mathematik sorgfältige Studien widmen; alle werden dem Herrn Baldassarre Boncompagni wärmsten und aufrichtigsten Dank zollen, dass durch seinen Eifer und seine Vermittelung dieselbe ihnen zugänglich gemacht worden ist.

**Histoire de la Perspective ancienne et moderne contenant l'analyse d'un très-grand nombre d'ouvrages sur la Perspective et la description des procédés divers qu'on y trouve. Par M. Poudra, Officier supérieur d'état-major en retraite. Faisant suite au Cours de Perspective professé à l'École d'état-major. Avec 12 Planches. Paris. J. Corréard, Éditeur. 1864. 8°.**

Herr Poudra, der sich bekanntlich neuerlich durch die Herausgabe der Schriften von Desargues so sehr verdient gemacht hat (Literar. Ber. CLXIV. S. 9.), erwirbt sich jetzt ein neues anerkennungswerthes Verdienst durch die Herausgabe des vorliegenden Werkes. Was dasselbe leisten will, giebt der Titel deutlich und bestimmt an. Man kann zwar nicht sagen, dass es eine ganz vollständige Geschichte der Perspective von den ältesten bis auf die neuesten Zeiten in fortlaufender entwickelnder historischer Darstellung enthält; aber es liefert mit sehr grosser Sachkenntniss und offenbar als Frucht sehr eifriger und umfangreicher Studien eine Analyse einer sehr grossen Anzahl älterer und neuerer Werke über die Perspective, nach der Zeitfolge geordnet, und führt uns überall in sehr lehrreicher Weise in die verschiedenen, von den Verfassern dieser Werke erfundenen und in denselben entwickelten Methoden perspectivischer Darstellungen und Zeichnungen ein, so dass man auf diese Weise allerdings

auch zu einer deutlichen Kenntniss der Wege gelangt, auf denen die Perspective in immer besserer und vollständigerer Ausbildung und Entwickelung vorgeschritten ist. Wir können daher dieses Werk einem Jeden, der sich für diesen Gegenstand interessirt, als eine sehr interessante und lehrreiche Lectüre aus Ueberzeugung empfehlen, und halten es deshalb für unsere Pflicht, um zugleich den Umfang des Werkes und der von dem Herrn Verfasser gemachten Studien deutlicher hervorzuheben, hier noch die Verfasser der analysirten Werke sämmtlich zu nennen, indem wir absichtlich die französische Schreibart der Namen derselben beibehalten: Introduction. Première époque, dans laquelle optique, perspective, apparence ont la même signification. Euclide, Eliodore de Larisse, Ptolémée, Vitellion, Roger Bacon, P. Ramus und F. Risner, Reisch und Oronce Finée, Hamelius und J. Pisanus, Joannis (Peccam), Aguilon, Dechales, Lacaille (1750). Observations. — Deuxième époque, dans laquelle la Perspective va recevoir une signification différente de celle que nous lui avons donnée dans la première. Introduction. Du dessin et de la peinture chez les anciens. Vitruve. Avertissement. Pietro della Francesca dal Borgo san Sepolcro. Bramante de Milan. Baldassare de Sienne. Léonard de Vincy. Pomponius Gauricus. Léon-Baptiste Alberti. Frater Lucas Pacciolus. Viator, Perspective positive. Albert Durer. Reisch et O. Finée. Serlio (Sebastien). Federic Commandin. Hans Leucker. Daniel Barbaro. J. Cousin. Du Cerceau. Vignole et Commentaires, par J. Danti. Sirigati. Guido Ubaldi. Les 23 methodes de G. Ubaldi. Stevin. Salomon de Caus. Aquilon. Samuel Marolais. J. Uredeman Frisius. Sintagma. Accotti. Desargues. Du Breuil. Alleaume et Migon. Vavlezard. Battaz. La Curabelle. Bosse. René Gautier. Ch. Bourgoin. Niceron. G. Huret. André Albert. Milliet Dechales. Seb. Leclerc. Guilo Troily ou Paradosse. S. Gravesande. Schubler. Hamilton. Costa. Jeaurat. Kaestner. Lacaille. Gallus. Taylor par F. Jacquier. Cl. Roy. Petitot. Lambert. Taylor et Murdoch. Zanoti. Le chevalier De Curel. Torelli. Priestley. Lespinasse. Lavit. Palaizeau. Taccani. Thibault. Cloquet. Dufour. Paillet de Montabert. Fielding. Adhémar. Poudra.

---

## Arithmetik.

Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Abiturienten-Prüfungen an preussischen Gymnasien und Realschulen gestellten Aufgaben ausgewählt und

mit Hinzufügung der Resultate zu einem Uebungsbuche vereint von H. C. E. Martus, Oberlehrer an der Königstädtischen Realschule in Berlin. I. Aufgaben. Greifswald 1865. C. A. Koch's Verlagshandlung. 8°.

Wie dieses Aufgabenbuch entstanden ist, giebt sein Titel vollständig an. Die in demselben enthaltenen 1500 Aufgaben, sämmtlich nur für die obersten Klassen bestimmt, sind bei Weitem dem grössten Theile nach aus den bei den Abiturienten-Prüfungen auf den preussischen Gymnasien und Realschulen gegebenen mathematischen Aufgaben zusammengestellt; da aber der Herr Verfasser mit sehr richtigem Takte zugleich ein den ganzen Cursus von Prima und Secunda umfassendes Aufgabenbuch liefern wollte: so hat er einige Partieen, wo sich unter den Abiturienten-Aufgaben zu wenig betreffende Aufgaben vorfanden, aus eigenen Mitteln ergänzt, was wir nur vollkommen billigen können. Um dem Leser einen Ueberblick über den reichen Inhalt dieses Buchs zu verschaffen, glauben wir denselben nachfolgend wenigstens seinen Haupttheilen nach angeben zu müssen: **Theil I.** *Geometrie.* A. Planimetrie. I. Lehrsätze. II. Constructions-Aufgaben. (1. Vom Dreiecke. 2. Vom Vierecke. 3. Vom Kreise.). III. Aufgaben aus der algebraischen Geometrie. (1. Formelentwickelung durch Construction. 2. Numerische Berechnungen.) B. Trigonometrie. I. Goniometrie und trigonometrische Gleichungen. II. Ebene Trigonometrie. (1. Das rechtwinklige Dreieck. 2. Das schiefwinklige Dreieck. 3. Das Viereck. 4 Das Polygon. 5. Der Kreis. 6. Anwendung der Trigonometrie auf Längenbestimmungen.). III. Sphärische Trigonometrie. (1. Reine Mathematik. 2. Anwendungen.). C. Stereometrie. (1. Pyramide. 2. Prisma. 3. Kegel. 4. Cylinder. 5. Kugel. 6. Die regelmässigen Körper. 7. Maxima und Minima.). D. Coordinaten-Geometrie. (1. Gerade Linie. 2. Kreis. 3. Parabel. 4. Ellipse. 5. Hyperbel. 6. Alle drei Kegelschnitte. 7. Curven höherer Grade.) — **Theil II.** *Arithmetik.* A. Algebra. I. Gleichungen vom ersten und zweiten Grade und solche Gleichungen höherer Grade, die sich auf diese zurückführen lassen. (1. Gleichungen, in Zeichen gegeben. 2. Gleichungen, in Worten gegeben. 3. Gleichungen, aus Rechenaufgaben zu bilden. 4. Gleichungen, in geometrischer Einkleidung.). II. Diophantische Gleichungen. III. Kubische Gleichungen. IV. Höhere Algebra. (1. Höhere algebraische Gleichungen. 2. Transcendente Gleichungen.). B. Niedere Analysis. I. Progressionen. (1. Arithmetische Progressionen erster Ordnung. 2. Arithmetische Progressionen höherer Ordnung. 3. Geometrische Progressionen erster Ordnung. 4. Zusammengesetzte

Reihen und geometrische Progressionen höherer Ordnungen.). II. Zins auf Zins. (1. Zinseszinsrechnung. 2. Rentenrechnung.). III. Kettenbrüche (mit Einschluss der Anwendung derselben zur Auflösung unbestimmter Aufgaben). IV. Combinationslehre (auch Wahrscheinlichkeitsrechnung). V. Anwendungen des Binomischen Lehrsatzes. VI. Die unendlichen Reihen. (a. Ueber Convergenz. b. Die Methode der unbestimmten Coefficienten. c. Die Reihen für Sinus und Cosinus.) — **Theil III.** *Aufgaben aus der Physik.* I. Mechanik. (1. Der Hebel. 2. Vom Schwerpunkte. 3. Der freie Fall der Körper. 4. Die Gravitation. 5. Der senkrechte Wurf. 6. Die schiefe Ebene. 7. Die parabolische Wurfbewegung. 8. Die Schwungkraft. 9. Das Pendel. 10. Vom specifischen Gewicht. 11. Vom Luftdruck.). II. Wärmelehre. (1. Strahlung. 2. Ausdehnung. 3. Wärmecapacität. 4. Dampfmaschinen.). III. Optik. (1. Katoptrik. 2. Dioptrik mit Einschluss der Theorie des Regenbogens.).

Die Leser werden hieraus den grossen Reichthum dieser Sammlung erkennen, und, wie wir ihnen versichern können, durch die Neuheit der Aufgaben — die auch keineswegs zu den leichtesten gehören und die geistige Kraft und das Combinationsvermögen des Schülers, wie ihre Bestimmung ist, in Anspruch zu nehmen durchgängig geeignet sind — vielfach freudig überrascht werden.

Der Herr Verfasser hat sich seiner im höchsten Grade dankenswerthen Arbeit augenscheinlich mit dem grössten Fleisse, wahrer Hingebung und besonderer Umsicht gewidmet. Zu dem meisten Danke werden ihm natürlich die preussischen Lehrer der Mathematik und Physik sich verpflichtet halten, aber auch ausserhalb Preussens wird man mit aufrichtiger Anerkennung nähere und genauere Kenntniss nehmen von den Leistungen preussischer höherer Lehranstalten in der Mathematik und Physik, natürlich innerhalb der Gränzen des von der höchsten Unterrichts-Behörde mit weiser Fürsorge für die allseitige geistige Ausbildung der vaterländischen Jugend den höheren Lehranstalten zur Bearbeitung zugewiesenen wissenschaftlichen Feldes, über welche nach unserer vollkommensten Ueberzeugung nur mit Gefährdung wirklichen Erfolges des mathematischen Unterrichts hinausgegangen werden dürfte, weshalb wir uns bekanntlich auch früher schon oft genug gegen jede ganz unberufene und unberechtigte Einmischung der Differentialrechnung u. s. w. in den mathematischen Schulunterricht, wie sie hin und wieder beliebt worden ist, in der bestimmtesten Weise erklärt haben und wiederholt erklären; wer eine solche Einmischung für zweckmässig und erspriesslich

hält, hat von den Anforderungen, welche namentlich die neuere Zeit an die strenge Begründung der genannten höheren Theile der Wissenschaft stellt, keinen Begriff! Diese Dinge liegen ausserhalb der geistigen Sphäre des Schülers eines Gymnasiums oder einer Realschule und sind späteren Studien vorzubehalten. Deshalb hat auch die vorliegende Aufgabensammlung sich ganz in den allein völlig richtigen Gränzen gehalten, die noch weiter hinaus nie gesteckt werden dürfen.

In der Vorrede des in jeder Beziehung zu empfehlenden Buchs sagt der Herr Verfasser: „Das Buch enthält gewissermassen ein Stückchen Geschichte des preussischen Schulwesens; es wird den Standpunkt erkennen lassen, auf welchem sich der mathematische Unterricht an den preussischen Gymnasien und Realschulen um die Mitte des 19ten Jahrhunderts befand". Wir stimmen hiemit vollkommen überein, und sagen dem Herrn Verfasser freudigst Dank und wünschen ihm aufrichtig Glück, dass er die mit patriotischem Eifer und Interesse für das vaterländische Schulwesen unternommene, in vielen Beziehungen schwierige und mühevolle Arbeit in so anerkennungswerther, nach unserer Meinung nichts zu wünschen übrig lassender Weise in ihrer ersten Abtheilung glücklich zu Ende geführt hat. Möge ihm Zeit und Kraft zu Theil werden, die zweite Abtheilung, welche die mit der grössten Mühe von ihm ausgerechneten Resultate enthalten wird, in der nächsten Zeit erscheinen zu lassen, wozu, wie wir zu versichern im Stande sind, die bestimmteste Aussicht vorhanden ist!

Fünfstellige Logarithmentafeln der Zahlen und der trigonometrischen Functionen nebst den Gaussischen Additions- und Subtractionslogarithmen und verschiedene Hülfstafeln. Von Dr. G. J. Hoüel, Professor der reinen Mathematik an der Facultät der Wissenschaften in Bordeaux. Zweite durchgesehene und vermehrte Ausgabe. Paris, Druck und Verlag von Gauthier-Villars. Berlin, Verlag von A. Asher & Co. 1864. 8°.

Tables de Logarithmes a cinq Décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, suivies des logarithmes d'addition et de soustraction ou logarithmes de Gauss, et de diverses tables usuelles. Par J. Hoüel, Ancien Élève de l'École Normale, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. L'introduction de cet ouvrage dans les Écoles publiques est autorisée par décision

du Ministre de l'Instruction publique et des Cultes. Seconde édition, revue et augmentée. Paris. Gauthier-Villars. 1864. 8°.

In der Versammlung deutscher Lehrer der Mathematik, welche im vorigen Jahre in Hannover zusammengetreten war, ist auch die Frage lebhaft discutirt worden: „wie viel stellige Logarithmentafeln für den Gebrauch auf Schulen am meisten zu empfehlen seien". Zu unserer Freude haben sich sehr gewichtige Stimmen für den Gebrauch fünfstelliger Tafeln erhoben, und es dürfte wohl überhaupt die Mehrheit der Versammlung derselben Ansicht gewesen sein, eine Ansicht, die auch wir im Archiv schon mehrmals zur Geltung zu bringen gesucht haben, und von der wir im Interesse des mathematischen Unterrichts auf Schulen lebhaft wünschen, dass sie sich recht bald ganz allgemein Bahn brechen möge.

Im Literar. Ber. Nr. CL. S. 1.—S. 6. haben wir die in allen Beziehungen nach unserer vollkommensten Ueberzeugung ausgezeichneten fünfstelligen Tafeln von Hoüel angezeigt, die in Frankreich und auch in Italien*) wegen ihrer Trefflichkeit bereits grosse Verbreitung gefunden haben. Wie sich erwarten liess, ist von diesem ausgezeichneten, in allen Beziehungen so sehr zu empfehlenden Buche schon jetzt eine zweite, durch das kaiserl. französische Unterrichts- und Cultus-Ministerium für den Gebrauch in den Schulen besonders autorisirte und empfohlene vermehrte Ausgabe erschienen, und zu unserer grössten Freude haben der Herr Verfasser und der Herr Verleger sich veranlasst gesehen, auch eine Ausgabe mit deutscher Einleitung zum Gebrauche auf deutschen Schulen zu veranstalten, welche uns jetzt vorliegt, und von der Verlagsbuchhandlung des Herrn A. Asher & Co. in Berlin auf dem kürzesten und bequemsten Wege zu beziehen ist.

Die Einrichtung dieser trefflichen Tafeln ist im Wesentlichen und in der Hauptsache in dieser zweiten Ausgabe unverändert geblieben. Dieselbe ist in unserer früheren Anzeige a. a. O. von uns schon so ausführlich charakterisirt worden, dass es, um nicht früher Gesagtes zu wiederholen, hier genügen muss, in dieser Beziehung auf jene frühere Anzeige zu verweisen. Wir haben seit jener Anzeige diese Tafeln selbst sehr oft und vielfach gebraucht, und können nur das wiederholen, was wir schon dort sagten: dass diese Tafeln, bei dem jetzigen Stande der Sache, in der ihnen durch die beibehaltene Anzahl von Deci-

*) M. s. Elementi di Algebra, per R. Rubini, seconda edizione. Napoli, 1864. p. 279.

malstellen von selbst vorgeschriebenen Begränzung, das non plus ultra erreichbarer Bequemlichkeit und Genauigkeit leisten. Auf Einzelnes können und dürfen wir aus dem oben angegebenen Grunde hier zwar nicht weiter eingehen, wollen jedoch nicht unterlassen, ganz besonders darauf hinzuweisen, dass u. A. ein hauptsächliches Förderungsmittel der Bequemlichkeit und Genauigkeit in der in allen Beziehungen trefflichen Einrichtung der die Differenzen und Proportionaltheile enthaltenden Spalten zu suchen ist, welche in anderen bekannten Tafeln meistens Vieles zu wünschen übrig und den Rechner oft in Zweifel und Unsicherheit bei der Einführung dieser Zahlen in die Rechnung lassen. Dass auch auf die letzte beibehaltene Stelle von dem Herrn Verfasser die grösste Sorgfalt verwandt worden ist, versteht sich ganz von selbst, und wie ungenau viele andere Tafeln in dieser für die zu erreichende Genauigkeit so ungemein wichtigen Beziehung sind, wird den Lesern gewiss noch aus unserer Anzeige der verdienstlichen Arbeit von Gernerth im Literar. Ber. Nr. CLXI. S. 3. erinnerlich sein. Auch den von einander getrennten Additions- und Subtractions-Logarithmen ist eine sehr bequeme Einrichtung gegeben worden.

In Rücksicht auf die, ausser den eigentlichen Logarithmentafeln, beigegebenen Tafeln zeichnet sich die neue Ausgabe vor der früheren vielfach aus und hat in dieser Beziehung mehrere sehr wesentliche Bereicherungen erhalten. Ganz besonders wollen wir nur in der Kürze die sehr erweiterte, ungemein viel Lehrreiches über den sichern und genauen Gebrauch der Tafeln enthaltende Einleitung und die Sammlung von Formeln und Constanten hervorheben, welche letztere man in den meisten anderen Tafeln schwerlich in derselben Vollständigkeit und Bequemlichkeit antreffen dürfte, wobei aber der Herr Verfasser das für die Schnelligkeit und Bequemlichkeit des Aufschlagens so wichtige Princip: den Umfang der Tafeln möglichst zu beschränken, stets festgehalten und nie aus den Augen verloren hat, woher es kommt, dass dieses so ungemein vieles Nützliche enthaltende Buch doch nur den geringen Raum von XLVI (Einleitung) und 118 (Tafeln) Seiten einnimmt.

Die berühmte Verlagshandlung: Gauthier-Villars, Successeur de Mallet-Bachelier, hat in der neuen Ausgabe für sehr schönes weisses und festes Papier gesorgt, und die Deutlichkeit und Schärfe der Ziffern lassen nichts zu wünschen übrig.

Das kleinere Format mehrerer früheren fünfstelligen Tafeln halten wir durchaus nicht für einen Vorzug; denn je weniger Seiten man hat, desto weniger braucht man zu blättern, und Lo-

garithmentafeln werden nicht in der Tasche, sondern auf dem Tische gebraucht, wesshalb wir auch das diesen Tafeln im Vergleich zu den ältern Lalande'schen Tafeln absichtlich gegebene grössere Format nur vollständig billigen können.

Man bediene sich dieser Tafeln, wie wir, eine längere Zeit selbst, was in solchen Dingen immer eine Hauptsache ist, und wir glauben nicht fehl zu gehen, wenn wir hoffen, dass man uns in allem Obigen beistimmen wird. Uns sind diese trefflichen Tafeln schon seit mehreren Jahren ein steter Begleiter.

Bei einem nach unserer Meinung so sehr empfehlenswerthen Buche geziemt es sich, hier wenigstens den Hauptinhalt nachstehend anzugeben:

Inhalt: Vorrede. Einleitung. I. Tafel der fünfstelligen Logarithmen der Zahlen. II. Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Functionen. III. Tafel der Additions- und Subtractionslogarithmen. IV. Tafel der achtstelligen Logarithmen der Zahlen. V. Abgekürzte Tafel zur Berechnung der Logarithmen oder Logarithmanden mit vielen Decimalstellen. VI. Vier- und Dreistellige Tafeln der Logarithmen und Antilogarithmen. VII. Tafel der kleinsten Divisoren der zusammengesetzten Zahlen. VIII. Zehnstellige Tafel der natürlichen trigonometrischen Functionen und der Längen der Bogen in Theilen des Radius. Die Tafel der Formeln und Constanten mit ihren Logarithmen findet sich S. XXXV — S. XLVI und besteht aus folgenden Haupttheilen: Allgemeine Relationen zwischen den circulären Functionen. Umgekehrte Formeln (nämlich arc $\sin x$, arc $\cos x$, u. s. w.). Reihen. Auflösung der Gleichungen des zweiten und dritten Grades. Differenzen- und Differential-Formeln. Formeln von Maskelyne. Ebene und sphärische Trigonometrie (höchst vollständig, auch Differenzialformeln der Dreiecke, Satz von Legendre, sehr viele unendliche Reihen u. s. w. u. s. w.). Zahlen, von denen häufig Gebrauch gemacht wird, nebst ihren Logarithmen (auch Dimensionen der Erde u. s. w.). Vergleichung verschiedener Maasse und Gewichte mit dem Meter u. s. w. (gleichfalls sehr vollständig, ohne zu weit zu gehen.) Specifische Gewichte fester und tropfbarer Körper.

Wir wiederholen schliesslich — und zwar nach vielfachem eigenen Gebrauch und mit besonderer Rücksicht auf die neue Ausgabe mit noch mehr Zuversicht wie früher — unser früher ausgesprochenes Urtheil, dass diesen Tafeln vor allen bisher erschienenen fünfstelligen Tafeln unbedingt der Vorzug gebührt, und empfehlen dieselben namentlich und ganz besonders auch zum Gebrauch und zur Einführung auf allen höheren Lehranstalten dringend.

# Geometrie.

**Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Mittelschulen von Dr. Rudolf Sonndorfer. Erster Theil. Die Geometrie der Ebene. Mit 190 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Wien. 1865. Wilhelm Braumüller. 8°.**

Dieses Lehrbuch der Geometrie, mit Einschluss der Trigonometrie, ist auf zwei Theile berechnet, von denen der erste hier vorliegt; derselbe enthält die ebene Geometrie, die ebene Trigonometrie und die analytische Geometrie in der Ebene mit Einschluss der Kegelschnitte; der zweite Theil wird die Stereometrie, die sphärische Trigonometrie und die analytische Geometrie des Raumes enthalten.

Zunächst ist dieses für die oberen Klassen der österreichischen Mittelschulen bestimmte Buch für uns deshalb von Interesse gewesen, weil sich, wie es uns geschienen hat, aus demselben, mehr als aus anderen uns sonst zu Gesicht gekommenen derartigen Büchern, mit besonderer Deutlichkeit entnehmen lässt, wie weit und in welchem Umfange der geometrische Theil der elementaren Mathematik auf den genannten Unterrichtsanstalten gelehrt wird. Nach dem vorliegenden ersten Theile ist dieser Umfang nicht bloss ein völlig genügender, sondern darf selbst schwerlich noch mehr erweitert werden, wenn die Gränze des für die Schule zweckmässigen Lehrstoffs nicht überschritten werden soll; im Ganzen entspricht derselbe vollkommen den auch für die preussischen Realschulen erster Ordnung geltenden gesetzlichen Bestimmungen, die sich bei uns als durchaus zweckmässig bewährt haben. Wir freuen uns zu sehen, dass dieselben Grundsätze im Allgemeinen auch in Oesterreich festgehalten werden, und finden in dem Inhalte des vorliegenden Buchs den Beweis für den guten Zustand des mathematischen Unterrichts auf den dortigen höheren Lehranstalten und die weise Fürsorge der vorgesetzten kaiserlichen Unterrichtsbehörden für diesen so wichtigen Zweig des Schulunterrichts.

Dass in einem Lehrbuche wie das vorliegende absolut Neues nicht viel gegeben werden kann, liegt ganz in der Natur der Sache; die Lehren der Elementar-Mathematik sind längst Gemeingut geworden, und es kommt nur darauf an, ob der Verfasser sich einer strengen, deutlichen und einfachen Darstellung und einer guten Anordnung des Lehrstoffs befleissigt hat, bei verständiger Be-

nutzung des vor ihm Geleisteten. Wir können in keiner dieser Beziehungen dem Verfasser unsere Anerkennung versagen, da es hier auf Divergenz der Ansichten in einigen einzelnen Punkten gar nicht ankommen kann. Was zuvörderst die Darstellung im Allgemeinen betrifft, so hat der Herr Verfasser sich nicht der Methode des Euclides, und der griechischen Geometer überhaupt, durch Zerspaltung des abzuhandelnden Stoffs in einzelne Erklärungen, Grundsätze, Forderungen, Lehrsätze, Aufgaben, Zusätze u. s. w. bedient, sondern hat einer mehr genetischen Entwicklung der geometrischen Wahrheiten aus einander, in einfacher Aneinanderreihung derselben, den Vorzug gegeben, einer Methode, die bekanntlich in Deutschland zuerst von Thibaut zur Geltung zu bringen versucht worden ist. Welche von beiden Methoden die beste ist, darüber lässt sich im eigentlichen Sinne nicht rechten, denn es führen hier mehrere Wege in erspriesslicher Weise zum Ziele. Sehr viel kommt hiebei, wie im Lehrfache überhaupt, auf die Individualität des Lehrers an, welche Methode ihm am meisten zusagt und welcher er sich am meisten gewachsen fühlt; dieser soll man ihn folgen lassen, er wird dann auch das Vorzüglichste leisten; und den Lehrern, welchen die letztere der beiden genannten Lehrmethoden am meisten zusagt, glauben wir das vorliegende Buch sehr wohl empfehlen zu dürfen; auch findet ja gegenwärtig diese letztere Methode, wie es scheint, den meisten Beifall.

Um nun Einiges im Einzelnen zu berühren, so möchten wir etwa rücksichtlich der Lehre von den Parallelen bemerken, dass uns hier die ältere Euklidische Methode doch gewisse Vorzüge zu haben scheint. Der Unterzeichnete hat in seinem, ganz nach Euklidischer Methode verfassten, vor mehr als dreissig Jahren zum ersten Male herausgegebenen „Lehrbuche der ebenen Geometrie", wovon kürzlich die fünfte Ausgabe (Brandenburg 1862) erschienen ist *), auf Seite 49 deutlich darzulegen gesucht, worin ihm die bekannte Schwierigkeit bei der Darstellung der Lehre von den Parallelen eigentlich zu liegen scheint, und zugleich hervorgehoben, dass ohne einen dieser Lehre eigenthümlichen **Grundsatz** **) gar nicht auszukommen ist. In dem genannten Buche ist in §. 94. der Satz: Zwei gerade Linien, deren jede einer gewissen dritten parallel ist,

*) Anmerkung des Setzers: eigentlich die neunte, da von jeder Ausgabe, von der zweiten an, doppelt so viel Exemplare wie von der ersten gedruckt worden sind.

**) Bei Euklid das berühmte 11. Axiom des 1sten Buchs.

sind selbst parallel, zum Grunde gelegt und darauf die ganze Lehre von den Parallelen gegründet worden. Es ist daher dem Unterzeichneten erfreulich gewesen, dass von diesem Satze auch unser Herr Verfasser ausgegangen ist, nur hätten wir für besser gehalten, dass dieser Satz auch hier ohne Weiteres als ein Axiom, also als ein eines eigentlichen Beweises gar nicht mehr **fähiger** Satz hingestellt worden wäre. In der Lehre von den Parallelen scheint ferner auch noch deshalb die Euklidische Methode den Vorzug zu verdienen, weil bei Anwendung derselben der Schüler sich am Deutlichsten und Bestimmtesten bewusst wird, dass es hier ganz besonders auf zwei Sätze, von denen der eine die Umkehrung des anderen ist, ankommt, und dass die Schwierigkeit in der Lehre von den Parallelen lediglich oder wenigstens hauptsächlich in dem Beweise des Satzes liegt, welcher die Umkehrung des anderen ist. Vielleicht findet es der Herr Verfasser für angemessen, bei einer neuen Auflage diesen Bemerkungen einige Berücksichtigung zu schenken.

Auf die sogenannte neuere Geometrie ist gebührende Rücksicht genommen, in einer zweckmässigen Ausdehnung, die nach unserer Meinung bei'm Schulunterrichte auch hier durchaus nicht überschritten werden durfte; eben so hat der Herr Verfasser auch die Anwendung der allgemeinen Arithmetik bei der Lösung verschiedener Aufgaben, namentlich bei der Berechnung des Flächeninhalts gezeigt. Historische Bemerkungen sind mehrfach beigefügt.

Die ebene Trigonometrie, in welcher der Herr Verfasser nach der jetzt vielfach gebräuchlichen Methode die Erklärung der goniometrischen Functionen unmittelbar an das rechtwinklige Dreieck angeschlossen hat, scheint mit besonderer Vorliebe, ebenfalls mit völlig ausreichender Ausführlichkeit dargestellt zu sein. Die Anwendung der goniometrischen Functionen zur Auflösung der Gleichungen ist an einer ziemlich grossen Anzahl zweckmässig gewählter Fälle gezeigt und auch die Anwendung der Trigonometrie in der Praxis ist mit Recht nicht unberücksichtigt geblieben. Alle Aufgaben sind durch numerische Beispiele erläutert worden. Vielfach ist uns die Klage zu Ohren gekommen, dass bei dem mathematischen Unterrichte auf Schulen die durch denselben erlangte Fertigkeit und Sicherheit im numerischen Calcul Manches zu wünschen übrig lasse. Uns scheint diese Klage nicht unbegründet, und wenigstens zum Theil suchen wir den Grund dieser mehrfach nicht ganz genügenden Fertigkeit und Sicherheit im numerischen Calcul darin, dass nicht immer bei'm Unterrichte auf eine Kürze und Sicherheit der numerischen Rechnungen verbürgende Anordnung oder Form derselben die ge-

hörige Sorgfalt verwendet wird. In dieser Rücksicht, glauben wir, hat der Herr Verfasser in diesem Buche Vorzügliches geleistet, und dasselbe verdient auch aus diesem Gesichtspunkte zur Beachtung empfohlen zu werden, denn die von ihm gegebenen numerischen Beispiele können in der ihnen gegebenen Form und Anordnung in Wahrheit als Muster dienen. Mancher mehr Geübte wird seine Rechnungen vielleicht noch weiter abzukürzen die Fähigkeit besitzen; für Schüler dürfte aber in diesem Buche das richtige Maass getroffen sein. Vielleicht entschliesst sich der Herr Verfasser künftig noch zur Anwendung nur fünfstelliger Tafeln statt der siebenstelligen.

Auch die eigentliche analytische oder Coordinaten-Geometrie, mit Einschluss der Coordinaten-Verwandlung, ist mit einer der Bestimmung des Buchs entsprechenden Anschaulichkeit und in einem auch hier vollkommen hinreichenden Umfange, der in keiner Weise hätte überschritten werden dürfen, behandelt worden, unter Hinzufügung einer nicht geringen Anzahl analytisch gelöster Aufgaben (namentlich auch über die Berührungen der Kreise), bis einschliesslich zu der Lehre von den Kegelschnitten, auch der Quadratur der Parabel und Ellipse; wenn die Schüler der österreichischen Mittelschulen das ihnen in diesem Theile des mathematischen Schulunterrichts hier Gebotene sich völlig zu eigen machen, so ist für ihre künftige Bestimmung im Leben und namentlich für ihre fernere mathematische Ausbildung, wenn sie in der Mathematik weiter zu gehen beabsichtigen, vollkommen gesorgt. Die äussere Ausstattung des Buches ist vortrefflich und auf's Beste.

Grunert.

---

## Astronomie.

Repertorium der Cometen-Astronomie von Dr. Ph. Carl, Privatdocent an der Universität München. München, Rieger'sche Universitäts-Buchhandlung. 1864. 8°.

In seinem grossen Werke: Cométographie ou Traité historique et théorique des Comètes. Tome Premier. Paris 1783. Tome Second. Paris 1784. 4°. lieferte Pingré nicht nur eine sehr vollständige Geschichte der bis zu der Zeit der Herausgabe dieses immer noch wichtigen Werkes beobachteten und berechneten Cometen, sondern gab auch zugleich im zweiten Theile eine Darstellung der verschiedenen bei der Berechnung der Cometenbahnen angewandten Methoden, die auch gegenwär-

tig noch, wenn man auch jetzt bekanntlich im Besitze weit vollkommenerer Methoden ist, die Pingré noch nicht kannte, von grossem Interesse und historisch wichtig ist. In seiner classischen Abhandlung: Ueber die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen. Weimar 1797. 8°. lieferte hierauf Olbers S. 36.—S. 66. eine sehr werthvolle Cometentafel, die in den neueren Ausgaben dieser Abhandlung von Galle in sehr verdienstlicher Weise vervollkommnet und weiter fortgeführt worden ist. Diese Arbeiten hat nun in der vorliegenden Schrift Herr Dr. Carl in München wieder aufgenommen, aber, was ganz besonders hervorzuheben ist, in der Weise, dass er nicht nur ein solches Cometenverzeichniss, wie die vorher zuletzt genannten, sondern vielmehr eine Cometographie nach ihrem jetzigen Standpunkte, wie Pingré sie für seine Zeit lieferte, zu liefern versucht hat, welches letztere Werk er sich daher für seine Arbeit zum Muster nahm, ohne sich jedoch, was wir nur vollkommen billigen können, wenigstens für jetzt, wie Pingré that, auch auf die Theorie der Berechnung der Cometenbahnen einzulassen, indem er sich also vorläufig auf das Historische beschränkte. Wir haben mit sehr grossem Interesse von dieser Arbeit Kenntniss genommen und können dem ungemein grossen Fleisse und der rühmlichen Sorgfalt, womit der Herr Verfasser auch einen ungemein grossen Schatz von Literatur in diesem Werke aufgespeichert und dem Leser vor die Augen geführt hat, nur unseren vollkommensten Beifall zollen. Der folgende Hauptinhalt wird dem Leser zeigen, wie eifrig der Herr Verfasser sein vorgestecktes Ziel angestrebt hat: I. Die Cometen bis zum Ende des XVI. Jahrhunderts. II. Die Cometen des XVII. Jahrhunderts. III. Die Cometen des XVIII. Jahrhunderts. IV. Die Cometen des XIX. Jahrhunderts. V. Die periodischen Cometen. 1. Die Cometen mit kurzer Umlaufszeit. a) Der Encke'sche Comet. b) Der Biela'sche Comet. c) Der Faye-Möllersche Comet. d) De Vico's Comet. e) Brorsen's Comet. f) D'Arrest's Comet. g) Winnecke's Comet. h) Cometen mit kurzer Umlaufszeit, welche nur bei einer Sonnennähe beobachtet wurden. 2. Cometen mit einer Umlaufszeit von circa 70 Jahren. a) Der Halley'sche Comet. b) Cometen mit einer Umlaufszeit von circa 70 Jahren, welche bloss bei einer einzigen Sonnennähe beobachtet wurden. 3. Cometen mit sehr grosser Umlaufszeit.

Wie wichtig eine solche vollständige Cometographie u. A. schon deshalb ist, um mit möglichster Leichtigkeit erkennen zu können, ob ein erschienener Comet schon früher einmal beobachtet worden ist, was natürlich hauptsächlich nur an der Uebereinstimmung

der Elemente erkannt werden kann, brauchen wir hier natürlich nicht weiter zu entwickeln, und schliessen daher mit dem Wunsche, dass das verdienstliche und fleissige Werk sich recht bald in den Händen aller Astronomen befinden möge!

Der von dem Herrn Verfasser in Aussicht gestellten Fortsetzung, worin er wahrscheinlich auch das Theoretische besonders berücksichtigen wird, sehen wir mit Verlangen entgegen.

Kalender für alle Stände. 1865. Herausgegeben von Karl v. Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Mit einer Sternkarte. Wien. Carl Gerold's Sohn. 8°.

Wir haben diesen Kalender nun schon so oft als eine sehr brauchbare kleine Ephemeride allen Liebhabern der Astronomie empfohlen, dass wir diese Empfehlung, welche das Büchlein gewiss sehr verdient, hier nicht zu wiederholen brauchen, da seine für den genannten Zweck kaum Etwas zu wünschen übrig lassende Einrichtung im Ganzen völlig unverändert geblieben ist. Ausser der eigentlichen Ephemeride ist aber auch der übrige Inhalt stets ein interessanter und lehrreicher, so wie denn der vorliegende Jahrgang auf S. 77. — S. 114. die Fortsetzung der im vorigen Jahrgange angefangenen Abhandlung „über die Sonne" enthält, welche wir, so wie auch diesmal die sehr vollständige Darstellung des Planetensystems nach den neuesten Beobachtungen und Rechnungen, recht sehr zur Beachtung empfehlen. Wir bedauern, dass diese Anzeige durch zufällige Umstände etwas verzögert worden ist.

---

## Vermischte Schriften.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura dei Professori G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi &c. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXVIII. S. 11.)

Anno II. Luglio 1864. Sulle forme binarie de' primi quattro gradi; per G. Battaglini. p. 193. — Nuove ricerche di Geometria pura sulle cubiche gobbe ed ispecie sulla parabola gobba; per L. Cremona. p. 202. — Teorica de' covarianti e degli invarianti; per G. Janni. p. 211. — Dimostrazione della quistione n. 36; per M. Ferrari. p. 224. — Quistione. p. 224.

Anno II. Agosto 1864. Sulla decomposizione delle funzioni fratte razionali; per N. Trudi. p. 225. — Sulle forme binarie de' primi quattro gradi; per G. Battaglini. p. 243. — Sulla notazione abbreviata applicata al teorema di Brianchon; per V. Janni. p. 253. — Soluzione della quistione n. 36; per G. Battaglini. p. 255. — Quistione. p. 256.

Anno II. Settembre 1864. Sulla decomposizione delle funzioni fratte razionali; per N. Trudi. p. 257. — Sopra una proposizione elementare di calcolo integrale; per E. Fergola. p. 264. — Ricerche di analisi applicata alla geometria; per E. Beltrami. p. 267. — Sull' equazione differenziale delle superficie applicabili su di una superficie data; per U. Dini. p. 282.

Anno II. Ottobre 1864. Sopra gli assi permanenti di rotazione di un corpo; per A. Mogni. p. 289. — Intorno ad una memoria del Sig. D. Turazza; per G. Battaglini. p. 295. — Ricerche di analisi applicata alla geometria; per E. Beltrami. p. 297. — Sugl' invarianti ed i covarianti delle forme binarie; per G. Novi. p. 306. — Soluzione della quistione 39; per L. Raiola e G. Torelli. p. 315. — Soluzione delle quistioni 40, 41, 42; per E. d'Ovidio. p. 317. — Soluzione delle quistioni 40, 41, 42; per N. Salvatore Dino. p. 319.

**Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia *), A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXVII. S. 6.).**

**Tom. VI. N°. 2.** Equilibrio di un solido incastrato in un' estremità appogiato nell' altra e carricato di $n$ pesi. Memoria dell' Ingegnere Domenico Cipoletti. p. 49. — Théorie des coordonnées curvilignes quelconques par M^r. L'Abbé Aoust. p. 63. — **Rivista bibliografica.** Equazioni finite ed equazioni differenziali di alcune curve derivate. Articolo del Prof. B. Tortolini. p. 88. — Manière de compter des Anciens avec les doigts des mains et autres parties du corps. (Extrait du Tratado de Mathematicas, por Juan Perez de Moya, Alcala de Henares anno 1573). Par A. Marre. p. 93. — Quaestiones quas Academiae Regiae Scientiarum Borussicae Classis physica et mathematica certamini litterario proponit. p. 95. — Pubblicazioni recenti. p. 96.

**Tom. VI. N°. 3.** Intorno alla rettificazione e alle proprietà

*) Jetzt in Mailand.

delle caustiche secondarie. Studio del Prof. A. Genocchi. p. 97. — Mémoire sur les progressions des divers ordres par le Père J. L. A. Le Cointe de la Compagnie de Jésus. p. 124. — **Rivista bibliografica.** Proprietà di alcune curve algebriche. Articolo del Prof. B. Tortolini. p. 150. — Pubblicazioni recenti. p. 152.

Sitzungsberichte der königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXV. S. 14).

1864. I. Heft III. Necrolog auf Ferdinand v. Schmöger. S. 196.

1864. I. Heft IV. Heft V. 1864. II. Heft I. Diese Hefte enthalten in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze nicht.

1864. II. Heft II. Lamont: 1) Ueber den Einfluss des Mondes auf die Magnetnadel (mit drei lithograph. Tafeln). 2) Ueber die jährliche Periode des Barometers. 3) Ueber die zehnjährige Periode der magnetischen Variationen und der Sonnenflecken. — So wie alle Arbeiten Herrn Lamont's auf diesen Gebieten haben wir auch die vorliegenden Aufsätze mit grossem Interesse gelesen und empfehlen sie unseren Lesern recht sehr zur Beachtung, indem wir gern besonders hervorheben, dass wir namentlich das am Ende des dritten Aufsatzes ausgesprochene Urtheil über den „Standpunkt, welchen jetzt die Untersuchung der Sonnenflecken einnimmt" ganz zu dem unsrigen machen und demselben in allen Beziehungen beistimmen. Dasselbe lautet folgendermassen: „Nimmt man die Tabellen des Herrn Schwabe zur Hand, so drückt sich darin überall das Regelmässigperiodische aus. Ganz anders verhält sich die Sache, wenn man die jährlichen Resultate der Beobachtungen von Staudacher, Zucconi, Flaugergues betrachtet; denn hier treten auch in den Jahren, wo die Beobachtungen zahlreich waren, so auffallende Sprünge hervor, dass man versucht sein könnte, eine gänzliche Aenderung in den Verhältnissen der Sonnenatmosphäre vorauszusetzen, wenn man nicht beachten würde, dass die genannten Beobachter weder eine bestimmte Methode im Auge hatten, noch eines bestimmten Zweckes sich bewusst waren, noch hinreichende optische Hilfsmittel besassen. Erst wenn die nächsten zwei Decennien die vorhandenen Grundlagen befestiget und erweitert haben werden, wenn über die mögliche Grösse der Aenderungen auf der uns zugewendeten und abgewendeten Seite der Sonne Näheres constatirt ist, und Anhaltspunkte für eine

Kritik der älteren Beobachtungen gewonnen sind, mag eine umsichtige Benützung derselben für die Theorie von einigem Vortheil sich erweisen, wogegen die **unmittelbare Vereinigung des alten und neuen Materials ohne alle Kritik nur zu haltlosen Zahlenbestimmungen führen kann.**" — Wer sich jetzt solchen Beobachtungen widmet, sollte auch nach unserer Meinung sich immer vorhalten, dass er zunächst nur für die Folgezeit, vielleicht für eine sehr späte, arbeitet, und dass er eben deshalb sich auch nur der stärksten und kräftigsten Beobachtungsmittel, wie sie die gegenwärtige Zeit nur irgend zu liefern im Stande ist, bedienen dürfe. Aber freilich möchte jetzt Jeder immer gern gleich ein Newton werden und bedenkt nicht, dass Newton einen Kepler zum Vorgänger hatte!

1864. II. Heft III. Schönlein: Weitere Beiträge zur Kenntniss des Sauerstoffs. S. 249.

# Literarischer Bericht

## CLXXI.

## Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Vierzehnter Jahrgang. 1864.

Der dreizehnte Jahrgang dieses immer vieles Interessante enthaltenden Almanachs einer der ersten Akademieen der Wissenschaften, den wir schon öfters als einen wichtigen Beitrag zur Literatur der Mathematik und Physik bezeichnet haben, ist im Literar. Ber. Nr. CLXVII. S. 2. angezeigt worden. Der vorliegende vierzehnte Jahrgang enthält zuvörderst im Anhange S. 7. — S. 30. die Rede des hochverdienten Präsidenten der Akademie, des Herrn Freiherrn v. Baumgartner, über „Die mechanische Theorie der Wärme", welche wir, ihres sehr grossen Interesses und ihrer gerade bei diesem Gegenstande so wichtigen ungemeinen Deutlichkeit, Klarheit und Bestimmtheit wegen, unseren Lesern schon im Archiv. Thl. XLII. Nr. XXII. S. 211. vollständig mitgetheilt haben, so dass wir über dieselbe jetzt nichts weiter zu sagen brauchen. Ausserdem enthält derselbe im Anhange S. 163.—S. 170. eine Lebensskizze des verdienten Astronomen Max Weisse in Krakau, dessen Tod schon im Literar. Berichte Nr. CLXII. S. 1. vorläufig angezeigt worden ist; wir werden diese von dem Verstorbenen selbst verfasste Lebensskizze vollständig mittheilen, sobald uns der uns jetzt fehlende Raum dazu zu Gebote steht, und bemerken daher für jetzt nur, dass Weisse am 16. October 1798 in Ladendorf in Oesterreich geboren war und am 10. October 1863*) in Krakau in Folge einer langwierigen

*) Im Literar. Ber. Nr. CLXII. S. 1. ist nach der uns damals zugekommenen Nachricht, wahrscheinlich irrthümlich, der 12. October 1863 als Todestag angegeben.

Entartung der Unterleibsorgane starb; ein verdienstliches vollständiges Verzeichniss seiner Schriften ist Seite 170.—Seite 172. mitgetheilt. Ausserdem enthält der vorliegende Jahrgang noch Lebensskizzen von F. X. M. Zippe, J. Russegger, E. Mitscherlich und Heinrich Rose, die beiden ersten Mineralogen, die beiden letzten Chemiker. Die Lebensskizze von Russegger ist sehr ausführlich (S. 108.—S. 163.) und bietet des Interessanten Vieles dar, namentlich auch über die vielen Reisen des ausgezeichneten Mannes. Der Bericht des General-Secretärs und Secretärs der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse, des Herrn Professor A. Schrötter, über die Arbeiten der Akademie, liefert wieder ein höchst anziehendes und erfreuliches Bild von der so ausgebreiteten und verdienstlichen Wirksamkeit dieser berühmten Körperschaft.

Rivista Italiana di scienze, lettere ed arti colle effemeridi della pubblica istructione. Anno sesto. N. 237. 10 aprile 1865. N. 238. 17 aprile 1865. 4°.

In den beiden vorher genannten Nummern der für das gesammte Unterrichtswesen des Königreichs Italien, namentlich auch in amtlicher Rücksicht, wichtigen und für Jeden, der an der Entwickelung des neuen Italiens lebhaften Antheil nimmt, sehr interessanten „Rivista Italiana" findet sich ein sehr lesenswerther längerer Aufsatz des Herrn Professor Cremona in Bologna unter der Ueberschrift: Sulla storia della prospettiva antica e moderna. Wir müssen einen Jeden, der sich für die Geschichte der Perspective interessirt, auf diesen ausführlichen und eingehenden Aufsatz um so mehr dringend aufmerksam machen, weil die Zeitschrift, in welcher derselbe abgedruckt ist, wohl namentlich in Deutschland wenig bekannt sein dürfte, und deshalb die genannte sehr verdienstliche Arbeit sich leicht der so sehr verdienten Beachtung entziehen könnte. Wenn auch dieser Aufsatz sich zunächst an das auch von uns im Literar. Ber. Nr. CLXX. Seite 4. bereits angezeigte verdienstliche Werk des Herrn Poudra (Histoire de la Perspective etc.) anschliesst, so ist er doch als eine durchaus selbstständige Arbeit zu betrachten und liefert in der That eine kurze wirkliche Geschichte der Perspective, wogegen das Werk des Herrn Poudra — wie auch von uns a. a. O. hervorzuheben nicht unterlassen worden ist — mehr eine, natürlich in ihrer Weise höchst verdienstliche und anerkennungswerthe, sehr eingehende Charakterisirung einer grossen Anzahl von zum Theil weniger bekannten und schwer zugänglichen Werken über die Perspective liefert. Dieses verdienstliche Werk ent-

hält daher durch die Arbeit des Herrn Cremona eine sehr wesentliche Vervollständigung, so dass wir unsere Leser — ja selbst auch alle Künstler — nur wiederholt auf dieselbe recht sehr aufmerksam zu machen für unsere Pflicht halten.

---

## Arithmetik.

**Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Abiturienten-Prüfungen preussischer Gymnasien und Realschulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Resultate zu einem Uebungsbuche vereint von H. C. E. Martus, Oberlehrer an der Königstädtischen Realschule in Berlin. II. Resultate. Greifswald 1865. C. A. Koch's Verlags-Buchhandlung. 8°.**

Als wir in der vorigen Nummer unserer Literarischen Berichte am Schluss der Anzeige des ersten, die Aufgaben enthaltenden Theils dieser trefflichen Aufgaben-Sammlung die Hoffnung aussprachen, dass der zweite, die Resultate enthaltende Theil in der nächsten Zeit erscheinen würde, konnten wir doch kaum glauben, dass wir schon in dieser Nummer das grosse Vergnügen haben würden, das wirkliche Erscheinen dieses zweiten Theils zur Anzeige zu bringen. So liegt denn nun aber dieses ausgezeichnete, gewiss dem mathematischen Unterrichte grossen Nutzen bringende Buch vollständig vor uns. Dass durch die vollständige Beifügung der Resultate dem Lehrer und dem selbst arbeitenden Schüler nur erst der volle Nutzen gebracht werden könne, ist uns nie zweifelhaft gewesen, und wir glauben, dass dem Herrn Verfasser der grösste Dank gebührt, sich der grossen Mühe der vollständigen Ausarbeitung der Resultate unterzogen zu haben, wozu wahrlich grosse Ausdauer und der anhaltendste Fleiss gehörte. Zugleich hat er aber auch, wie der vorliegende zweite Theil deutlich zeigt, diese schwierige und mühevolle Arbeit mit sehr grossem Geschick und sehr grosser Sorgfalt, namentlich auch rücksichtlich der numerischen Rechnungen, die immer bis zu einer mehr als ausreichenden Anzahl von Decimalen fortgeführt sind, zu Stande gebracht; dabei sind auch hin und wieder, wo es sich als nothwendig herausstellte, in beigefügten Anmerkungen Fingerzeige zur richtigen oder veränderten Auffassung u. s. w. der betreffenden Aufgaben gegeben, so dass hiernach, wie jede Seite zeigt, der Herr Verfasser sich seiner Arbeit mit der grössten Liebe und — wie man rücksichtlich der Entstehung dieses Buchs

mit Recht sagen kann — mit, die wärmste Anerkennung verdienendem, wahrhaft patriotischem Eifer gewidmet hat. Da wir schon bei der Anzeige des ersten Theils den Inhalt in ziemlicher Vollständigkeit angegeben haben und dieser zweite sich jenem natürlich genau anschliesst, so brauchen wir hier, auf unsere frühere Anzeige verweisend, über den Inhalt nichts weiter zu sagen.

So liegt denn nun hier ein, namentlich auch wegen der Neuheit seiner Aufgaben gewiss sehr nützliches und sehr zu empfehlendes Buch vor uns, welches zugleich — wie wir schon früher sagten — ein gutes Theil Geschichte des mathematischen Unterrichts auf den preussischen höheren Lehranstalten liefert, und den für einen Jeden, der an diesem Unterrichte lebhaften Theil nimmt, im höchsten Grade erfreulichen Beweis liefert von der grossen Aufmerksamkeit und Sorgfalt, welche von den hohen und höheren preussischen Unterrichtsbehörden dem Gedeihen dieses wichtigen Unterrichts von jeher gewidmet worden ist, auch jetzt fortwährend gewidmet wird und immer gewidmet werden wird, wie auch die Zeitverhältnisse sich noch gestalten mögen; aber auch dem Eifer, dem Geschick und der Umsicht, mit welchem die preussischen mathematischen Lehrer sich dem vertrauensvoll in ihre Hände gelegten Unterrichte gewidmet haben, wird Niemand seine wärmste Anerkennung versagen, der das vorliegende ausgezeichnete Buch mit unbefangenem Blick in die Hand nimmt und mit wahrer Kenntniss dessen, was durch den mathematischen Schulunterricht — der gewisse, sehr bestimmt bezeichnete, auch in diesem Buche sehr richtig festgehaltene Gränzen nach unserer schon oft ausgesprochenen Ansicht nie überschreiten darf — erstrebt und erreicht werden soll, einer sorgfältigen Prüfung unterwirft.

Zum Schluss dieser Anzeige möchten wir noch den Wunsch aussprechen, dass man auch in anderen Ländern, wo regelmässige Abiturienten-Prüfungen schon seit längerer Zeit eingeführt sind, mit ähnlichen Sammlungen wie die vorliegende hervortreten möchte, deren Nutzen von jetzt an, wo mit der vorliegenden ein so guter Anfang gemacht worden ist, gewiss von keiner Seite in Abrede gestellt werden wird.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Zum Gebrauche in Ober-Realschulen und Gymnasien überhaupt und für jeden Mathematik-Beflissenen insbesondere. Bearbeitet von Dr. Johann Rogner, Professor der Mathematik in Graz. Zweite, durchaus umgearbeitete und bedeutend vermehrte Auflage. Wien. Gerold. 1865. 8°.

Diese in zweiter Auflage uns vorliegende Aufgaben-Sammlung, welche schon in ihrer ersten Auflage von dem k. k. Unterrichts-Ministerium für den Gebrauch auf den kaiserl. österreichischen höheren Lehranstalten approbirt worden ist, enthält einen sehr reichen Schatz von Aufgaben, sowohl für die allgemeine Arithmetik und Algebra, als auch für die besondere oder sogenannte gemeine Arithmetik, so wie sich denn der Herr Verfasser bekanntlich überhaupt durch Herausgabe mehrerer Aufgaben-Sammlungen für die verschiedenen Theile der Mathematik, auch für die höhere Analysis, bereits mehrfach sehr verdient gemacht hat. Die vorliegende Sammlung besteht aus drei Haupt-Abtheilungen. Die erste Abtheilung: Allgemeine Arithmetik, Algebra, enthält 3143 Aufgaben; die zweite Abtheilung: besondere Arithmetik, reine und angewandte, 608 Aufgaben; die dritte Abtheilung liefert die Resultate, die aber in zweckmässiger Weise bei den leichteren Aufgaben zum Theil ganz weggelassen worden sind, wogegen wiederum bei schwierigeren Aufgaben der Herr Verfasser besondere Andeutungen zu den Lösungen zu geben nicht unterlassen hat. Es ist hier dem Lehrer jedenfalls ein sehr reicher Schatz der verschiedenartigsten Aufgaben geboten, welche alle Theile der sogenannten niederen Arithmetik umfassen, und auch schwierigere Theile, die sonst gewöhnlich unberücksichtigt bleiben, wie z. B. die Determinanten, der polynomische Lehrsatz neben dem binomischen, vieles auch entfernter Liegendes über die Kettenbrüche u. s. w. sind in den Kreis der mitgetheilten Aufgaben gezogen worden, so wie denn auch in der Lehre von den Gleichungen bis zu den Gleichungen des vierten Grades gegangen worden und die Lösung höherer numerischer und transcendenter Gleichungen nicht unberücksichtigt geblieben ist. Besonders reich bedacht scheint uns die allgemeine Arithmetik zu sein, wo, was wir nicht nur vollkommen billigen, sondern auch ganz besonders anerkennen, der Transformation analytischer Ausdrücke, auch complicirterer, ganz besondere Aufmerksamkeit gewidmet worden ist; diese zu transformirenden Ausdrücke hat der Herr Verfasser theilweise mit sehr grosser Sachkenntniss und dem grössten Fleisse aus den Schriften neuerer Mathematiker über die verschiedenartigsten Gegenstände entlehnt, wodurch allen Lehrern, und dem mathematischen Unterrichte überhaupt, ein sehr grosser Dienst geleistet wird, weil wir gerade solche Transformationen für eins der geeignetsten, wirksamsten und besten Mittel halten, dem Schüler die so nothwendige Uebung im algebraischen Calcul zu verschaffen. Viele Aufgaben, namentlich unter den algebraischen, haben auch eine, mit Rücksicht auf den Unterricht in der Physik, lehrreiche physikalische Einkleidung

erhalten, andere sind an historische Facta angeschlossen worden u. s. w., was Alles das Interesse des Schülers an dem oft trockenen Gegenstande zu erhöhen und zu beleben geeignet ist. Aus allen diesen Gründen glauben wir, dass das vorliegende Buch für alle Lehrer der Mathematik die beste Empfehlung recht sehr verdient und dass demselben die allgemeinste und sorgfältigste Beachtung bei'm mathematischen Unterrichte in jeder Beziehung sehr zu wünschen ist. Der uns hier zu Gebote stehende Raum gestattet bei dem sehr grossen Reichthum des Inhalts eine vollständige Angabe desselben leider nicht, weshalb wir uns begnügen müssen, noch etwas ausführlicher, als schon oben geschehen, diejenigen Partieen hervorzuheben, welche nicht zu den elementarsten gehören und hier eine sehr eingehende Berücksichtigung gefunden haben. Wir rechnen dahin die folgenden: Kettenbrüche. Eigenschaften der Kettenbrüche und Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Kettenbrüche und umgekehrt. S. 84.—S. 88. — Imaginäre Wurzelgrössen (laterale Zahlen). S. 114.—S. 117. — Ueber das Ausziehen von höheren als dritten Wurzeln. S. 123.—S. 124. — Sehr viele, keineswegs leichte, vermischte Aufgaben über Wurzelgrössen. S. 124.—S. 130. — Berechnung der Logarithmen u. s. w. S. 133.—S. 137. — Gauss'sche Logarithmen. S. 137. — Determinanten. S. 160.—S. 161. — Binomischer Lehrsatz, auch vieles, selbst tiefer und entfernter Liegendes aus der allgemeinen Theorie der Binomial-Coefficienten. S. 162.—S. 166. — Polynomischer Lehrsatz. S. 166.—S. 167. — Diophantische Gleichungen des ersten Grades. S. 269.—S. 273. —, Diophantische Gleichungen des zweiten Grades. S. 274.—S. 276. — Cubische Gleichungen. S. 276. —S. 281. — Biquadratische Gleichungen. S. 281.—S. 284. — Regula falsi und transcendente Gleichungen. S. 284.—S. 285. — Höhere arithmetische Reihen. S. 304.—S. 306. — Wahrscheinlichkeits-Rechnung. (Vorbegriffe. Einfache Wahrscheinlichkeit. Relative Wahrscheinlichkeit. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. Mathematische Erwartung und Regeln bei'm Spielen und Wetten. Auch Vieles über Sterblichkeit und was dahin gehört.) S. 307.—S. 316. — Ganz eben so reichlich, wie hiernach die allgemeine Arithmetik und Algebra, ist die sogenannte gemeine Arithmetik in ihren reinen und angewandten Theilen bedacht. Diese höheren Orts für den Gebrauch auf den höheren österreichischen Lehranstalten besonders approbirte Sammlung liefert zugleich von Neuem den erfreulichsten Beweis von dem Umfange und der Gründlichkeit, womit auf diesen Lehranstalten der mathematische und verwandte Unterricht ertheilt wird.

## Auszug aus einem Schreiben des Herrn Professor Hoüel an den Herausgeber.

Bordeaux 29 avril 1865.

„Vous apprendrez sans doute avec plaisir que MM. Vieweg ont entepris de faire paraître une édition française des belles tables de Schrön, et par l'intermédiaire d'un de mes amis, M. Verdet, professeur à la Faculté de Paris, j'ai été chargé de préparer cette édition. J'ai dû y faire une Introduction, pour remplacer celle de l'auteur, que le public français n'aurait guère la patience de lire. — Je doute que la patience allemande aille elle-même jusque là. — La rédaction de cette Introduction, où j'ai dû expliquer avec quelques développements ce que les Tables de Schrön ont de particulier sous le rapport de la précision qu'elles fournissent, cette rédaction m'a coûté assez de travail. Je ne sais si j'aurais réussi à être clair sans être trop long.

J'ai profité de l'occasion pour obtenir de MM. Vieweg deux petites améliorations, qui augmenteront beaucoup, je crois, la commodité de ces tables. Dans la Table I, on répétera au bas de chaque ensemble de deux pages en regard les valeurs des nombres

$$e,\ \log e = M,\ \log M,$$
$$\pi,\ \log \pi,\ R'' = 206\,264'',81,\ \log R''.$$

Dans la Table II, on inscrira en haut et en bas de chaque page les nombres de degrés (sans minutes) en caractères très-apparents. Voilà ce que j'ai obtenu en faveur de la France; j'espère que l'Allemagne en profitera aussi à son tour.

Mon autre grande tâche est l'impression de mes Tables complémentaires à quatre décimales, dont je vous ai déjà parlé plusieurs fois, et qui me coûteront beaucoup de travail; car il y a beaucoup de parties pour lesquelles je n'ai pas de modèle à suivre."

Ich habe über vorstehende Nachricht, dass von den Schrönschen Tafeln eine französische Ausgabe erscheinen soll, mich sehr gefreut, und wünsche sehr, dass von den zu erwartenden vierstelligen Tafeln des Herrn Professor Hoüel, so bald sie erschienen, eine deutsche Ausgabe veranstaltet werden möge, so wie dies mit den fünfstelligen Tafeln desselben Herrn Verfassers, die wegen der von ihnen gewährten Leichtigkeit und sehr grossen Genauigkeit der Rechnungen nicht oft genug dringend empfohlen werden können, bereits geschehen ist. Grunert.

**Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen. Von K. H. Schellbach, Professor**

erhalten, andere sind an historische Facta an[illegible]ilhelms-Gym[illegible] u. s. w., was Alles das Interesse des Schü[illegible]-ademie zu Ber[illegible]
nen Gegenstande zu erhöhen und zu b[illegible]
allen diesen Gründen glauben wir, d[illegible] Werke ein Lehrbuch der
alle Lehrer der Mathematik die [illegible]iefert, welches wir einem
verdient und dass demselben die [illegible]n Lehre nach ihrem neueren
Beachtung bei'm mathematische[illegible] Inhalte bekannt machen will,
sehr zu wünschen ist. Der [illegible] in jeder Beziehung empfehlen
gestattet bei dem sehr gros[illegible] ist mit demselben durch einzelne
ständige Angabe desselbe[illegible]annt gemacht zu haben glauben *).
gen müssen, noch etwas [illegible]berall sehr deutliche, geordnete und
diejenigen Partieen he[illegible] die mit grosser Umsicht den Lehrling
tarsten gehören und [illegible]norauf es vorzüglich ankommt, und ihn
gefunden haben. V[illegible] der wichtigen Theorie zu befähigen sucht.
Eigenschaften de[illegible] Werk auch manches Neue, was theils
Brüche in Kett[illegible] eigenthümlich ist, theils von anderen Mathe-
näre Wurzelg[illegible]ie z. B. die neue Methode, ein elliptisches
das Ausziel[illegible] kanonische Form zu bringen im 13ten Ab
— Sehr vi[illegible] Abtheilung, welche der Herr Verfasser ganz
zelgrösse[illegible] Weierstrass in Berlin verdankt. Unsere lite-
S. 133.-[illegible] können, wie schon oft bemerkt worden ist, in
minan[illegible] Kürze sich auf viele Einzelnheiten nicht einlassen.
selbs[illegible] sich nothwendig auf allgemeine Angaben be-
rie[illegible] Sollten wir nun hervorheben, welches nach unserer
Le[illegible] Eigenthümlichkeiten sind, durch welche dieses jeden-
G[illegible]ezeichnete und zu empfehlende Buch sich von an-
t[illegible] unterscheidet, so möchten wir besonders hervor-
[illegible] ersten[illegible] die sehr eingehende Darstellung der Theorie und
[illegible] der Theta-Functionen, natürlich mit besonderer Rück-
[illegible] die Verbindung, in welcher dieselben mit der Entwicke-
[illegible] Producte von der Form

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\ldots$$

[illegible] und auf ihren vielfachen Gebrauch in der Theorie ellipti
[illegible] Integrale; so wie zweitens im zweiten Abschnitte die
[illegible] ausgedehnten sehr lehrreichen Anwendungen, zu denen
die im ersten Abschnitte entwickelte allgemeine Theorie Gelegen-
heit geben kann. Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen wird
der Leser durch die nachfolgende vollständige Inhaltsangabe des
Werkes am besten einen deutlichen Begriff von der Anlage, Ein-
richtung und dem Umfange des ganzen Werkes erhalten

*) Wodurch auch dies Anzeige etwas verspätet worden ist.

**Erste Abtheilung.** Die Theorie. I. Begriff der elliptischen Integrale. Ihre Reduction auf die Normalform (wobei wir bemerken, dass unter der Normalform (S. 14.) in der allgemein bekannten Darstellungsweise von Legendre die drei Integrale

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},\quad \int \partial\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2},\quad \int \frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

verstanden werden, woraus dann auch von selbst die bekannten drei Arten oder Gattungen der elliptischen Integrale hervorgehen). — II. Die Bildungsweise der Theta-Functionen. — III. Bildung doppelt periodischer Functionen aus den Theta-Functionen. — IV. Ueber die Berechnungsweise des numerischen Werthes eines elliptischen Integrals erster Gattung. — V. Zweite Entwickelungsmethode der Grundformeln der Theta-Functionen. — VI. Reihen-Entwickelungen. — VII. Darstellung von $a+bi$ durch die Functionen $f, g, h$*). — VIII. Ueber die Haupteigenschaften der elliptischen Integrale der drei verschiedenen Gattungen. Die Additionstheoreme. — IX. Von den elliptischen Integralen zweiter Gattung. — X. Von den elliptischen Integralen dritter Gattung. — XI. Reduction einiger speciellen Integrale auf elliptische. — XII. Zurückführung einiger Integrale von scheinbar allgemeineren Formen auf elliptische. — XIII. Neue Methode, ein elliptisches Differential auf die kanonische Form zu bringen. — XIV. Die Stirling'sche Interpolationsreihe.

**Zweite Abtheilung.** Die Anwendungen. I. Die Oberfläche des Ellipsoids. — II. Die Oberfläche des schiefen Kegels. — III. Die geodätische Linie. — IV. Das sphärische Pendel. — V. Ueber die Drehung eines festen Körpers um einen festen Punkt.

Jedenfalls hat sich der Herr Verfasser dieses ausgezeichneten Werkes ein sehr anerkennungswerthes Verdienst um den höheren mathematischen Unterricht, namentlich um den in der Integralrechnung, erworben, und wir wünschen daher sehr, dasselbe in den Händen recht vieler Leser, namentlich auch jüngerer Studirender, zu sehen.

---

*) Welches die von Jacobi mit

$$\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\left(\frac{2K}{\pi}x\right),\quad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\mathrm{am}\left(\frac{2K}{\pi}x\right),\quad \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\mathrm{am}\left(\frac{2K}{\pi}x\right)$$

bezeichneten Functionen sind.

## Geodäsie und Astronomie.

**Beiträge zur Theorie der Röhren-Libelle. Von Dr. Marian Koller, k. k. Ministerialrathe etc. etc. in Wien. (Separatabdruck aus den Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. III. Bd. 1864.)**

Die Libelle ist in der Geodäsie und Astronomie gegenwärtig zu einem ausserordentlich feinen winkelmessenden Instrumente geworden, wird aber diesen Zweck nie erfüllen, wenn sie nicht vor ihrem Gebrauche mit der grössten Sorgfalt und Genauigkeit vollkommen rectificirt worden ist. Dazu ist es natürlich nöthig, alle möglichen Fehler derselben genau zu kennen, was nur mittelst einer sorgfältigen Theorie des ganzen Instruments möglich gemacht wird, welche letztere dann auch die praktischen Hülfsmittel zur Wegschaffung dieser Fehler an die Hand geben, und, diese vorausgesetzt, dann auch von selbst zu den besten und genauesten Methoden führen wird, die Libelle als Instrument zur Messung sehr kleiner Neigungswinkel gegebener Geraden gegen den Horizont zu benutzen. Je weniger Sorgfalt der Entwickelung einer solchen Theorie in vielen Lehrbüchern gewidmet wird, desto verdienstlicher ist die vorliegende Schrift, in welcher eine Theorie der Libelle in grösster Allgemeinheit geliefert worden ist, hier sehr zweckmässig auf die von der analytischen oder Coordinaten-Geometrie und insbesondere auch der Lehre von der Coordinaten-Verwandlung dargebotenen kräftigen Hülfsmittel gegründet, wobei jedoch der Herr Verfasser nicht unterlassen hat, zu den auf diesem Wege erhaltenen Resultaten in §. 5. auch mittelst der sphärischen Trigonometrie zu gelangen. Wie allgemein derselbe seine Aufgabe gefasst hat, geht, um, bei der uns hier dringend gebotenen Kürze, nur einen Punkt specieller zu berühren, u. A. daraus hervor, dass er — was öfters gar nicht geschieht — auch die Fehler einer sorgfältigen analytischen Betrachtung unterzogen hat, welche daraus entspringen, wenn die Libellenaxe mit der Geraden, auf welche sie zur Bestimmung des Neigungswinkels dieser letzteren gestellt worden ist, nicht in derselben Vertikalebene liegt, wobei aus der entwickelten Theorie zugleich auf S. 9. in lehrreicher Weise einfache praktische Regeln zur Beseitigung des genannten Fehlers, welche jederzeit nothwendig ist, wenn der fernere Gebrauch des Instruments zur Bestimmung der Neigungen und zur Horizontalstellung ein möglichst leichter und sicherer sein soll, abgeleitet worden sind. Diese Methoden und Regeln zur Bestimmung der Neigungswinkel und zur Horizontalstellung (nach sorgfältiger Beseitigung des vorher hervorgeho-

benen Fehlers) sind aber auf S. 10.—S. 15. mit so grosser Sorgfalt und Deutlichkeit gelehrt und erörtert worden, wie dies kaum anderwärts schon geschehen sein dürfte. Wir betrachten diese Schrift daher als ein höchst lehrreiches Muster, wie die Theorie eines so feinen Instruments, wie die Libelle ist, behandelt und entwickelt werden muss, und können dieselbe daher allen Astronomen und Geodäten nur dringend zur sorgfältigsten Beachtung empfehlen.

Ueber das Passage-Instrument. Von Dr. Marian Koller, k. k. Ministerialrathe etc. etc. in Wien. (Separatabdruck aus dem 1sten Jahreshefte des naturforschenden Vereins in Brünn.) Brünn. 1863.

In der praktischen Astronomie findet das Passage-Instrument hauptsächlich in zwei Lagen, nämlich im Meridian und im ersten Vertikale, seine Anwendung, und in beiden Lagen handelt es sich vorzugsweise um die Ausmittelung der Relation zwischen dem beobachteten Stundenwinkel eines Sterns am Mittelfaden und dem Stundenwinkel desselben Sterns in der optischen Axe des Fernrohrs, wenn man sich das Instrument als vollkommen rectificirt und fehlerfrei aufgestellt denkt. In der vorliegenden Schrift hat nun der Herr Verfasser diese Aufgabe ganz allgemein gefasst, indem er das Instrument in jedem beliebigen Azimuth aufgestellt annimmt und seine Fehler in einer sehr gründlichen und eingehenden Weise nur mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie, und natürlich der Differentialrechnung, wie dies bei solchen Fehlerbestimmungen ohne grosse Weitläufigkeit nie anders geschehen kann, in der in Rede stehenden Allgemeinheit untersucht. An die Resultate der allgemeinen Theorie werden dann die beiden oben erwähnten besonderen Fälle angeschlossen, und die diese betreffenden Formeln aus jenen allgemeineren Formeln mit Leichtigkeit abgeleitet, wobei der Herr Verfasser durch Anwendung geeigneter Näherungen zugleich überall die Bedürfnisse der Praxis in zweckmässigster, von grosser Kenntniss dieser Bedürfnisse zeugender Weise berücksichtigt hat; auch sind bei allen Aufgaben alle Fälle, die möglicher Weise eintreten können, sorgfältig discutirt, was so oft vernachlässigt, von uns aber, nach unseren bekannten Ansichten über Dinge dieser Art, immer als ein besonderer Vorzug solcher Untersuchungen betrachtet und daher hier auch besonders hervorgehoben wird. Die ganze Darstellung ist mit der grössten Deutlichkeit und Klarheit gehalten, überall an sehr sorgfältig gezeichnete Figuren in anschaulichster Weise angeschlossen, und eine dem Herrn Verfasser so eigenthümliche,

dass wir einen Jeden, der sich für diese Dinge interessirt, auf diese in allen Beziehungen sehr lehrreiche Schrift aufmerksam machen müssen, wobei zugleich dem naturforschenden Vereine in Brünn der wärmste Dank für die Veröffentlichung so instructiver Arbeiten wie diese und die vorher angezeigte*) ausgesprochen werden muss.

Le Scoperte spettroscopiche in ordine alla ricerca della natura de corpi celesti. Discorso letto alla Pontificia Accademia Tiberina il di 6. Marzo 1865. Dal P. A. Secchi d. C. d. G. Roma 1865. 8°.

Der berühmte Verfasser dieser in der „Pontificia Accademia Tiberina" in Rom gehaltenen Vorlesung, welcher bekanntlich namentlich in allen optisch-astronomischen Dingen als eine der ersten Autoritäten zu betrachten ist, hat in derselben die herrlichen Aussichten, welche durch die Spektroscopie namentlich auch der Astronomie eröffnet werden, in einer so eingehenden und lehrreichen Weise, zugleich aber auch in einer so herrlichen und blühenden Sprache besprochen und erörtert, dass ein Jeder, der sich für diese Dinge interessirt, es uns gewiss Dank wissen wird, hier auf diese Schrift aufmerksam gemacht und hingewiesen zu haben.

---

## Nautik.

Almanach der österreichischen Kriegs-Marine für das Jahr 1865. Herausgegeben von der hydrographischen Anstalt der k. k. Marine. Vierter Jahrgang. Wien. Gerold. 8°.

Der dritte Jahrgang dieses von dem Umfange und der Entwickelung der österreichischen Kriegs-Marine stets und immer von Neuem ein sehr interessantes Bild liefernden Almanachs ist im Literar. Ber. Nr. CLXIII. S. 14. angezeigt worden. Ausser dem gewöhnlichen Inhalte (Kalender und nautische Ephemeride 1865, höchst vollständige Genealogie des regierenden Kaiserhauses, k. k. Marine-Ministerium, Personalstand der k. k. Kriegs-Marine) enthält wie seine Vorgänger auch dieser Jahrgang wieder meh-

*) So wie auch der nachher unter Physik angezeigten Schrift über den August'schen Heliostaten

rere sehr zu beachtende wissenschaftliche nautische Aufsätze. Zuerst machen wir aufmerksam auf den Aufsatz des schon so vielfach verdienten Directors der hydrographischen Anstalt in Triest, des Herrn Professor Dr. Schaub: Ueber die Aenderungen der Deviation des Compasses, welche durch eine Aenderung der geographischen Position und durch eine Seitenneigung des Schiffes verursacht werden können, wobei wir bei dieser Gelegenheit nicht unterlassen wollen, alle Nautiker an das schöne, im Literar. Ber. Nr. CLXVIII. angezeigte ausführliche Werk desselben Herr Verfassers „Ueber die Deviationen des Compasses" zu erinnern und wiederholt auf dasselbe aufmerksam zu machen. Von grossem Interesse sind ferner im Almanach S. 37—S. 66. und S. 80—S. 93. die beiden Aufsätze: „Schiffscapitain M. J. Bourgois': Réfutation du système des vents de M. Maury. Von Emil Stahlberger" und „Graphische Lösungen einiger Aufgaben aus der Küstenschifffahrt. Von Dr. Paugger." Was den ersten dieser beiden Aufsätze betrifft, so sah sich der französische Schiffscapitän Bourgois, der namentlich während der chinesischen Campagne sehr häufig Gelegenheit hatte, sich von der Nichtübereinstimmung der Windverhältnisse mit der Maury'schen Hypothese zu überzeugen, und der z. B. 12 Mal jene Zone, in welche Maury permanente Calmen gelegt, passirte, daselbst aber nicht selten Winde antraf, die seinem Schiffe eine Geschwindigkeit von 10—11 Knoten zu verleihen im Stande waren, dadurch veranlasst, das Maury'sche Windsystem einer eingehenden Vergleichung mit den durch die Maury'schen Karten gebotenen Facten zu unterziehen. Auf diese Weise lieferte er nicht nur den entscheidenden Beweis, dass die in den Maury'schen Karten niedergelegten Thatsachen sich unmöglich mit den theoretischen Ansichten desselben Autors vereinbaren lassen, in einer vollkommen befriedigenden Weise, sondern gelangte bei seinen Untersuchungen auch zu einer sich den Thatsachen viel natürlicher und besser anschmiegenden Theorie der Luftcirculation. Herr E. Stahlberger giebt nun in seinem vorliegenden verdienstlichen Aufsatze einen zwar gedrängten, aber doch sehr vollständigen Auszug aus der in jeder Beziehung beachtenswerthen Arbeit von Bourgois (Revue maritime et coloniale, mai, juin et juillet 1863), welche von Neuem deutlich zeigt, wie grosse Vorsicht in allen meteorologischen Dingen anzuwenden ist, und wie weit wir darin noch von einer wahren „Wissenschaft" entfernt sind. — Endlich enthält dieser Jahrgang nun noch das im vorigen Jahrgange versprochene Verzeichniss der Leuchtfeuer im gesammten Mittelmeere. Nach den

amtlichen Veröffentlichungen der kaiserl. franz. und königl. grossbrit. Marine-Behörden zusammengestellt von Robert Müller (Abgeschlossen im August 1864), auf welches alle Nautiker aufmerksam gemacht werden müssen.

Möge uns die k. k. hydrographische Anstalt auch im folgenden Jahre wieder mit einem so vieles Interressante und Wichtige enthaltenden Jahrgange dieses für die praktische und wissenschaftliche Förderung der Nautik wichtigen Almanachs erfreuen!

---

## Physik.

Zur Theorie des August'schen Heliostaten. Von Dr. Marian Koller, k. k. Ministerialrath, Ehrenmitgied des naturforschenden Vereins in Brünn. (Separatabdruck aus dem II. Bande der Verandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn). Herausgegeben vom Vereine. Brünn. 1864. 8°.

Der August'sche Heliostat zeichnet sich bekanntlich durch seine Einfachheit vor anderen Instrumenten dieser Art vortheilhaft aus und verdient immer allgemeiner in Gebrauch zu kommen. Deshalb verdient auch der Herr Verfasser dieser Schrift besonderen Dank, dass er in derselben, nach einer kurzen Beschreibung des Instruments, eine eingehende, durch Eleganz ausgezeichnete Thorie desselben mit Hülfe der analytischen Geometrie sowohl, als auch mittelst der sphärischen Trigonometrie entwickelt hat, aus welcher sich überall ziemlich einfache und auch zur logarithmischen Rechnung sehr bequeme Formeln ergeben haben. Dass aus diesen Formeln Alles, was zur richtigen Aufstellung und zum richtigen Gebrauche des Instruments nöthig ist, in der sorgfältigsten Weise abgeleitet worden ist, kann man in einer ihrem Gegenstande mit solcher Umsicht und Liebe sich widmenden Schrift nicht anders erwarten; auch sind ein Paar, den Gebrauch der Formeln erleichternde Hülfstafeln beigegeben worden, so dass jedenfalls der Physiker in dieser Schrift Alles mit grösster Deutlichkeit und Genauigkeit abgehandelt findet, was ihm bei dem Gebrauche des August'schen Heliostaten zu wissen nöthig ist, weshalb auf dieselbe hier recht sehr zu sorgfältigster Beachtung aufmerksam gemacht werden muss.

---

## Vermischte Schriften.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXX. S. 18.)

Tom. VI. No. 4. Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane del Prof. Cremona. p. 153. — Sull' equazione della curva piana, luogo geometrico di un punto dal quale condotte due tangenti a due circoli di egual raggio, il loro prodotto sia costante. Nota del Prof. B. Tortolini. p. 169. — **Rivista bibliografica.** Sulla teoria delle coniche. Articolo del Prof. L. Cremona. p. 179. — Formole relative ad un pentagono iscritto al circolo. Articolo del Prof. B. Tortolini. p. 191. — Sull' ellisse della più piccola superficie circoscritta ad un triangolo dato. Articolo del Prof. Tortolini. p. 196. — Pubblicazioni recenti. p. 200.

Tom. VI. No. 5. De curvatura superficierum quaestiones. Auctore F. Minding. p. 201. — **Rivista bibliografica.** Passages relatifs à des sommations de series de cubes. Par M. F. Woepcke. p. 225.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura dei Professori G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXX. S. 17.)

Anno II. Novembre 1864. Sugl' invarianti ed i covarianti delle forme binarie; per G. Novi. p. 321. — Quistione. p. 330. — Ricerche di analisi applicata alla geometria; per E. Beltrami. p. 331. — Sulle forme binarie dei primi quattro gradi; per G. Battaglini. p. 340. — Programma di concorso. p. 352.

Anno II. Dicembre 1864. Nota sul cangiamento della variabile independente; per Eligio Martini. p. 353. — Propietà di un determinante; per Ciro Sardi. p. 376. — Annunzio bibliografico. p. 380.

Wir freuen uns sehr, hiermit den Schluss des zweiten Jahrgangs dieses trefflichen, in seinem Kreise so Ausgezeichnetes leistenden Journals anzeigen zu können, und wünschen den verdienten Herren Herausgebern aufrichtigst Glück zu diesem unge-

hinderten Fortgange ihres Unternehmens, durch welches die Wissenschaft und der Unterricht in derselben in Italien, so wie auch überhaupt, wesentlich gefördert wird.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. V. Fasc. I. Upsaliae. 1864. 4°.

Der IV. Band Fasc. II. dieser wichtigen Schriften ist im Literar. Ber. Nr. CLXV. S. 13. angezeigt worden. Der vorliegende neue Band enthält auf S. 1—S. 145. und S. I—S. XCII. eine grosse Abhandlung über die atmosphärische Polarisation des Lichts unter dem Titel: „Mémoire sur la polarisation de la lumière atmosphérique par Dr. R. Rubenson", welche jedenfalls die grösste und wichtigste Arbeit ist, welche bis jetzt über den fraglichen, in so vielen Beziehungen interessanten Gegenstand erschienen ist, und die wir daher zu der sorgfältigsten und allseitigsten Beachtung dringend empfehlen müssen. Dieselbe nimmt auf alle früheren Arbeiten Rücksicht und bespricht dieselben eingehend, enthält dann aber hauptsächlich die eigenen theoretischen Ansichten des Herrn Verfassers, gegründet auf eine grosse Reihe, in Rom und Segni angestellter höchst sorgfältiger und genauer Beobachtungen, von denen auf S. I—S. XCII. ein vollständiges Tableau mitgetheilt wird. Der Hauptinhalt ist, ausser diesem Tableau der Beobachtungen, folgender: I. Historique et Littérature. — II. Sur la cause de la polarisation de la lumière atmosphérique. — III. Plan général des études à faire sur la polarisation de la lumière atmosphérique. — IV. Déscription du Polarimètre. — V. Remarques sur le Polarimètre. — VI. L'Installation de l'instrument. — VII. Méthode d'observation. — VIII. Position du point maximum. — IX. Variation diurne de la polarisation du point maximum. — X. Discussion des observations. — XI. Sur les perturbations. — XII. Phénomènes problématiques. — Aus dieser kurzen Angabe des Inhalts wird man den Plan vollständig erkennen, den der Herr Verfasser bei seiner ganzen, auf genaue Beobachtungen gegründeten Untersuchung befolgt hat, und wir müssen gestehen, dass wir diese schöne Arbeit für ein wahres Muster für alle derartige Untersuchungen halten, für deren Veröffentlichung die Königl. Societät der Wissenschaften in Upsala jedenfalls den grössten und wärmsten Dank verdient. So wie wir die Schrift mit dem grössten Interesse und der vielfachsten Belehrung gelesen haben, wird dieselbe für Jeden, der sich mit solchen Untersuchungen beschäftigt, jedenfalls ein gleich grosses Interesse darbieten und bei dergleichen Untersuchungen von Keinem entbehrt werden können.

Ausser dieser grossen und wichtigen Abhandlung enthält der vorliegende Band noch wie gewöhnlich: „Résultats des observations météorologiques faites au nouvel observatoire d'Upsal pendant l'année 1861. Observateur et Rédacteur: M. Wackerbarth." Die Beobachtungen sind wie immer auch für diesen Jahrgang vollständig mitgetheilt und sehr sorgfältig redigirt, so dass auch diese Beobachtungs-Journale jedenfalls zu den wichtigsten gehören, die wir überhaupt besitzen.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXVII. S. 6.).

Band XLVIII. Heft V. Schreiben des wirklichen Mitgliedes Herrn Dir. Santini an den General Sekretär der Akademie (über den fünften Cometen von 1863). S. 590. — Lorenz: Brackwasser-Studien in der Elbmündung. S. 602. — Schrötter: Ueber das Vorkommen des Thalliums im Lepidolith aus Mähren und im Glimmer aus Zinnwald. S. 734.

Band XLIX. Heft I. Haidinger: Sternschnuppen, Feuerkugeln und Meteoritenschwärme im Zusammenhange betrachtet. S. 6. — Julius Schmidt: Zweiter Bericht über das zu Athen am 18. October 1863 beobachtete Feuermeteor. S. 17. — Haidinger: Der Meteorstein von Tourinnes-la-Grosse bei Tirlemont. S. 123.

Band XLIX. Heft II. Haidinger: Der Meteoritenfall von Tourinnes-la-Grosse Nr. 2. S. 158. — Unferdinger: Aufstellung einer neuen Pendelformel und Darlegung einer Methode, aus der Länge des Secundenpendels in verschiedenen Breiten die Fliehkraft und die Form und Grösse der Erde zu bestimmen. S. 210. — Derselbe: Vergleichung der Pendelformel mit den Beobachtungen. S. 220. — v. Waltenhofen: Beobachtungen über die Polarisation constanter Ketten und deren Einfluss bei Spannungsbestimmungen nach der Compensationsmethode. S. 229. — Knochenhauer: Ueber den Zusammenhang des Magnetismus mit den Oscillationen des Batteriestroms. S. 249.

Band XLIX. Heft III. Oppolzer: Entwickelung von Differentialformeln zur Verbesserung einer Planeten- und Kometenbahn nach geocentrischen Orten. S. 271. — Derselbe: Ueber die Bahn des Planeten (64). S. 289. — Derselbe: Bahnbestimmung des Kometen I. 1861. S. 303. — Ditscheiner: Die Brechungsquotienten einer Lösung des salpetersauren Wismuthoxydes.

S. 326. — Jelinek: Auszug aus einem Schreiben des Herrn Prof. Cohn in Breslau über einen merkwürdigen Schnee- und Staubfall. S. 336. — C. Deschmann: Ueber einen merkwürdigen Schneefall bei Reifniz am 21. Februar d. J. S. 337. — v. Littrow: Physische Zusammenkünfte der Asteroiden im Jahre 1864. S. 339. — Frischauf: Bahnbestimmung des Kometen 1863. II. S. 345.

Band XLIX. Heft IV. und V. Moshammer: Centralprojection der Linien zweiter Ordnung. S. 372. — Haidinger: Ein Meteorfall bei Trapezunt am 10. December 1863. S. 462.

Atti dell' Accademia Pontificia de' nuovi Lincei, compilati dal Segretario. Anno XVIII.

Wir freuen uns sehr, durch die berühmte Accademia P. de' nuovi Lincei in Rom in den Stand gesetzt zu sein, von ihren wichtigen „Atti" von jetzt an den in den Kreis des Archivs gehörenden Inhalt unseren Lesern regelmässig anzeigen zu können, und sprechen dafür der Akademie überhaupt, so wie namentlich dem hochverdienten Sekretär und Bibliothekar derselben, dem Herrn Paolo Volpicelli und dem Herrn Principe D. Baldassarre Boncompagni hier unseren wärmsten und aufrichtigsten Dank aus.

Anno XVIII. Sessione I^a. del 4. Dicembre 1864. Ricerche analitiche sul bifilare tanto magnetometro, quanto elettrometro; sulla curva bifilare; e sulla misura del magnetismo terrestre. Memoria del prof. P. Volpicelli (Continuazione v. XVII. p. 331 — p. 356.). p. 1—16. — Observations et théories des Anciens sur les attractions et les répulsions magnétiques, et sur les attractions électriques par Th. Henri Martin, doyen de la faculté des lettres de Rennes. I^re Partie (Continuerà). p. 17—32. — Sur le mouvement des ondes; lettre de M^r. le marquis Anatole Hue De Caligny à Mr. le Commandeur Cialdi. p. 33—35. — Note sur le mouvement des ondes, produites dans un canal par le balancement d'un bateau; par le même (présentée par Mr. le Commandeur Cialdi.). p. 36—39. — Sullo spettro terrestre atmosferico e sulla relazione dei fenomeni magnetici coi meteorologici. Nota del R. P. A. Secchi. 40. — Terza lettera astronomica del Cav. Guiseppe Bianchi (La specola privata del sig. marchese R. Montecuccoli in Modena. Parte I.). p. 41—54. — Cinque memorie del Sig. Chasles; presentate dal prof. Volpicelli, relative alle sezioni coniche. (Es sind dies die bekannten, in den Comptes rendus erschienenen Abhandlungen über

die Kegelschnitte, von denen Herr Volpicelli hier eine Analyse liefert.). p. 55—58. — Sulla elettrostatica induzione. Decima communicazione, del prof. P. Volpicelli. p. 59—63.

Anno XVIII. Sessione II$^{a}$. del 8. Gennaro 1865. Il periodo glaciale e l'antichità dell' uomo. Ultimo brano di storia terrestre del prof. Giuseppe Ponzi. p. 73—96. — Observations et Théories des Anciens sur les attractions et les répulsions magnétiques et sur les attractions électriques; par Th. Henri Martin, Doyen de la faculté des lettres à Rennes. (Continuazione e fine. Vedi p. 32). p. 97—123. — Primo saggio di Osservazioni Meteorologiche comparative fra Roma e il Monte Cave; istituite e discusse da Giuseppe Dr. Serra Carpi. p. 127—129. — Sulla memoria del sig. Cav. Michele Stefano de Rossi, intitolata: Analisi geologica ed architettonica delle catacombe romane. Comunicazione del prof. P. Volpicelli. p. 130—132*). — Intorno alla pupilla umana subordinatamente alla contrattilità dell' Iride. Osservazioni del prof. Atto cavaliere Tigri, presentate dal prof. Socrate Cadet. p. 160—162.

Wir werden uns eine regelmässige und schleunige Anzeige dieser wichtigen Publicationen sehr angelegen sein lassen.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLII. S. 7.)

31$^{me}$ Année, 2$^{me}$ Sér. T. XIII. Note sur les tremblements de terre en 1859, par M. Alexis Perrey. Rapport de M. Duprez. p. 5. Rapport de M. A. Quetelet. p. 6. — Notice historique sur la vitesse et sur l'aberration de la lumière; par M. le major Liagre. p. 10. — Sur l'origine de l'électricité dans les piles; par M. Martens. p. 36. — Recherches sur la liaison entre les phénomènes de capillarité et d'endosmose; par M. Bède. p. 111. — Sur l'origine des étoiles filantes; par M. A. Quetelet. p. 122. — Sur les étoiles filantes de novembre et décembre 1861. Lettre à M. A. Quetelet par M. E. C. Herrick de New-Haven (Connecticut). p. 127. — Observations de la lune et des étoiles de culmination lunaire faites à l'observatoire de Bruxelles en 1860

*) Bei so wichtigen und in Deutschland so wenig bekannten Schriften wie diese „Atti" sind, halten wir es nicht für unzweckmässig, auch dann und wann eine interessante, wenn auch nicht unbedingt in den Kreis des Archivs gehörende Abhandlung zu berücksichtigen.

et 1861; présentées par M. A. Quetelet. p. 134. — Sur le magnétisme et sur l'électricité statique et dynamique pendant les orages; par MM. A. Secchi à Rome et M. A. Quetelet à Bruxelles. p. 195. — Sur les paratonnerres, notice par M. F. Duprez. p. 227. — De la variation annuelle de l'inclinaison et de la déclinaison magnétique à l'Observatoire R. de Bruxelles, depuis 1827 jusqu'à ce jour; par M. A. Quetelet. p. 228. — Méthode pour mesurer la parallaxe horizontale des astres; par M. J. C. Houzeau. p. 232. — Sur un mode particulier de production des bulles de savon; par M. F. Plateau. p. 286. — Sur les nébuleuses. Sur l'hygrométrie. Communications de M. A. Quetelet. p. 445. — Sur les variations périodiques de l'atmosphère, d'après les observations faites en Autriche et les pays environnants. Lettre à M. A. Quetelet par M. Kreil. p. 448.

31^me^ Année, 2^me^ Sér. T. XIV. Note sur l'électricité; par M. E. Bultinck. Rapport de M. Poelmann. p. 3. — Note sur les tremblements de terre en 1860; par M. A. Perrey. Rapport de M. F. Duprez. p. 72. — L'âge et le but des pyramides, lus dans Sirius, par Mahmoud-Bey, astronome de S. A. le vice-roi d'Égypte. Rapport de M. Liagre. p. 167. Rapport de M. Quetelet. p. 169. (Die sehr interessante Abhandlung des Herrn Mahmoud-Bey selbst findet sich p. 171—187). — Sur une nouvelle disposition de baromètre; par M. Armellini. p. 272. — Sur les étoiles filantes du 10 août 1862. Lettre de M^me^. Scarpellini à M. A. Quetelet. p. 273. — Sur les orages des mois d'août et de septembre 1862; par M. A. Quetelet. p. 277. — Sur la direction du courant électrique dans le corps des animaux, pendant la vie et après la mort. Lettre de M. Zantedeschi à M. A. Quetelet. p. 278. — Sur la loi de rotation des vents, par M. Wolfers à Berlin. p. 282. — Sur deux nouveaux mémoires de M. Bède faisant suite à ses Recherches sur la capillarité. Rapport de M. Plateau. p. 344. — Note sur les paratonnerres sans raccordements; par M. Jaspar. Rapport de M. Duprez. p. 349. — Note sur les paratonnerres sans raccordements; par M. Jaspar. p. 381. — De l'établissement des paratonnerres sur les édifices où le fer entre comme élément essentiel dans la construction. Rapport de M. F. Duprez. p. 443. — Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral; par M. Lamarle. Rapports des MM. Schaar et Brasseur. p. 453. — Différence des temps entre Bruxelles et Vienne, pour les époques critiques des plantes et des animaux; par M. A. Quetelet. p. 456.

(Fortsetzung im nächsten Hefte.)

**Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag.** (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXV. S. 14.)

Jahrgang 1864. Januar—Juni. S. 52—S. 55. Bemerkungen zu Gauss' Kennzeichen der Convergenz unendlicher Reihen. Von Herrn C. Hornstein (Ein Beweis des von Raabe in der folgenden Weise ausgesprochenen Satzes: „Wenn in einer Reihe $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n, u_{n+1}$ der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bei'm unendlichen Wachsen von $n$ die Einheit zur Gränze hat, so bilde man $n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})$. Ist die Gränze, welcher sich dieser Ausdruck bei'm Wachsen von $n$ nähert, positiv und grösser als 1, so convergirt die Reihe." — S. 114—S. 133. Herr A. Nowak: Ueber die Schwankungen des Quellenergusses oder der Quellenausflussmenge. — S. 147—S. 157. Herr Lippich hielt einen Vortrag über Darstellung und Anwendung der Schwingungscurven.

Jahrgang 1864. Juli—December. S. 69—S. 73. Herr Pierre machte einige kleinere physikalische Mittheilungen, und zwar: 1. Ueber Dr. Wolf's Würfelmodelle, mittelst welcher man zeigen kann, dass durch Zerlegung des Würfels und geeignete Gruppirung der erhaltenen Theilstücke mannigfache andere Körperformen erhalten werden können. Herr Pierre verspricht sich von diesen Modellen, die in rein geometrischer Beziehung interessant sind, für die Krystallographie keinen wesentlichen Nutzen, macht aber verschiedene interessante Bemerkungen, wie der Grundgedanke in zweckmässiger Erweiterung doch für die genannte Wissenschaft nutzbar gemacht werden kann. 2. Ueber eine Bemerkung von J. Müller in der neuesten Auflage seiner Physik, gewisse elektrische Versuche betreffend. — S. 73—S. 78. Herr F. Lippich hielt einen Vortrag über die Fresnel'sche Interpretation der imaginären Grössen. — S. 112—S. 115. Herr Durège erläuterte ein Verfahren zur Herstellung von Modellen für die Art von Flächen, welche Riemann bei seinen Untersuchungen über die Functionen einer complexen Variablen eingeführt hat, unter Vorlegung einiger danach angefertigten Modelle. — S. 115—S. 121. Herr Matzka machte mehrere kleinere Mittheilungen, und zwar: I. Einfache Umwandlung goniometrischer imaginärer Binome in imaginäre Exponentiellen. II. Betrachtung einiger gebrochenen Linien mit Paaren gleichlanger paralleler Seiten, deren algebraische Parallel-Projectionen auf Achsen summirt sich aufheben. III. Einfache Bestimmungsweisen der Richtcosinus der von ebenen oder krummen Flächen reflectirten oder gebrochenen Lichtstrah-

len mit Benützung des so eben (in II.) beschriebenen Projectionsverfahren unter Verweisung auf Archiv der Mathem. und Phys. (Thl. XXXIV. S. 316.), indem der Herr Verfasser jedoch mit Recht den jetzt hier angewandten Vorgang für den einfachsten hält.

Wir bedauern, dass wegen des vorliegenden überreichen Materials die Anzeige dieser Sitzungsberichte der so erfolgreich wirkenden königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, welche immer Vieles enthalten, was der baldigen Mittheilung werth ist, diesmal etwas verspätet worden ist, was — wofür wir Sorge tragen werden — künftig möglichst vermieden werden wird.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. (Bis Nr. 552 im Literar. Bericht Nr. CLXV. S. 15. angezeigt.)

Aus dem Jahre 1864. Nr. 553—579. — Nr. 555—556. H. Wild: Ueber ein neues Saccharimeter. — Nr. 557—558 und Nr. 559—560. E. Schinz: Die Aufhängung der Kirchenglocken (ganz mathematisch gehalten und mehrfach interessant). — Nr. 561—563. E. Schinz: Ueber den Einfluss des Windes auf die Richtung der Signalscheiben. — H. H. Denzler: Die Meereshöhe des Chasseral, als Grundlage des Schweizerischen Höhennetzes. — G Hasler: Verbesserter Telegraphenapparat mit Farbschrift. — Nr. 566—567. E. Schinz: Ueber die Niveau-Differenz des mittelländischen und des atlantischen Meeres längs den französischen Küsten. — Nr. 568—571. und Nr. 572—575. C. v. Fischer-Ooster: Beitrag zur Kenntniss der Vertheilung der Wärme im Raume (auch für barometrisches Höhenmessen interessant und wichtig). — M. Zwicky: Ueber Ableitung von Krystallformen. — H. Wild: Bericht der meteorologischen Centralstation in Bern vom Jahre 1863 (auch zur Kenntniss selbstregistrirender Instrumente wichtig und interessant). Die meteorologischen Beobachtungen scheinen auch in der Schweiz mit grosser Sorgfalt und unter sehr zweckmässiger Oberleitung angestellt zu werden. — Nr. 577—579. H. Wild: Untersuchungen über die Identität von Lichtäther und electrischem Fluidum. — H. Wild: Ueber die Veränderung der electromotorischen Kräfte zwischen Metallen und Flüssigkeiten durch den Druck. — Perty: Ueber die neuesten Mikroskope von Herrn Sigmund Merz in München.

# Preisaufgabe

der

## Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli für 1866.

### Programma di Concorso.

L'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli conferirà un premio di seicento lire a titolo d'incoraggiamento alla migliore Memoria sul seguente tema.

*„Esporre le proprietà delle superficie, o delle linee d'ordine qualunque, assoggettate a tante condizioni, meno una, quante sono necessarie affinchè quelle superficie, o quelle linee siano del tutto determinate".*

L'Accademia considerando l'importanza grandissima del metodo del sig. Chasles per risolvere tutte le quistioni sulle linee di 2° ordine fondato sulle proprietà delle coniche assoggettate a quattro condizioni, ha determinato proporre il suddetto argomento per incoraggiare i Geometri italiani a trattarlo ampiamente, in modo da poter estendere il metodo del sig. Chasles alla risoluzione delle quistioni sulle superficie o le linee d'ordine qualunque.

L'Accademia vedrebbe con maggiore soddisfazione risoluta la questione proposta relativamente alle superficie. La Memoria dovrebbe versare allora sulle proprietà delle superficie d'ordine qualunque assoggettate all'indicato numero di condizioni, e che si esprimono con le tre caratteristiche dinotanti rispettivamente quante superficie del sistema passino per un punto dato, quante tocchino un piano dato, e quante tocchino una retta data. Si richiede che si tenga conto dei punti e delle linee singolari delle superficie, e che si trattino le quistioni relative ai contatti multipli.

Se poi si preferisce di rispondere al tema proposto per la parte meno difficile che riguarda le curve, si dovrà trattare nella Memoria delle proprietà delle linee d'ordine qualunque assogettate all'indicato numero di condizioni, e che si esprimono con le due caratteristiche indicanti il numero delle curve del sistema che passano per un punto dato, e quello delle curve che toccano una retta data: rimanendo ferma l'avvertenza precedente circa i punti singolari delle curve, ed i contatti multipli.

## Condizioni.

1. Le memorie dovranno essere scritte in italiano, latino, o francese, e dovranno inviarsi al Segretario dell' Accademia non più tardi del mese di marzo del 1866.

2. Esse non debbono portare il nome dell' Autore, e debbono essere distinte con un motto, il quale dovrà essere ripetuto sopra una scheda suggellata che conterrà il nome dell'Autore.

3. La Memoria premiata sarà pubblicata negli Atti dell'Accademia, e l'Autore avrà dritto a cento copie della medesima.

4. Tutte le Memorie inviate pel concorso al premio si conserveranno nell' Archivio dell' Accademia, e soltanto si permetterà di estrarne copia a chi le avrà presentate.

# Literarischer Bericht

## CLXXII.

## August Kunzek, Edler von Lichton,

Doctor der Philosophie, k. k. o. ö. Professor der Physik an der Universität zu Wien, Ritter des grossherzoglich badischen Ordens vom Zähringer Löwen, correspondirendes Mitglied der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Mitglied der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien, der k. k. Landwirthschafts-Gesellschaften in Wien und Lemberg, emeritierter Universitäts-Rector und Decan etc.

(Nekrolog.)

Mag der Mensch unter dem Einfluss echter Bildung noch so vorurtheilsfrei geworden sein, nie wird er sich des Glaubens ganz entschlagen können, dass es Momente gibt, in welchen die menschliche Brust von einem dunklen Ahnen zukünftiger Ereignisse bewegt wird. Von diesem Glauben ward wol auch der Mann, welchem diese Zeilen gewidmet sind, beschlichen, als er die Vorrede zu der dritten Auflage seines Werkes: „Lehrbuch der Physik mit mathematischer Begründung" schrieb; dieser Glaube äusserte sich ganz deutlich in dem letzten Gespräche zwischen ihm und mir. Es war um die Mitte des Februar, als ich zu meinem Lehrer kam, um mich vor einer längeren Reise bei ihm zu verabschieden. Kunzek war damals ganz wol und erfreute sich einer für sein Alter sehr guten Gesundheit. Wir sprachen über wissenschaftliche Dinge, über die politischen und socialen Zustände unseres Vaterlandes. Er sprach mit jener an Affect grenzenden Lebendigkeit, welche bei ihm jedesmal hervortrat, wenn im Freundeskreise die Rede auf ein Thema kam, das ihn so recht interessierte. Plötzlich sagte er: „Ich bin gegenwärtig mit der Bearbeitung einer neuen Auflage meiner Meteorologie beschäftigt; ich wünsche nur das Eine, dass es mir gegönnt sei, diese meine Lieblingsarbeit noch zu Ende zu bringen." Und dem letzten Händedrucke fügte

er die Worte bei: „Sie werden mich bei der Rückkehr kaum wieder finden.“ — Diese Ahnung sollte früher, als er es wol selbst erwartet, bevor er noch seine „Lieblingsarbeit“ bestellen konnte, in traurige Erfüllung gehen. Schon am 31. März war Kunzek unter den Todten; eine Lungenentzündung hatte ihn in wenigen Tagen dahingerafft.

August Kunzek ward am 28. Januar 1795 zu Königsberg im österr. Schlesien geboren. Den ersten Unterricht erhielt er in der Stadtschule seines Geburtsortes. Für die höhere Ausbildung des Sohnes besorgt, schickte ihn der Vater, ein schlichter Landwirth, nach Troppau zum Besuche des dortigen Gymnasiums. Nach vollendeten Gymnasialstudien begab Kunzek sich an die Universität Olmütz, um die zwei „philosophischen Jahreskurse“, welche nach der damaligen Unterrichtsorganisation zwischen das sechsklassige Gymnasium und die Fachstudien der Universität eingeschoben waren, zu absolvieren. Hier schon fing seine Vorliebe für mathematisch-naturwissenschaftliche Studien an hervorzutreten, denen er sich insbesondere während seiner juridischen Studien an der Wiener Universität mit allem Eifer widmete. Um sich seinen Lieblingswissenschaften ganz hingeben zu können, verliess er die juridische Laufbahn gänzlich; sein Streben war auch von solchem Erfolge gekrönt, dass er 1822 zum Adjunkten bei den Lehrkanzeln der Mathematik und Physik an der Wiener Universität, wo damals Baumgartner und Ettingshausen wirkten, bestellt und zwei Jahre später zum Professor der Physik und angewandten Mathematik an der Lemberger Universität ernannt wurde.

In Lemberg war Kunzek so recht in die Lage versetzt, um die edlen Eigenschaften seines Characters zur Geltung bringen zu können. Niemand wird die Schwierigkeiten verkennen, welche sich den Deutschen in Polen, insbesondere einem deutschen Lehrer, dem nationaler Fanatismus von vorneherein die Absicht, germanisieren zu wollen, unterschiebt, entgegenstellen. Seine mit echter Wissenschaftlichkeit gepaarte Humanität überwand jedoch alle Hindernisse. Durch sein umfassendes und gründliches Wissen, welches er in den Universitätsvorlesungen sowol, wie in den populären Vorträgen, die er über verschiedene Zweige der mathematisch-naturwissenschaftlichen Disciplinen hielt, an den Tag legte, zog er den Verstand seiner Zuhörer auf seine Seite herüber; durch die fast väterliche Liebe, mit welcher er an der Studentenschaft hing, durch die von reiner Humanität getragene Gerechtigkeit, mit welcher er im vollsten Bewusstsein seiner eigenen Nationalität und bei lauterer Anhänglichkeit an das Gesammtreich und dessen Regierung die Eigenthümlichkeiten und historischen

Erinnerungen einer fremden Nation beurtheilte, gewann er sich die Herzen seiner neuen Mitbürger in einer Weise, dass man ihm, dem Fremden, in den verschiedensten Schichten der Gesellschaft die vollste Hochachtung und unbedingtes Vertrauen zollte, und dass er auf die studierende Jugend einen Einfluss ausübte, unter welchem die Ordnung und die Disciplin an der Universität selbst in den schwierigsten Momenten aufrecht erhalten worden ist. In Lemberg eröffnete Kunzek auch seine schriftstellerische Laufbahn und zwar 1836 mit dem für die damalige Zeit vorzüglichen Werke: „Die Lehre vom Lichte." War dieses Werk mehr für wissenschaftliche Kreise bestimmt, so liess er 1843: „Leichtfassliche Vorträge über die Astronomie" und 1847: „Die Meteorologie" erscheinen, um die Ergebnisse der Wissenschaft auch einem grösseren Publikum zugänglich zu machen; ein Versuch, der damals in der deutschen Literatur noch zu den Seltenheiten gehörte. In dieser letzteren Richtung wirkte er auch in der k. k. Landwirthschaftsgesellschaft in Lemberg, wozu er als Ausschussmitglied hinreichende Gelegenheit fand. Es war dies ebenfalls ein schöner Zug in seiner wissenschaftlichen Thätigkeit, dass er die Beziehungen der Wissenschaft zum praktischen Leben nie aus den Augen verlor, und namentlich auf jenen Stand, aus dem er selbst hervorgegangen war, belehrend zu wirken suchte.

In die Periode seiner Lehrerthätigkeit zu Lemberg fallen auch seine Reisen, welche er auf eigene Kosten nach Deutschland, Frankreich und England unternahm, um den Kreis seiner Erfahrungen zu erweitern und sich mit dem Unterrichtswesen, speciell mit der Einrichtung der naturwissenschaftlichen Institute, Museen und Laboratorien dieser Länder durch Autopsie bekannt zu machen. Die Frucht dieser Reisen war zunächst die Erhebung des physikalischen Cabinets der Lemberger Universität auf einen den wissenschaftlichen Anforderungen seiner Zeit entsprechenden Stand und der Organisationsentwurf für eine in Lemberg zu errichtende technische Akademie, der auch in allen wesentlichen Theilen zur Ausführung kam.

Als Kunzek 1847 an die Wiener Hochschule berufen wurde, eröffnete sich für ihn ein neues Gebiet erwünschter Thätigkeit. Bekanntlich fällt die Reorganisation des österr. Unterrichtswesens in die Zeit von 1848—1850. Diesen Reformbewegungen wendete Kunzek seine volle Aufmerksamkeit zu. Die vertraulichen Beziehungen, in welchen er schon seit 1822 zu dem Grafen Stadion, dem damaligen Minister, stand, machten es ihm auch möglich, mit seiner Einsicht und Erfahrung anregend und rathend zu wirken. Leider wurde dieses Verhältniss durch ein schweres

Verhängniss zu einer Zeit gelöst, wo es hätte recht fruchtbar werden können. Für Kunzek war Stadion's Tod ein harter Schlag; denn er wusste nur zu wol, wie gerechtfertigt jene Hoffnungen waren, welche das österr. Volk an diesen Mann knüpfte. — Kunzek war von der Bedeutung der Naturwissenschaften für das moderne Culturleben und für die materielle Wolfahrt der Staaten von je her zu sehr durchdrungen, um die Nothwendigkeit nicht zu erkennen, dass den mathematisch-naturwissenschaftlichen Disciplinen in den österr. Schulen die gebührende Stellung gesichert werde. „Es ist," sagt er in der Vorrede zu seinem Lehrbuche der Physik mit mathematischer Begründung, „in einem Staate nicht hinreichend, dass die Naturwissenschaften von einigen Männern sorgsam gepflegt werden, sondern sie müssen alle Volksklassen durchdringen; und dies werden sie, wenn vor allen die Männer, welche für den Dienst im Staate und in der Kirche sich ausbilden, in diesen Wissenschaften gründlich unterrichtet worden sind." Als durch die neue Studienorganisation seinen Ansichten wenigstens theilweise Rechnung getragen worden war, suchte er zur Realisirung nach Kräften beizutragen. Er war nicht nur thätig für die Heranbildung tüchtiger Lehrer der Physik, insbesondere seit er 1853 Mitglied der Prüfungscommission für Gymnasial-Lehramtscandidaten geworden, sondern zeichnete durch seine Lehrbücher jene Richtung vor, welche der physikalische Unterricht an Mittelschulen einzuhalten hat, wenn derselbe den Anforderungen der Schule in Bezug auf allgemeine Bildung der Schüler und den Bedürfnissen des praktischen Lebens im richtigen Maasse Genüge leisten soll. So erschien 1849 das „Lehrbuch der Experimentalphysik zum Gebrauche in Gymnasien und Realschulen" und 1853 das „Lehrbuch der Physik mit mathematischer Begründung zum Gebrauche an höheren Schulen und zum Selbstunterrichte." Beide Werke fanden bei der gesammten Kritik die günstigste Beurtheilung und in den Schulen einen so zahlreichen Gebrauch, dass von der Experimentalphysik 1864 bereits die siebente, von der Physik mit mathematischer Begründung 1865 die 3. Auflage nothwendig wurde. Das letztere Lehrbuch wurde sogar in mehreren Schulen des ausseröster. Deutschlands dem physikalischen Unterrichte zu Grunde gelegt. Mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehramtskandidaten liess er 1856 „Studien aus der höheren Physik" erscheinen.

Obgleich Kunzek durch diese Arbeiten, so wie durch seine Lehrthätigkeit an der Universität sehr in Anspruch genommen war, fand er doch an Sonntagen Zeit zur Abhaltung populärer Vorträge und gehörte nebstdem zu den thätigsten Mitgliedern

des Centralausschusses der k. k. Landwirthschaftgesellschaft in Wien. Dieser rastlosen Thätigkeit und den mit ihr verbundenen Erfolgen konnte die verdiente Anerkennung nicht entgehen. 1852 wurde Kunzek zum correspondierenden Mitgliede der kaiserlichen Akademie in Wien erwählt; 1858 wurde ihm durch Verleihung des Ritterkreuzes des grossherzogl. badischen Ordens vom Zähringer Löwen eine besondere Auszeichnung zu Theil. Endlich wurde Kunzek durch kaiserliche Entschliessung vom 22. November 1862 in Erwägung „seiner langjährigen um die Wissenschaft und das öffentliche Beste erworbenen hervorragenden Verdienste" in den Adelstand des österreischen Kaiserstaates erhoben. Diese Auszeichnungen sind um so ehrenvoller für ihn, als er in fast allzu grosser Bescheidenheit nie von seinen Verdiensten sprach und nie nach Gunstbezeugungen buhlte. Ihm war es beim Handeln nur um die Sache, welcher er diente, zu thun, und er fand in dem Bewusstsein etwas Rechtes, etwas dem allgemeinen Wole Nützliches geschaffen zu haben, so wie in der Anhänglichkeit und in den Leistungen seiner Schüler, den schönsten Lohn seiner Bemühungen. Mit welcher Verehrung die Schüler an ihm hingen, bewies die Leichenfeier, welche ihm von der akademischen Jugend in Gegenwart der wissenschaftlichen Celebritäten Wiens veranstaltet wurde; seine zahlreichen Schüler werden ihn auch stets in dankbarer Erinnerung behalten und in seinem Geiste fortzuwirken trachten. Aber nicht allein dem Lehrer, dem Manne der Wissenschaft wird ein treues Andenken gesichert bleiben; gar viele werden sich noch nach Jahren jenes Mannes mit dem ehrwürdigen schneeweissen Haupte erinnern, welcher strenge war gegen sich, mild gegen andere und gewissenhaft in Erfüllung der Pflicht:

„Immer strebe zum Ganzen! und kannst Du selber kein Ganzes
Werden, als dienendes Glied schliess' an ein Ganzes Dich an!"

**Dr. Krist.**

---

## Alte griechische Mathematiker.

Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae; accedunt Didymi Alexandrini mensurae marmorum et anonymi variae collectiones ex Herone, Euclide, Gemino, Proclo, Anatolio aliisque. E libris manu scriptis edidit Fridericus Hultsch. Berolini. Apud Weidmannos. MDCCCLXIV. 8°.

Wir haben uns über diese Ausgabe der nachgelassenen Schriften des Hero von Alexandrien u. s. w. sehr gefreuet, und sagen dem Herrn Verfasser um so mehr Dank für dieselbe, je mehr Schwierigkeiten bei derselben offenbar zu überwinden waren. Besonders machen wir auch auf die wegen ihres historischen und literarischen Inhalts sehr interessante und lehrreiche „Praefatio" aufmerksam, so wie auch namentlich auf den Abschnitt „VIII. Heronis mensura trianguli excerpta e libro περὶ διόπτρας", dessen Herstellung dem Herrn Herausgeber besondere Mühe machte, worüber die Praefatio p. XVII. nachzusehen ist. Der Beweis dürfte dem völlig ähnlich sein, welcher z. B. in dem Aufsatze: „Beweis der drei Brüder für den Ausdruck des Dreieckinhalts durch die drei Seiten (Archiv. Theil XXXIX. S. 186.)" von Herrn Kinkelin mitgetheilt worden ist, und der sich auch bei Leonardo Pisano (m. s. das herrliche für die Geschichte der Mathematik so wichtige Werk: „Scritti di Leonardo Pisano. Pubblicati da Baldassarre Boncompagni. Vol. II. Roma. 1862. 4°. p. 40.", durch welches der Fürst B. Boncompagni sich so sehr um die Geschichte der Mathematik verdient gemacht hat) findet.

Viele Mathematiker werden mit uns sehr wünschen, dass Herr Hultsch sein durch Herausgabe des vorliegenden Werkes erworbenes Verdienst recht bald durch Herausgabe einer lateinischen Uebersetzung noch erhöhe.

---

## Arithmetik.

Mathematische Aufgaben nebst ihren Lösungen. Zum Gebrauche auf Forst-, Berg-, landwirthschaftlichen und anderen technischen Academien, so wie zum Selbstunterrichte. Von C. Schindler, Assistent der Forstwissenschaft und Docent der Baukunst an der k. k. Forstlehranstalt zu Mariabrunn. Wien. Braumüller. 1865. 8°.

Diese Aufgaben betreffen nur die gemeine und allgemeine Arithmetik und die Algebra; die Sammlung ist aber in diesem Kreise eine sehr umfangreiche und zeichnet sich dadurch vor anderen Aufgabensammlungen aus, dass den nicht in das Gebiet der reinen Arithmetik gehörenden Aufgaben meistens eine auf Praxis und Technik, namentlich die Forstwirthschaft, bezügliche

Einkleidung gegeben worden ist: wenn aber auch hiernach das Buch vorzugsweise für die auf dem Titel genannten Lehranstalten bestimmt ist und von diesen insbesondere berücksichtigt zu werden verdient, so glauben wir es doch auch, seines allgemein instructiven Inhalts wegen, Lehrern an allen sonstigen Unterrichtsanstalten zur Beachtung empfehlen zu dürfen, und wollen daher den Hauptinhalt noch kurz angeben: I. Dekadisches Zahlensystem. II. Die vier Rechnungsarten (arithmetische und algebraische). III. Rechnungsarten mit genannten Zahlen. IV. Theilbarkeit der Zahlen. V. Brüche (Gemeine Brüche, Decimalbrüche, Kettenbrüche). VI. Potenzgrössen. VII. Wurzelgrössen (mit Einschluss der imaginären Grössen). VIII. Logarithmen. IX. Verhältnisse und Proportionen. X. Gleichungen. XI. Combinationslehre (mit Einschluss des binomischen und polynomischen Satzes). XII. Reihen. (Sehr reichhaltig an Zinsrechnungs- und verwandten Aufgaben, auch Convergenz und Divergenz der Reihen, also auch selbst die höheren Partieen nicht unberücksichtigt lassend). XIII. Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Wir empfehlen das Buch nochmals zur Beachtung.

Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln von Dr. Theodor Wittstein, Professor an der Königlichen Generalstabs-Akademie in Hannover u. s. w. Zweite Auflage. Hannover. Hahn. 1865. 8°.

Das Erscheinen einer zweiten Auflage dieser empfehlenswerthen fünfstelligen Tafeln liefert den erfreulichen Beweis, dass sich die Ansicht, dass namentlich bei dem höheren mathematischen Schulunterrichte der Gebrauch solcher Tafeln dem Gebrauche mehrstelliger Tafeln unbedingt vorzuziehen ist, immer mehr Bahn bricht. Die von der gewöhnlichen sich nicht wesentlich unterscheidende Einrichtung dieser Tafeln ist aus ihrer ersten Auflage hinreichend bekannt, so dass wir uns mit folgenden Bemerkungen über dieselben hier begnügen können. Dass der Herr Verfasser kein kleineres Format als Octav gewählt hat, ist vollständig zu billigen. Druck und Papier entsprechen allen Anforderungen, und die Ziffern, deren Schnitt uns an die älteren classischen englischen Tafeln, z. B. an die uns gerade vorliegenden trefflichen und ungemein seltenen „Tables of Logarithms. By William Gardiner. London MDCCXLII. 4°.“ erinnert hat, sind sehr deutlich. Auch die Gauss'schen Logarithmen sind auf Grundlage der August'schen Tafeln, aber nicht ganz ohne eigene bequemere Einrichtungen, aufgenommen. Im Allgemeinen ist der Inhalt fol-

gender: Ueber Einrichtung und Gebrauch der Tafeln. I. Briggische Logarithmen der Zahlen von 1 bis 9999. Einige andere nützliche Logarithmen. II. Die natürlichen trigonometrischen Zahlen für die Winkel des ersten Quadranten von Viertel- zu Viertel-Grad. (Hier hätten wir aus schon öfters erwähnten Gründen die Aufnahme der Secanten und Cosecanten gewünscht, die sich z. B. in den trefflichen Tafeln dieser Art von Sherwin finden.). III. Die Logarithmen der trigonometrischen Zahlen für die Winkel des ersten Quadranten von Minute zu Minute. (Die Vertheilung jedes Grades auf anderthalb Seiten war bei dem gewählten, allerdings sehr deutlichen und grossen Druck nicht zu vermeiden.) IV. Länge der Kreisbögen. V. Gaussische Logarithmen. VI. Natürliche Logarithmen der Zahlen von 1 bis $e^6$. Anhang. (Trigonometrische Formeln. Dimensionen des Erdsphäroids. Französisches Maass-, Münz- und Gewichtssystem). — Jedenfalls verdienen auch diese Tafeln zur Berücksichtigung für den Gebrauch bei dem Unterrichte empfohlen zu werden.

**Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemanns bearbeitet von Dr. H. Durège, ordentlichem Professor am Polytechnikum zu Prag. Leipzig. Teubner 1864. 8°.**

Je schwieriger es seit der Einführung der neuen in der Theorie der imaginären Grössen zur Geltung gekommenen Ansichten und Anschauungsweisen, und namentlich seit der Einführung der complexen Variablen in die Mathematik, für jeden Mathematiker geworden ist, sich mit den betreffenden Untersuchungen, namentlich mit den Schöpfungen Riemann's, aus verschiedenen einzelnen Abhandlungen und Schriften bekannt zu machen: desto grösser und dankenswerther ist offenbar das Verdienst, welches der Herr Verfasser sich durch die Herausgabe des vorliegenden Werkes, in welchem er eine so viel als möglich systematische, von dem Leichteren und Einfacheren zum Schwereren und Zusammengesetzteren fortschreitende, zugleich möglichst vollständige Darstellung der genannten Untersuchungen zu liefern versucht hat. Wir sind der Meinung, dass derselbe sich seiner wahrlich nicht leichten Aufgabe mit grossem Geschick und grossem Fleisse entledigt hat, und können dieses Werk, welches wir für eine wesentliche und wichtige Bereicherung unserer mathematischen Literatur halten, Allen, die den genannten Untersuchungen ein sorgfältiges Studium widmen wollen, aus vollkom-

menster Ueberzeugung nicht genug empfehlen. Die Darstellung ist, von den ersten neueren Begriffen über die sogenannten imaginären Grössen beginnend, in systematischer Fortschreitung, überall sehr deutlich und selbst so elementar gehalten, wie es der allerdings schwierige Gegenstand nur irgend gestattete, so dass wir glauben, dass wesentliche Schwierigkeiten keinem aufmerksamen und selbständiges Nachdenken nicht scheuenden Leser entgegentreten werden. Auf Einzelnes, selbst wenn wir hin und wieder einige Bedenken zu äussern uns veranlasst finden dürften, die aber — wie wir uns gern bescheiden — sich doch vielleicht bei noch tieferem und sorgfältigerem Eingehen beseitigen lassen möchten, einzugehen, kann natürlich in diesen kurzen Literarischen Berichten nicht der Ort sein, so dass wir uns mit der folgenden Inhaltsangabe begnügen müssen: Einleitung. I. Geometrische Darstellung der imaginären Grössen. II. Von den Functionen einer complexen Variabelen im Allgemeinen. III. Mehrdeutige Functionen. IV. Integrale mit complexen Variabelen. V. Der Logarithmus und die Exponentialfunction. VI. Allgemeine Eigenschaften der Functionen. VII. Ueber das unendlich gross und unendlich klein Werden der Functionen (A. Functionen ohne Verzweigungspunkte. Einwerthige Functionen. B. Functionen mit Verzweigungspunkten). VIII. Integrale (A. Integrale über geschlossene Linien ausgedehnt. B. Integrale über nicht geschlossene Linien. Unbestimmte Integral-Functionen.). IX. Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen. X. Von den Periodicitätsmoduln. XI. Bestimmung einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. XII. Ueber die Bestimmung des Zusammenhangs einer gegebenen Fläche.

Möge das Buch die so sehr verdiente Beachtung in reichstem Maasse finden.

---

## Optik.

Die physiologische Optik. Eine Darstellung der Gesetze des Auges. Von Dr. Hermann Scheffler (Herzogl. Braunschweigischem Baurath). In zwei Theilen. Erster Theil. Mit 226 in den Text eingedruckten Holzstichen. Braunschweig. Schulbuchhandl. 1864. 8°.

Der Herr Verfasser, als gründlicher und scharfsinniger Mathematiker längst auf das Vortheilhafteste bekannt, hat es nicht

unterlassen, vor der Publication dieses Werkes sich auch mit den hier zur Geltung kommenden physiologischen und anatomischen Bedingungen und Verhältnissen aus eigener Anschauung, unter Benutzung von Ochsen-, Kalbs-, Hammel- und Schweinsaugen, auf das Genaueste bekannt zu machen, so dass also die in diesem Werke gegebene sehr detaillirte und ausführliche Beschreibung des Auges, nebst den derselben beigegebenen sehr deutlichen Zeichnungen, ganz auf eigenen Untersuchungen und Messungen beruhet. Dass Alles, was einer mathematischen Betrachtung fähig war und eine solche in Anspruch nahm, auf strenge mathematische Verhältnisse und Formeln zurückgeführt worden ist, versteht sich bei diesem Verfasser von selbst, — wobei derselbe sich aber augenscheinlich überall grösster Deutlichkeit und Eleganz befleissigte, und sich mit wenigen Ausnahmen innerhalb des Gebiets der Elemente hielt, selbst ohne Anwendung der eigentlichen analytischen Geometrie, die Betrachtung, grösserer Anschaulichkeit wegen, durchgängig an deutlich gezeichnete Figuren anschliessend, — was bei einem solchen Werke vollkommen gebilligt und besonders anerkannt werden muss; bei einer dem Gebiete des Maximums und Minimums vorzugsweise angehörenden Untersuchung (S. 130. ff.) war natürlich ohne sehr grosse Weitläufigkeit der Gebrauch der Differentialrechnung nicht zu umgehen. Jedenfalls halten wir neben der eigentlich physiologischen, die gesammte mathematische Partie des Werkes für eine sehr lehrreiche und interessante, auf die wir — eben so, wie auf die erstere — unsere Leser recht sehr aufmerksam zu machen nicht unterlassen können, so wie wir dieses Werk überhaupt für eine wichtige Bereicherung unserer optischen Literatur halten, und es zu ausgebreiteter Beachtung, mit eigener dankbarer Anerkennung der aus demselben geschöpften vielfachen Belehrung, dringend empfehlen.

Der Hauptinhalt ist folgender: Einleitung. Kritische Entwickelung der Grundanschauungen der Theorie des Lichtes. Optische Begriffserklärungen. Bau des Auges. Dimensionen des Auges. Der innere Mechanismus des Auges. Systematische Eintheilung der zum Sehen erforderlichen Apparate und Funktionen. Mathematische Theorie der Akkomodation und der Linsensysteme überhaupt. Gehirnthätigkeit. Sehen mit zwei Augen. Schielen. Erläuternde Experimente. Wettstreit und Identität der Sehfelder. Einfachsehen. Der äussere Bewegungsapparat des Auges. Die Hülfsmittel gegen das Schielen. Beurtheilung der Entfernung. Stereoskopisches Sehen. Mittlere Sehweite. Beurtheilung der Richtung, des Sehwinkels und der absoluten Grösse. Beurtheilung der Lichtstärke. Beurtheilung der Farben. Schärfe des

Sehens. Scheinbare Richtung. Deckung der unempfindlichen Stelle. Scheinbare Grösse und Entfernung. Gleichzeitige Akkomodation auf verschiedene Entfernungen. Erscheinungen des körperlichen Raumes. Perspektive. Scheinbare Lichtstärke. Scheinbare Farbe. Das Zurückstrahlen des Lichtes aus dem Auge und die Funktionen der Aderhaut. Verhältniss zwischen der absoluten und scheinbaren Grösse, Lichtstärke und Farbe und zwischen der optischen Täuschung. Einfluss des freien Willens auf die Akkomodation. Erscheinungen beim Blicke durch mehrere feine Oeffnungen. Das Induktionsgesetz. Das Konkurrenzgesetz. Das Kontrastgesetz. Nähere Ausführungen der drei vorhergehenden Gesetze.

Dem Erscheinen des zweiten Theils sehen wir mit grossem Verlangen entgegen *).

---

## Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. (Vergl. Liter. Ber. CLXXI. S. 19.).

32me Année, 2me Sér. T. XV. Sur les variations météorologiques, pendant les quarante derniers jours de l'année; par M. Ed. Wouwermans p. 6. — Sur un nouveau procédé expérimental pour déterminer la distance focale principale des miroirs sphériques convexes et des lentilles divergentes; par M. Valerius. Rapport de M. Plateau. p. 9. — Aurore boréale du 14 au 15 décembre 1862; par M. Ad. Quetelet; p. 21. — Le problème de Kepler, discuté par M. J. Ph. Wolfers. p. 29. — Note sur un nouveau procédé expérimental pour déterminer la distance focale principale des miroirs sphériques convexes et des lentilles divergentes; par M. H. Valerius. p. 47. (S. vorher). — Essai sur la résistance comparée des conducteurs de fer et de cuivre à la rupture par le courant galvanique et l'étincelle électrique; par M. Jaspar. Rapport de M. Montigny. p. 301. — Rapport de M. Gloesener. p. 308. — Die Abhandlung des Herrn Jaspar selbst findet sich p. 324. — Mémoire sur la théorie des roues à palettes; par M. Steichen. Rapport de M. Timmermanns. p. 406. — Un mot sur les courants des appareils électromagnétiques; par M. Poelmann. p. 408. — Bolide observé dans la soirée du 4 mars 1863. Communication de M. Ad. Quetelet.

*) Ist bei'm Schluss dieses (und auch des gleichzeitig im Druck befindlichen folgenden Literar. Ber.) bereits erschienen und wird so bald als möglich angezeigt werden.

p. 409. — Étoiles filantes du mois de novembre 1862; par Ad. Quetelet. p. 414. — Sur les étoiles filantes et sur le bolide aperçu le 4 mars dernier; par Sir John Herschel. p. 527. — Sur les variations de l'inclinaison et de la déclinaison magnétiques à Bruxelles, depuis 1827 jusqu'a ce jour. Lettre de M. Hansteen, de Christiania, à M. A. Quetelet. p. 528. — Sur les courants électriques telluro-atmosphériques et leurs rapports avec les perturbations des aimants; lettre de M. Zantedeschi, de Padoue, à M. Ad. Quetelet. p. 609. — Sur la théorie mathématique des courbes d'intersection de deux lignes tournant dans le même plan autour de deux points fixes; par M. Van der Mensbrugghe. Rapport de M. Lamarle. p. 613. — Mittheilung magnetischer Beobachtungen durch Herrn Ad. Quetelet. p. 618. — Sur les courants électriques telluro-atmosphériques et leurs rapports avec les perturbations des aimants. Lettre de M. Zantedeschi à M. Ad. Quetelet. p. 619. — Note sur la résistance comparative des conducteurs de paratonnerres de fer et de cuivre à la fusion par la foudre; par M. Ch. Montigny. p. 630.

32me Année, 2me Sér. T. XVI. Sur les étoiles périodiques du mois d'avril, note de M. Alexandre Herschel, communiquée par M. Ad. Quetelet. p. 5. — Sur l'éclipse de lune du 1er juin 1863; par M. Ad. Quetelet. p. 8. — Sur le mouvement propre de quelques étoiles, par M. Ernest Quetelet. p. 9. — Note sur la cause qui s'oppose à l'introduction d'un liquide dans un vase à orifice étroit; par F. Duprez. p. 11. — Recherches sur la résistance des métaux employés dans la construction des paratonnerres aux effets de fusion par l'électricité; par M. Montigny. p. 25. — Sur le mouvement propre de quelques étoiles; par M. Ernest Quetelet. Rapport de M. Liagre. p. 56. — Note sur une récréation arithmétique; par M. J. Plateau. p. 62. — Sur l'orage du 25 juin dernier; Notes des MM. Selys-Longchamps, Ernest Quetelet, Montigny. p. 132. — Sur la nature des étoiles filantes; par M. H. A. Newton et Ad. Quetelet. p. 136. — Sur un phénomène de couleurs juxtaposées; par J. Plateau. p. 139. — Sur les étoiles filantes et leur théorie. (Communications diverses. MM. A. Quetelet, Duprez, Madame Cath. Scarpellini, MM. John Herschel, Alex. Herschel fils.) p. 286. — Sur un bolide qui a éclaté à Bologne le 10 août 1863; lettre de M. J. Bianconi à M. H. Storks Eaton. p. 313. — Sur un météore extraordinaire, observé à Harworth (comté de Durham), en octobre 1854; lettre de Sir J. Herschel à M. Ad. Quetelet. p. 315. — Sur la nature des étoiles filantes. Extrait d'une lettre de Sir John Herschel à M. Ad.

Quetelet. p. 319. — Sur les étoiles filantes. Extrait d'une lettre de M. Haidinger à M. Ad. Quetelet. p. 320. — Sur les étoiles filantes du 11 août 1863 et sur leur nature. Lettre de M. H. A. Newton à M. Ad. Quetelet. p. 324. — Orage du 10 septembre 1863, observé à Bruxelles par M. Ernest Quetelet. p. 329. — Sur les étoiles filantes et leurs lieux d'apparition; par MM. Ad. Quetelet, Le Verrier, Haidinger et Poey. p. 396. — Sur deux notices de physique, par M. Anatole de Coligny. p. 474. — Sur l'eau comme cause de diamagnétisme; par M. Maas. p. 476. — Sur les étoiles filantes du mois d'août 1863 dans l'hémisphère austral; note de M. Ad. Quetelet. p. 477. — Ouragans du commencement de décembre 1863; par M. Ad. Quetelet. p. 484. — Le l'eau comme cause déterminante du diamagnétisme de quelques corps organisés; par M. Maas. p. 486. — Sur un aérolithe aperçu en Belgique le 7 décembre 1863. p. 621. —

33*me* Année, 2*me* Sér. T. XVII. Sur la mortalité pendant la première enfance; par M. Ad. Quetelet. p. 9. — Sur la hauteur de l'atmosphère, sur notre système planétaire et sur les éléments magnétiques à Christiania; lettre de M. Hansteen à M. Ad. Quetelet. p. 16. — Sur un aérolithe tombé dans les environs de Tirlemont le 7 décembre 1863. p. 18. — Sur la hauteur et l'origine des étoiles filantes; fragment d'une lettre de M. A. Secchi à M. Ad. Quetelet. p. 21. — Note sur quelques perfectionnements apportés aux appareils chronographiques; par M. Gloesener. p. 28. — Note sur les tremblements de terre en 1862, avec suppléments pour les années anterieures; par M. A. Perrey. p. 83. Rapports de M. Duprez et M. Ad. Quetelet. p. 83. — Sur quelques propriétés des polygones réguliers; par M. Vander Mensbrugghe. Rapport de M. Timmermanns. p. 85. — Quelques mots à propos des aérolithes tombés en Brabant le 7 décembre 1863; par M. A. Thielens. Rapport de M. Duprez. p. 86. — Sur un chronographe électro-balistique; Mémoire de M. P. Le Boulangé. Rapport de M. Melsens. (Sehr ausführlich.). p. 92. — Mémoire sur les relations qui existent entre les étoiles filantes, les bolides et les essaims de météorites; par M. Haidinger. p. 127. — Rapport sur l'échantillon du météorite de Beauvechain (Tirlemont, Tourinne-la-Grosse); par M. Haidinger. p. 137. — Sur quelques propriétés générales des polygones réguliers; par M. G. Vander Mensbrugghe. p. 153. — Examen critique d'une méthode récemment proposée pour distinguer le maximum et le minimum dans les problèmes du calcul des variations; par M. Lindelöf à Helsingfors. p. 162. — Sur une notice de M. le marquis A. de Coligny relative au

mouvement des ondes et sur une notice du même auteur relative au développement de la chaleur dans les siphons employés au percement du tunnel du Mont-Cenis. Rapport de M. A. De Vaux. p. 227. — Des phénomènes périodiques en général; par M. Ad. Quetelet. (In vieler Beziehung sehr interessant und lehrreich, namentlich auch bezüglich der verschiedenen so sehr verdienstlichen und wichtigen Arbeiten und Publicationen, mit Rücksicht auf deren nothwendigen Zusammenhang unter einander, denen Herr Quetelet seit einer langen Reihe von Jahren sich mit so vielem Fleisse und so vielem Erfolge gewidmet hat, weshalb wir unsere Leser auf diese Abhandlung recht sehr aufmerksam zu machen nicht unterlassen können.) p. 229. — Note sur un nouveau scintillomètre; par M. Ch. Montigny. p. 260. — Solution d'une question de probabilités; par M. Liagre. (Dans une partie de domino à quatre, le joueur *B* se trouve placé à la droite du joueur *A*; celui-ci a la pose et doit faire domino en sept coups, *B* ayant posé six dés, et les deux autres joueurs n'en ayant posé aucun.) p. 365. — Magnetische und andere Mittheilungen von den Herren Ernest Quetelet, Ad. Quetelet, Haidinger. p. 436. — Note sur cette question posée par Arago: La scintillation d'une étoile est-elle la même pour les observateurs diversement placés? par M. Montigny. p. 443. — Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces; par M. Lamarle. Rapport de M. Plateau. p. 591. — Sur la périodicité des étoiles filantes du mois de novembre; par M. Ad. Quetelet. p. 599. — Note sur les équations différentielles de la dynamique; par M. Ph. Gilbert. p. 617.

---

Für 1864 hatte die Königlich Belgische Akademie der Wissenschaften folgende Preisfragen gestellt, die wir ihres grossen wissenschaftlichen Interesses wegen hier noch mittheilen wollen, wenn auch der Einlieferungstermin der betreffenden Arbeiten längst abgelaufen ist; wir sind leider erst vor Kurzem zu ihrer Kenntniss gelangt:

*I.*

„Déterminer et montrer en quoi consiste la supériorité rélative des méthodes géométriques sur les méthodes analytiques et réciproquement."

*II.*

„Exposer la théorie probable des étoiles filantes, en l'appuyant sur les faits observés."

Wir werden Sorge tragen, künftighin früher Kenntniss von den von der genannten berühmten Akademie gestellten Preisfragen zu erhalten, und werden dieselben dann unseren Lesern schleunigst mittheilen.

---

Der neueste Jahresbericht (Fastnacht 1865) der so sehr verdienstlich und seegensreich wirkenden Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften enthält zwei sehr beachtenswerthe Aufsätze, auf die wir unsere Leser recht sehr aufmerksam machen, nämlich:

I. Ueber einen Satz der neueren Geometrie. Von Herrn Deich-Inspector H. W. C. Hübbe.

II. Einige Beobachtungen und Erfahrungsresultate aus der Benutzung des Amsler'schen Planimeters. Von Herrn H. Stück, Chef des Hamburger Vermessungs-Bureaus. (Allen, die mit dem Amsler'schen Planimeter arbeiten, dringend zur Beachtung zu empfehlen.)

---

Von den

## Gauss'schen Werken,

durch deren Herausgabe die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen sich ein so ungemein grosses Verdienst erwirbt, sind nun die beiden ersten Bände erschienen. Die Herausgabe geschieht ganz der im Archiv. Thl. XXXVIII. S. 188. mitgetheilten ausführlichen Ankündigung dieses grossartigen literarischen Unternehmens gemäss, wo also das Weitere über die beiden bereits erschienenen Bände nachgesehen werden kann. Den Fortsetzungen sehen wir mit grösstem Verlangen entgegen.

---

## Druckfehler.

Im Literar. Ber. Nr. CLXXI. S. 7. s. m. „j'aurai" statt „j'aurais."

Theil XLIII. S. 473. Z. 14. v. o. s. m. „trois fois" statt „troisfois."

Theil XXXI. S. 28. Z. 12. 14. 21. ist statt „$\frac{B_n}{A_0}$" überall bloss „$B_n$" zu setzen.

# Einladung

## zu der 40sten Versammlung der deutschen Naturforscher und Aerzte.

Die im verflossenen Jahre in Giessen vereinigte 39ste Versammlung der deutschen Naturforscher und Aerzte hat zu dem diesjährigen Versammlungsorte die Residenzstadt Hannover und zu Geschäftsführern die Unterzeichneten erwählt. Wir erfüllen hiermit die angenehme Pflicht, deutsche und ausländische Naturforscher und Aerzte, sowie Freunde der Naturwissenschaften zu der auf die Tage von Montag den 18. bis Sonnabend den 23. September angesetzten Versammlung ganz ergebenst einzuladen. Das Aufnahmsbureau wird am 17. September Morgens in Stand gesetzt und eröffnet sein und die nöthige und sonst erwünschte Auskunft ertheilt werden.

Zu Wohnungen bieten die zahlreichen und sehr guten Gasthöfe bequeme Gelegenheit dar: ausserdem werden eine grosse Anzahl von Privatwohnungen nachgewiesen werden können, zu deren Benutzung jedoch eine der Ankunft hieselbst vorausgehende Anmeldung erforderlich sein wird. Indem die unterzeichneten Geschäftsführer mit Eifer und nach besten Kräften den Bedürfnissen und Wünschen der Versammlung zu entsprechen suchen werden, hoffen sie auf zahlreiche Theilnahme.

Hannover, den 3ten Junius 1865.

Professor Dr. **Krause**,
Geheimer Ober-Medicinalrath.

Professor Dr. **Karmarsch**,
Director der polytechnischen Schule.

Taf. I.

Fig. 4.

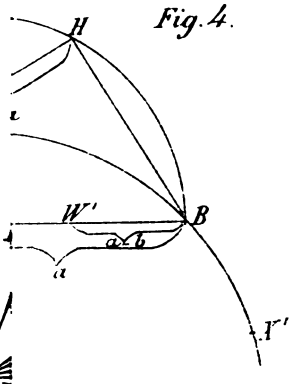



Fig. 6.

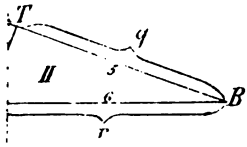
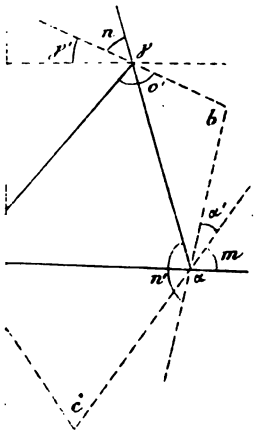



Fig. 9.



To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

510.5
a673
v.43

STORAGE AREA